

LES MATHÉMATIQUES DANS L'ESPACE MÉDITERRANÉEN: L'EXEMPLE D'AL-ANDALUS ET DU MAGHREB

Ahmed DJEBBAR

Université Lille 1, Cité Scientifique, 59650 Villeneuve-d'Ascq Cedex, France

ahmed.djebbar@wanadoo.fr

RESUME

Dans l'Histoire des activités mathématiques autour de la Méditerranée, l'espace constitué par le Maghreb et l'Andalus a joué un triple rôle : celui d'un conservatoire d'une partie des savoirs mathématiques préislamiques (particulièrement ceux de la Grèce et de l'Inde), celui d'un lieu de production de savoirs mathématiques nouveaux mais aussi d'enseignement et de publications d'ouvrages ; celui, enfin, d'un intermédiaire important dans la diffusion partielle, vers l'Europe médiévale et l'Afrique subsaharienne, des corpus mathématiques grecs, indiens et arabes.

L'article présentera les éléments essentiels illustrant, à travers ce triple rôle, les activités mathématiques observées, entre le IX^e et le XIV^e siècle, dans les foyers scientifiques d'une partie de la rive sud de la Méditerranée, avec leurs prolongements vers la rive nord.

1 Introduction

Entre le IX^e et le XV^e siècle, et en relation étroite avec les foyers scientifiques de l'Orient musulman, deux régions méditerranéennes ont connu une activité mathématique relativement importante et multiforme. La plus ancienne est celle du Maghreb. Elle correspond, aujourd'hui, au nord de l'Afrique (sauf l'Égypte) avec ses extensions sahariennes. La seconde est celle d'al-Andalus, nom donné par les historiens arabes au territoire de la Péninsule ibérique qui a été gouvernée, entre 711 et 1492, par des pouvoirs musulmans¹.

Avant le VIII^e siècle, le patrimoine mathématique de ces deux régions était relativement modeste, comparé bien sûr à ce qui avait été produit au cours de la dernière phase de la tradition scientifique grecque, celle de la période hellénistique². Au Maghreb, aucun témoignage ne permet d'affirmer qu'à l'arrivée des premiers conquérants musulmans (vers 670), il y avait une tradition mathématique écrite dans la région. Mais les données ethnomathématiques connues laissent à penser qu'il y avait un ensemble de savoir-faire intervenant dans les activités quotidiennes qui utilisaient des constructions géométriques (comme la décoration murale ou celle des poteries et des tapisseries), des numérations et des procédures de calcul (dans le cadre des transactions commerciales). Ces savoir-faire ne vont pas disparaître du jour au lendemain. Une partie sera intégrée au nouveau savoir venu

¹ Il n'y a pas unanimité sur l'origine du terme « *al-Andalus* ». L'hypothèse communément admise est celle qui le rattache aux Vandales (*Wandāl* en arabe), un peuple européen du Nord qui a migré vers la Péninsule ibérique autour de 409 avant de s'installer au Maghreb et d'y rester jusqu'en 533.

² Période que l'on situe, généralement, entre la mort d'Alexandre le Grand (en 323 av. J.C.) et celle de Cléopâtre (en 30 av. J.C.).

d'Orient et l'autre partie continuera à être pratiquée et transmise dans le cadre des activités économiques et artistiques locales.

En Andalus, la situation était différente. Avant la conquête musulmane, les élites de la région avaient accès à certains écrits mathématiques, comme l'*Institution arithmétique* de Boèce (m. 524)³ et certains chapitres des *Etymologies* d'Isidore de Séville (m. 636)⁴. Mais le contenu de ces ouvrages était bien en deçà de la production grecque des siècles précédents. En tout les cas il n'a pas été à l'origine de la réactivation des activités mathématiques dans cette région au cours de la période wisigothique (508-710). Et, comme pour le Maghreb, il faudra attendre l'arrivée des premières traductions du grec, du sanskrit et du persan à l'arabe, toutes réalisées au Proche Orient, pour qu'une nouvelle tradition commence à émerger avec un premier corps d'enseignants et d'auteurs de manuels. Comme on le verra par la suite, cette tradition, qui s'est exprimée exclusivement en arabe⁵, a connu une longue période de maturation avant de s'affirmer, comme un ensemble d'activités d'enseignement, de publication et de recherche. La production qui en a découlé a concerné, à la fois, les domaines mathématiques anciens, comme la géométrie, la théorie des nombres et le calcul (avec leurs aspects théoriques et appliqués) mais, également, les nouveaux chapitres apparus d'abord en Orient, comme l'algèbre et la trigonométrie.

2 Les premiers pas des mathématiques arabes au Maghreb et en Andalus

C'est à Kairouan, dans le Maghreb oriental, qu'apparaissent les premières activités mathématiques en arabe. Puis, ce sera le tour de Tahert, une ville concurrente sur le plan idéologique et politique et qui avait des relations privilégiées avec les premiers foyers scientifiques d'Orient⁶. A ses débuts, la production dans ce domaine était essentiellement utilitaire dans la mesure où elle devait répondre à des besoins précis : le calcul transactionnel et la répartition des héritages. Le premier manuel connu, publié dans cette région, est le « *Livre sur le calcul indien* » d'Abū Sahl al-Qayrawānī (IX^e s.)⁷. Il s'agit, comme le titre l'indique clairement, d'une reprise du système décimal positionnel indien avec les algorithmes arithmétiques qui l'accompagnent, c'est à dire la matière du livre d'al-Khwārizmī (m. 850) qui porte d'ailleurs le même titre et qui a été publié à Bagdad avant 833.

³ Boèce (1995). *Institutions arithmétiques*. J.-Y. Guillaumin (Ed. & Trad.). Paris: Les Belles Lettres.

⁴ Isidore de Séville (1983-2010). *Etymologiae*. Paris: Les Belles Lettres.

⁵ Nous entendons par « *mathématiques arabes* » toutes les activités de traduction, d'enseignement, de publication et de recherche qui ont eu lieu en pays d'Islam et qui ont été exprimées essentiellement en arabe entre la fin du VIII^e siècle et le milieu du XI^e par des scientifiques de langue, de culture et de confessions différentes. Après cette date, d'autres langues pratiquées dans l'empire musulman, comme le persan, l'hébreu, le turc et, dans une moindre mesure, le berbère, ont exprimé les sciences. Mais leur production s'est inscrite, sans aucune rupture, dans la tradition mathématique arabe.

⁶ Djebbar, A. (1988). Les activités mathématiques dans les villes du Maghreb Central (IX^e-XVI^e s.). In *Actes du 3^e Colloque maghrébin sur l'Histoire des mathématiques arabes* (pp. 73-115). Alger: Office des Presse Universitaires.

⁷ Djebbar, A. (1990). Quelques éléments nouveaux sur l'activité mathématique arabe dans le Maghreb oriental (IX^e -XVI^e s.). In *Actes du 2^e Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes* (pp. 53-60). Tunis: Publications de l'Université de Tunis.

Un des domaines d'application des mathématiques, dans le domaine savant, a été l'astronomie. Certains de ses chapitres ont concerné des pratiques culturelles de la nouvelle religion : les prières quotidiennes, l'orientation des mosquées et la réalisation du calendrier lunaire. Il n'est donc pas étonnant que la ville de Kairouan ait été aussi le premier foyer scientifique ayant connu une production substantielle dans ce domaine. Et, jusqu'au X^e siècle, ses publications astronomiques, en particulier celles de Dūnash Ibn Tamīm (ca. 956), étaient une référence, pour les spécialistes de la région⁸. C'est d'ailleurs ce que confirme Ḥasdāy Ibn Shaprūt (m. vers 970), un célèbre médecin de Cordoue devenu un grand diplomate au service du calife omeyyade ʿAbd al-Raḥmān III (912-961) qui écrivait à ses correspondants à Kairouan pour leur demander de lui procurer des ouvrages produits par des scientifiques de la ville⁹.

En Andalus, il faut attendre le début de ce qui est appelé, communément, la « *période des émirs* » (756-900) pour observer les premières signes d'une activité scientifique, à travers les noms de quelques pionniers, comme Ibn Fuṭays et Ibn Nāṣiḥ pour les mathématiques, Yaḥyā Ibn ʿAjlān et Ḥabāb al-Faraḍī pour la science des héritages, enfin Ibn Shamīr à qui on attribue la première table astronomique et Ibn Ḥabīb, auteur d'une « *Epître sur la connaissance des étoiles* »¹⁰.

3 La période des califats d'Occident (900-1008)

Au Maghreb, cette période correspond à la phase fatimide dont l'idéologie et la politique était en totale rupture avec celles des autres pouvoirs musulmans et, en particulier, celle des Omeyyades d'al-Andalus qui ont, eux aussi et à la même époque, revendiqué le titre de calife. Mais, sur le plan scientifique, cet antagonisme s'est transformé en une émulation féconde qui a assuré la continuité de la dynamique déjà amorcée et qui a permis une avancée significative dans les deux régions.

Même si aucun écrit mathématique produit au Maghreb au cours de cette période ne nous est parvenu, nous savons, par les sources historiques que les califes de cette dynastie ont encouragé les activités scientifiques et l'ont même parfois financée, comme l'a fait, par exemple, le calife al-Muʿizz (953-975), lui-même un passionné de sciences et plus particulièrement d'astronomie. Pour la phase maghrébine du califat fatimide (909-969), les bibliographes nous fournissent quelques noms de personnes qui ont pratiqué l'astronomie, la science du calcul ou la géométrie, comme al-ʿUtaqī (m. 955), Ibn Killīs (m. 990) et al-Huwarī (m. 1023), mais ils ne nous renseignent pas sur le contenu de leur production dans ces différents domaines. On est par contre mieux informé sur les résultats de cette politique de

⁸ Sezgin, F. (1979). *Geschichte des Arabischen Schrifttums, Band VII*. Leiden: Brill.

⁹ Urvoy, D. (1990). *Pensées d'al-Andalus*. Paris: Editions du CNRS-Toulouse, Presses Universitaires du Mirail.

¹⁰ Balty-Guesdon, M.-G. (1992). *Médecins et hommes de sciences en Espagne musulmane (II^e/VIII^e-V^e/XI^es.)*. Thèse de Doctorat (Vol. III, 599-600). Paris: Université de la Sorbonne Nouvelle – Paris III.

mécénat en Egypte lorsque ces mêmes Fatimides s'y installeront à partir de 969 et jusqu'à 1171¹¹.

En Andalus, la période allant du dernier tiers du IX^e siècle à la fin du X^e, est considérée comme celle du véritable « *décollage* » scientifique. Ce phénomène a d'abord bénéficié des initiatives prises au cours du siècle précédent au niveau de l'enseignement et, surtout, au niveau du transfert vers l'Andalus des savoirs produits en Orient, en particulier de l'achat de dizaines d'ouvrages mathématiques traduits du grec à l'arabe ou produits à Bagdad à l'époque d'al-Ma'mūn (813-833) et de ses successeurs du IX^e siècle. Parmi les mécènes qui ont financé cette opération de transfert dans le but d'enrichir leurs propres bibliothèques, il y eut deux califes importants, 'Abd ar-Raḥmān III que nous avons déjà évoqué et son fils al-Ḥakam II (961-976).

C'est au cours de cette période que l'on observe une augmentation nette du nombre de praticiens des mathématiques, en particulier dans les domaines du calcul, de la géométrie et des chapitres des héritages qui utilisent l'arithmétique des fractions. C'est également à cette période que sont rattachés les premiers professeurs de haut niveau, comme al-Maḡrīfī (m. 1007) qui s'est occupé essentiellement d'astronomie mathématique, az-Zahrāwī (m. 1009) à qui est attribué un « *Livre des principes des transactions par la méthode de la preuve* », Aḥmad Ibn Naṣr, auteur d'un « *Livre sur le mesurage* » et, surtout, Ibn as-Samḥ (m. 1035), un auteur prolifique dont deux ouvrages ont retenu l'attention des mathématiciens postérieurs: le « *Livre sur les fruits des nombres* » et, surtout, son « *Grand livre de géométrie* »¹². Malheureusement, en dehors de ces titres, et à l'exception d'un fragment du dernier ouvrage cité, rien ne nous est parvenu de leur production qui a pourtant circulé dans la région et même au Maghreb jusqu'à la fin du XII^e siècle. Pour prendre l'exemple de l'algèbre, nous sommes sûr aujourd'hui que des copies du « *Livre abrégé sur le calcul par la restauration et la comparaison* » d'al-Khwārizmī et du « *Livre complet en algèbre* » d'Abū Kāmil (m. 930) ont circulé en Andalus relativement tôt, soit au cours de cette période soit quelques décennies plus tard¹³. On sait aussi que des éléments importants de l'algèbre, telle qu'elle était pratiquée en Orient avant l'avènement de l'Islam, se trouvent dans « *L'épître sur le mesurage* » d'Ibn 'Abdūn (m. après 976), un mathématicien de Cordoue qui fut également médecin¹⁴.

La science du calcul était pratiquée plus que d'autres disciplines à cause des besoins exprimés dans le domaine des transactions et de la répartition des héritages. C'est ce que confirme le nombre d'enseignants ou d'auteurs considérés par les bibliographes comme étant

¹¹ Djebbar, A. (1990). *Quelques éléments nouveaux sur l'activité mathématique arabe dans le Maghreb oriental*, op. cit., 61-63.

¹² Rosenfeld, B. A., & Ihsanoglu, E. (2003). *Mathematicians, astronomers and other scholars of Islamic civilization and their works (7th-19th c.)* (p. 106, p. 117, p. 121). Istanbul: IRCICA.

¹³ Djebbar, A. (2002). La circulation des mathématiques entre l'Orient et l'Occident musulmans : Interrogations anciennes et éléments nouveaux. In *Actes du Colloque International "From China to Paris : 2000 Years Transmission of Mathematical Ideas"* (pp. 213-236). Stuttgart: Steiner Verlag.

¹⁴ Djebbar, A. (2005). L'épître sur le mesurage d'Ibn 'Abdūn, un témoin des pratiques antérieures à la tradition algébrique arabe. *Suhayl* 5, partie arabe, 7-68.

« versés » ou « *connaisseurs* » ou même « *savants* » dans ces deux matières¹⁵. Mais, jusqu'à maintenant, nous n'avons pas d'informations précises sur le contenu des écrits qu'ils auraient consacrés aux différents procédés de calcul en usage à cette époque (indien, digital ou alphabétique) et à leurs différents domaines d'application.

On est relativement mieux informé sur la géométrie et sur certains de ses chapitres classiques. Une grande partie des ouvrages grecs, qui avaient été traduits à Bagdad à partir de la fin du VIII^e siècle, est disponible à Cordoue au plus tard dans la seconde moitié du X^e siècle. C'est le cas, en particulier, des « *Eléments* » d'Euclide (III^e s. av. J.C.), des « *Coniques* » d'Apollonius (III^e s. av. J.C.) et de « *L'épître sur la mesure du cercle* » d'Archimède (m. 212 av. J.C.)¹⁶. A ce corpus de base, il faut ajouter les premiers écrits arabes produits aux IX^e-X^e siècles, dans le prolongement de la tradition grecque, comme ceux des frères Banū Mūsā, de Thābit Ibn Qurra (m. 901) et d'an-Nayrīzī¹⁷.

4 La période des principautés (XI^e s.)

Au Maghreb, l'activité mathématique et astronomique de cette période reste encore cantonnée, en grande partie, en Ifriqiya. En plus de quelques auteurs dont les sources connues n'ont retenu que les noms¹⁸, deux scientifiques émergent du lot. Le premier est Ibn Abī ar-Rijāl (m. 1034) qui a publié des ouvrages en géométrie et en astronomie qui ne nous sont pas parvenus. Mais il a acquis une certaine renommée, en particulier en Europe, pour son grand traité d'astrologie, intitulé le « *Livre brillant sur les jugements des étoiles* »¹⁹. Le profil du second mathématicien est représentatif d'une communauté de scientifiques dont le nombre ne va cesser d'augmenter à partir de la fin du XI^e siècle, à la suite des événements politiques qui ont perturbé les équilibres régionaux. Il s'agit d'Ibn Abī aṣ-Ṣalt (m. 1134). Originaire de Dénia, en Andalus, où il a acquis sa première formation, ce mathématicien-astronome, doublé d'un homme de culture, quitte sa ville natale vers l'âge de vingt ans pour l'Égypte où il séjourne une vingtaine d'année et où il fait de la prison sur ordre du pouvoir local. Il passe les vingt dernières années de sa vie au Maghreb, dans la ville de Mahdia²⁰.

En Andalus, malgré l'instabilité politique qui a caractérisé cette période, suite à l'éclatement du califat et à l'émergence d'une vingtaine de petites principautés rivales, la dynamique scientifique ne s'est pas ralentie et, pour certains domaines, comme les mathématiques, elle a même connu un développement encore plus important, avec l'émergence de scientifiques de haut niveau et la publication de travaux originaux. Parmi les nombreux savants de cette époque, rares sont ceux dont des écrits nous sont parvenus. Ceux

¹⁵ Balty-Guesdon, M.-G. (1992). *Médecins et hommes de sciences...*, op. cit., 614-632, 637, 641.

¹⁶ Steinschneider, M. (1956). Die Europäischen Übersetzungen aus dem Arabischen bis Mitte des 17 Jahrhunderts. Graz: Akademische Druck- u. Verlagsanstalt, 21, 24-26.

¹⁷ Lévy, T. (1995). Fragment d'Ibn as-Samḥ sur le cylindre et sur ses sections planes conservé dans une version hébraïque. In R. Rashed (Ed.), *Les mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle* (vol. 1, pp. 929-973). Londres: Al-Furqān.

¹⁸ Comme ceux d'al-Kindī et d'al-Kalā'ī qui étaient des spécialistes en géométrie.

¹⁹ Sezgin, F. (1979). *Geschichte des Arabischen Schrifttums, Band VII.*, op. cit., 186-188.

²⁰ Suter, H. (1900). *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke*. Leipzig: Teubner.

que nous allons présenter sont représentatifs du dynamisme de leur communauté, à la fois d'après le témoignage du grand biobibliographe Ṣā'id al-Andalusī (m. vers 1078) qui était leur contemporain²¹ et, surtout, d'après les informations précises concernant leurs contributions scientifiques.

Le premier d'entre eux est Ibn Mu'adh (m. vers 1079) qui était originaire de la ville de Jaén. Il fait partie de ces scientifiques de l'Occident musulmans qui ne se sont pas contentés des ouvrages venus d'Orient, pour compléter leur formation ou leur information, mais qui se sont déplacés et qui ont fréquenté certains de leurs collègues des cités du Proche Orient. En plus de sa formation d'astronome, Ibn Mu'adh était très versé en mathématique. En géométrie, il s'est intéressé à la théorie des rapports du Livre V des « *Eléments* » d'Euclide à laquelle il a consacré une épître qui nous est parvenue²². Mais son ouvrage le plus important est le « *Livre sur les arcs inconnus de la sphère* » qui est la première publication occidentale connue consacrée essentiellement aux objets et aux outils de la trigonométrie²³. Cette contribution s'inscrit dans le prolongement des travaux des astronomes d'Asie centrale, en particulier ceux d'al-Bīrūnī (m. vers 1050) sans être une simple copie de leurs contenus. On y trouve en effet, comme éléments nouveaux, la définition de la tangente comme rapport du sinus et du cosinus, la résolution des triangles sphériques, sans le passage par les triangles rectangles, et la discussion des cas impossibles²⁴.

Le premier savant est al-Mu'taman (m. 1085). Avant de régner sur le petit royaume de Saragosse, il a eu une excellente formation en mathématique, en logique et en philosophie. Il a en outre bénéficié de la richesse de la bibliothèque qu'avait constituée son père al-Muqtadir (1049-1081), pendant son long règne. En attendant d'accéder au trône, al-Mu'taman s'est engagé dans un projet ambitieux, celui de réaliser une sorte de synthèse de ce qu'il a jugé comme indispensable dans les connaissances mathématiques grecques et arabes utilisées à son époque. Il avait conçu son ouvrage, intitulé « *Le livre du perfectionnement* », en deux volumes, mais seul le premier a pu être reconstitué. Il est divisé en cinq grands chapitres regroupant plus de 400 propositions et traitant des thèmes les plus importants du corpus mathématique grec et de certains problèmes résolus en Orient entre le IX^e siècle et le début du XI^e.

Pour la tradition grecque, il y a d'abord les « *Eléments* » d'Euclide (théorie des nombres des Livres VII, VIII et IX, théorie des rapports du Livre V, grandeurs incommensurables du Livre X, géométrie des figures planes constructibles exposée dans les Livres restants). A un niveau supérieur, il y a les « *Coniques* » d'Apollonius et la « *Sphère et le cylindre* » d'Archimède. Il y a enfin, à l'usage des astronomes, les *Sphériques* de Théodose (m. vers

²¹ Ṣā'id al-Andalusī (1985). Livre des catégories des nations. In H. Bu'ālwan (Ed.), Beyrouth: Dār at-ṭalī'a, pp. 180-181.

²² Plooi, E. B. (1950). *Euclid's conception of ratio*. Leiden: Rijksuniversiteit.

²³ Villuendas, M. V. (1980). *La trigonometria europea en el siglo XI, Estudio de la obra de Ibn Mu'adh El Kitāb Mayhūlāt*. Barcelone: Instituto de Historia de la Ciencia de la Real Academia de Buenas Letras.

²⁴ Samso, J. (1980). Notas sobre la trigonometria esferica de ibn Mu'adh. *Awraq*, 3, 60-67.

100), les « *Sphériques* » de Ménélaüs (m. vers 140) et certaines propositions de l'« *Almageste* » de Ptolémée (II^e s.).

De la tradition arabe, al-Mu'taman a retenu les contributions suivantes : « *L'épître sur les nombres amiables* » de Thābit Ibn Qurra²⁵, le calcul du volume de la sphère par les frères Banū Mūsā et la détermination de l'aire d'une portion de parabole par la méthode d'Ibrāhīm Ibn Sinān (m. 946). A ces thèmes purement mathématiques, il faut ajouter la résolution, longue et difficile, du célèbre problème tiré du « *Livre de l'optique* » d'Ibn al-Haytham (m. après 1040), celui de la détermination du ou des points de réflexion, sur un miroir plan, sphérique, conique ou cylindrique (convexe ou concave), d'un rayon lumineux partant d'une source donnée et aboutissant à un point également donné, extérieur au miroir²⁶.

L'analyse du contenu de ce premier volume révèle une démarche constante : celle qui a consisté à modifier la structure interne des différents chapitres empruntés à la tradition grecque en introduisant un nouvel agencement des propositions anciennes avec, parfois, de nouvelles preuves, et en ajoutant des propositions établies par ses prédécesseurs de la tradition arabe mais formulées ou démontrées différemment²⁷. Il ne semble pas qu'al-Mu'taman ait eu le temps de finaliser et de publier le second volume de son ouvrage. Mais la découverte de sa table des matières nous permet d'en savoir plus sur le projet global. Il s'agissait de présenter, dans un même moule, les aspects théoriques et appliqués des sciences mathématiques. Ainsi, dans les chapitres de la seconde partie, l'auteur avait prévu de montrer comment intervenaient les résultats et les outils théoriques en astronomie, en optique, en mécanique et en musique²⁸.

Ibn Sayyid est le troisième grand mathématicien de ce XI^e siècle, peut-être le plus novateur de sa génération. Mais, son projet le plus important est également resté inachevé. Et c'est son étudiant, le célèbre philosophe Ibn Bājja (m. 1138) qui nous en parle et qui évoque ses contributions originales²⁹. Un premier projet a consisté en une nouvelle rédaction des « *Coniques* » d'Apollonius dans laquelle Ibn Sayyid aurait introduit des notions et des définitions nouvelles qui lui ont permis de réduire le nombre de proposition de l'ouvrage et de modifier leur agencement. Le second projet, plus ambitieux, a concerné la définition et l'étude des propriétés de nouvelles courbes planes qui feront partie plus tard, en Europe, des courbes de degré supérieur à 2. Son étudiant nous dit que la première catégorie de ces courbes a été obtenue par projection de certaines courbes gauches résultant de l'intersection de solides dont

²⁵ Deux nombres a et b sont dits « *amiables* » si la somme des diviseurs de l'un est égale à l'autre. Exemple : $a = 220$ et $b = 284$. Djebbar, A. (1999). Les livres arithmétiques des *Eléments* d'Euclide dans une rédaction du XI^e siècle : le *Kitāb al-istikmāl* d'al-Mu'taman (m. 1085). *Lull*, 22(45), 589-653.

²⁶ Hogendijk, J. P. (1991). The geometrical part of the *Istikmāl* of Yūsuf al-Mu'taman ibn Hūd (11th century), An analytical table of contents. *Archives Internationales d'Histoire des sciences*, 127(41), 207-281.

²⁷ Guergour, Y. (2006). *La géométrie euclidienne en Occident musulman à travers le Kitāb al-istikmāl d'al-Mu'taman (XI^e s.)*. Thèse de Doctorat. Annaba : Faculté de mathématiques.

²⁸ Djebbar, A. (1997). La rédaction de l'*Istikmāl* d'al-Mu'taman (XI^e s.) par Ibn Sartāq un mathématicien des XIII^e-XIV^e siècles. *Historia Mathematica*, 24, 185-192.

²⁹ Djebbar, A. (1993). *Deux mathématiciens peu connus de l'Espagne du XI^e siècle : Al-Mu'taman et Ibn Sayyid*. In M. Folkerts & J.-P. Hogendijk (Eds.), *Vestigia Mathematica, Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H.L.L. Busard* (pp. 79-91). Amsterdam-Atlanta: GA.

les bases sont des sections coniques. Puis, à partir des courbes planes obtenues, et par itération du procédé, il a obtenu de nouvelles courbes de degré supérieur. Puis, grâce à ces courbes, Ibn Sayyid aurait établi des résultats nouveaux concernant la multisection d'un angle et la détermination d'un nombre quelconque de moyennes entre deux grandeurs données. Il faut préciser que ces derniers résultats généralisaient à la fois ceux de la tradition grecque et ceux des mathématiciens de l'Orient musulman³⁰.

5 La période impériale (XII^e-XIII^e s.)

Au cours de cette période, l'Occident musulman a été, pour la première fois de son histoire, « unifié » sous la bannière d'un même pouvoir, celui des Almoravides (1040-1147) puis celui des Almohades (1147-1269). Cette unification a renforcé les relations entre les deux régions de l'empire mais, compte tenu du contexte régional, c'est le Maghreb qui en a le plus profité, en particulier dans le domaine scientifique. En mathématique, la recherche est restée vivante dans certains secteurs et les aspects théoriques de la discipline continuent à être cultivés mais avec moins de vigueur que pendant la période précédente. Ce sont surtout les domaines appliqués qui sont les plus représentés dans les informations données par les bibliographes. Quant au contenu des mathématiques pratiquées, nous en avons une connaissance partielle à cause du nombre réduit d'ouvrages qui nous sont parvenus. Mais, comme leurs auteurs étaient importants à leur époque, on peut considérer que leurs contenus reflètent l'état des disciplines concernées. Les quatre auteurs dont nous allons présenter la production qui leur est attribuée illustrent parfaitement la situation nouvelle que connaît la communauté des scientifiques dans la mesure où ils ont tous eu, à un moment ou un autre de leur vie professionnelle, des activités en Andalus et au Maghreb.

Abū l-Qāsim al-Qurashī (m. 1184) est peut-être le plus ancien. Il est originaire de Séville où il a acquis toute sa formation mais il a longuement séjourné à Bejaïa, dans le Maghreb central et il y a enseigné l'algèbre et la science des héritages³¹. Dans la première discipline il a publié un commentaire au « *Livre complet en algèbre* » d'Abū Kāmil qui était considéré par le grand historien Ibn Khaldūn (m. 1406), comme l'un des meilleurs ayant été produit dans ce domaine³². D'après les informations fournies par des mathématiciens du XIV^e siècle, l'ouvrage contient quelques aspects nouveaux, dans l'agencement de l'exposé général, dans la classification des six équations canoniques et dans les justifications de l'existence des solutions des équations du second degré³³. Cet auteur était également apprécié pour sa méthode de résolution des problèmes d'héritage, basée sur la décomposition des nombres en facteurs premiers. Malgré la grande réticence des juristes (dont les compétences

³⁰ Djebbar, A. (1998). Abū Bakr Ibn Bājjā et les Mathématiques de son temps. In *Etudes Philosophiques et Sociologiques dédiées à Jamal ad-Dīn Alaoui* (n° spécial 14, pp. 5-26). Fez: Publications de l'Université de Fez.

³¹ Zerrouki, M. (1995). Abū l-Qāsim al-Qurashī : Sa vie et ses écrits mathématiques. *Cahier du Séminaire Ibn al-Haytham*, 5, 10-19.

³² Ibn Khaldūn (2002). *Le Livre des exemples*. A. Cheddadi, (Trad.). Paris: Gallimard, p. 951.

³³ Djebbar, A. (1980). *Enseignement et Recherche mathématiques dans le Maghreb des XIII^e-XIV^e siècles*. Paris: Publications Mathématiques d'Orsay, 81(2), 8-10 ; Djebbar, A. (2005). *L'algèbre arabe, genèse d'un art*. Paris: Adapt-Vuibert.

mathématiques étaient souvent très limitées), cette méthode a eu beaucoup de succès grâce au soutien des mathématiciens, comme al-^cUqbānī (m. 1408) et al-Qalaṣādī (m. 1486), qui l'ont enseignée et qui lui ont consacré des commentaires³⁴.

Abū Bakr al-Ḥaṣṣār (XII^e s.) est le deuxième spécialiste dont il nous est parvenu une partie des écrits mathématiques. Comme son contemporain al-Qurashī, il est originaire de Séville qu'il aurait quittée pour s'installer à Marrakech sous le règne d'Abd al-Mu'min, le deuxième calife almohade (1147-1163)³⁵. Il est connu comme auteur de deux écrits sur la science du calcul. Le « *Livre de la démonstration et du rappel* » un manuel qui a eu beaucoup de succès auprès des enseignants du Maghreb tout au long des XIII^e-XV^e siècles. Il y traite de la numération indienne, des opérations arithmétiques sur les entiers et les fractions, du calcul exact ou approché de la racine carrée d'un nombre entier ou fractionnaire et de la détermination des sommes de certaines suites d'entiers. Au delà de son contenu classique, cet ouvrage a une double importance historique : d'abord parce qu'il est, pour le moment, le plus ancien manuel qui nous soit parvenu et qui nous renseigne sur le contenu de l'enseignement mathématique de base au Maghreb. Ensuite, il est le plus ancien témoin de l'utilisation d'un symbolisme arithmétique permettant d'exprimer toutes les formes de fractions utilisées dans l'enseignement du calcul et dans ses applications à la science des héritages³⁶. Son second ouvrage est le « *Livre complet sur l'art du nombre* » dont seul le premier volume et la table des matières du second ont été retrouvés dans une copie anonyme qui a pu être identifiée grâce à des références à son contenu découvertes dans des ouvrages postérieurs. L'auteur y développe les chapitres déjà traités dans son manuel et ajoute d'autres thèmes, comme la décomposition d'un nombre en facteurs premiers, la recherche des diviseurs communs, l'extraction de la racine cubique exacte d'un nombre entier et le calcul des nombres amiables³⁷.

Le troisième mathématicien est d'origine maghrébine mais il a également séjourné un certain temps à Séville. Il s'agit d'Ibn al-Yāsamin (m. 1204) qui signifie « *fils de fleur de jasmin* », en référence à sa mère qui était noire et à qui on a probablement attribué ce prénom par dérision. Quant à son père il était originaire d'une tribu berbère du Maghreb extrême³⁸. Il s'est rendu célèbre grâce à ses poèmes mathématiques et plus particulièrement à celui qu'il a consacré à l'algèbre et qui est une sorte de « fiche technique » versifiée, facile à mémoriser

³⁴ Harbili, A. (1996). L'enseignement des mathématiques à Tlemcen au XIV^e siècle à travers le commentaire d'al-^cUqbānī au Talkhīs. *Cahier du Séminaire Ibn al-Haytham*, Alger: E.N.S., 7, 6-22 ; Laabid, E. (2011). Ibn Ṣafwān al-Mālaqī (m. 1362) et sa contribution dans la tradition mathématique des héritages. In *Actes du 10^e Colloque maghrébin sur l'Histoire des mathématiques arabes* (pp. 198-210). Tunis: Publications de l'A.T.S.M.

³⁵ Lamrabet, D. (2014). *Introduction à l'Histoire des mathématiques maghrébines*. London: Lulu.

³⁶ Suter, H. (1901). Das Rechenbuch des Abū Zakariyā el-Ḥaṣṣār. *Bibliotheca Mathematica. Série 3*, 2, 12-40.

³⁷ Aballagh, M., & Djebbar, A. (1987). Découverte d'un écrit mathématique d'al-al-Ḥaṣṣār (XII^e s.) : Le Livre I du Kāmil. *Historia Mathematica*, 14, 147-158.

³⁸ Ibn Sa'īd (1945). *Les branches mûres sur les mérites des poètes du septième siècle*. I. Al-Ibyarī (Ed.). Le Caire: Dār al-ma'ārif.

par l'enseignant³⁹. Son ouvrage le plus important, écrit en prose et intitulé le « *Livre sur la fécondation des esprits avec les symboles des chiffres de poussière* ». Il y traite de la science du calcul, de l'algèbre et de la géométrie du mesurage, en combinant des éléments et des démarches caractéristiques aux trois traditions arabes de l'époque : celles d'Orient, d'al-Andalus et du Maghreb⁴⁰. Mais, malgré sa richesse, cet ouvrage n'a pas eu le même succès que le poème algébrique puisqu'il a été peu copié. De plus, à notre connaissance, il n'a bénéficié d'aucun commentaire alors que, dans le même temps, le poème a été enseigné pendant plusieurs siècles et qu'il a été commenté par une quinzaine de mathématiciens du Maghreb et de l'Orient musulman⁴¹.

Comparé à ses trois prédécesseurs qui viennent d'être présentés, le quatrième scientifique de cette période est incontestablement le plus important pour le nombre de ses écrits et, surtout, pour sa contribution originale dans le développement d'un chapitre nouveau en mathématique. Il s'agit d'Ibn Mun'im (m. 1228), un andalou de Dénia qui a été attiré, relativement jeune, par Marrakech, la capitale de l'empire almohade, et qui s'y est installé définitivement. Il y a mené plusieurs activités en parallèle puisque son biographe dit de lui qu'il a pratiqué la médecine, enseigné les mathématiques, publié des ouvrages et fait des recherches originales. Les ouvrages qui lui sont attribués portaient sur la géométrie, la science du calcul et la théorie des nombres⁴². Mais un seul nous est parvenu, le « *Livre de la science du calcul* », dans lequel on trouve des chapitres classiques sur le « *calcul indien* » et d'autres plus originaux comme celui sur les « *nombres figurés* », celui sur les « *nombres amiables* » et, surtout, celui consacré entièrement à un problème combinatoire et qui est intitulé « *Chapitre sur le dénombrement des mots qui sont tels que l'être humain ne peut s'exprimer que par l'un d'eux* ». Il s'agit là d'investigations nouvelles à partir d'un problème ancien posé par les linguistes arabes du VIII^e siècle, celui du dénombrement de tous les mots d'une langue en vue de réaliser son lexique. Parmi les résultats obtenus par Ibn Mun'im, soit à l'aide de la preuve par induction (récurrence faible) soit par la technique des tableaux, il y a le dénombrement des permutations des lettres d'un mot, avec ou sans répétition, celui des combinaisons des lettres d'un alphabet, avec permutation et répétition, et celui de toutes les lectures possibles d'un mot, compte tenu des voyelles qu'on peut associer à chaque phonème⁴³.

6 La période des quatre royaumes (xiv^e-xv^e s.)

³⁹ Shawqi, J. (1987). *Les poèmes d'Ibn al-Yāsamin sur les procédés de l'algèbre et du calcul*. Koweït: Mu'assasat al-Kuwayt li t-taqaddum al-ʿilmī.

⁴⁰ Zemouli, T. (1993). *Les écrits mathématiques d'Ibn al-Yāsamin (m. 1204), Magister d'Histoire des Mathématiques*. Alger: E.N.S.

⁴¹ Op. cit., 322-334 ; Abdeljaouad, M. (Ed.) (2003). *Ibn al-Ha'im, Commentaire du poème d'Ibn al-Yasamin*. Tunis: Publications de l'A.T.S.M. ; Lamrabet, D. (2014). *Introduction à l'Histoire des mathématiques maghrébines*, op. cit., pp. 148-152.

⁴² Ibn ʿAbd al-Malik (1973). *L'appendice et le complément aux deux livres al-Mawṣūl wa ṣ-Ṣila*. In I. ʿAbbās, & M. Benshrifa (Eds.) (vol. VI, pp. 59-60). Beyrouth: Dār ath-thaqāfa.

⁴³ Djebbar, A. (1985). *L'analyse combinatoire au Maghreb : L'exemple d'Ibn Mun'im (XII^e-XIII^e siècles)*. Paris: Publications Mathématiques d'Orsay, n° 85-01.

Au cours de cette période, on observe un ralentissement sérieux des activités scientifiques en Andalus avec un dynamisme plus soutenu au Maghreb même si l'analyse du contenu des ouvrages produits durant ces deux siècles révèle un arrêt de la recherche, dans tous les foyers scientifiques connus, et un rétrécissement général des programmes d'enseignement au détriment des thèmes théoriques⁴⁴. La région d'al-Andalus encore sous le contrôle des musulmans est désormais réduite au petit royaume de Grenade dont dépendaient aussi Malaga, Almeria et Guadix. Dans ces quatre cités s'est maintenue une activité mathématique et astronomique, d'enseignement et de publication, tournée vers les domaines appliqués. C'est ce que montrent clairement les ouvrages qui nous sont parvenus et qui ont été analysés, comme les manuels de calcul d'Ibn Zakariyā (m. 1404) et d'al-Qalaṣādī⁴⁵ ou le poème sur le mesurage d'Ibn Luyūn (m. 1346)⁴⁶. Le contenu de cette dernière publication est encore plus révélateur du phénomène de réduction de la matière d'enseignement et de son niveau. En effet, ce qui est exposé (qui ne concerne pourtant que des problèmes de mesurage et d'arpentage liés à la vie de tous les jours) est très en deçà de ce qu'on découvre dans des manuels du XIII^e siècle récemment découverts et analysés, comme le « *Livre qui facilite le mesurage et le découpage* » d'al-Mursī⁴⁷ et le « *Livre qui vulgarise et facilite pour faire profiter le débutant dans l'art du mesurage* » d'Ibn al-Jayyāb⁴⁸.

Au Maghreb, la production mathématique est quantitativement importante. Mais son contenu est, essentiellement, une reprise sous différentes formes (commentaires, résumés, poèmes), d'une partie de la production des siècles précédents. Il y a bien encore quelques apports nouveaux mais ils sont rares. On les trouve chez Ibn al-Bannā (m. 1321), un mathématicien de Marrakech qui a publié des ouvrages sur la science du calcul, la géométrie du mesurage et l'algèbre. Il a également eu une contribution originale en analyse combinatoire qui s'inscrit dans le prolongement des travaux d'Ibn Mu'īn que nous avons déjà évoqués. Il est en effet le premier à avoir établi la formule donnant les combinaisons de n objets p à p , évitant ainsi le recours à la technique des tableaux qu'avait abondamment utilisé son prédécesseur⁴⁹. Il a également résolu certains problèmes en faisant intervenir des démarches purement combinatoires⁵⁰. En algèbre, il a proposé, pour la résolution des

⁴⁴ Djebbar, A. (1980). *Enseignement et recherche mathématiques dans le Maghreb des XIII^e-XIV^e siècles*, op. cit., 1-5.

⁴⁵ Lamrabet, D. (2014). *Introduction à l'Histoire des mathématiques maghrébines*, op. cit., 108-109, 208-211.

⁴⁶ Moyon, M. (2016). Ibn Luyūn at-Tujībī (1282-1349) : Un témoin de la science du mesurage en Occident musulman. In A. Bouzari (Ed.), *Actes du XI^e Colloque maghrébin sur l'Histoire des mathématiques* (pp. 333-352). Alger: Publications du L.E.H.M.

⁴⁷ Djebbar, A. (2007). La géométrie du mesurage et du découpage dans les mathématiques d'Al-Andalus (X^e-XIII^e s.). In P. Radelet de Grave (Ed.), *Liber Amicorum Jean Dhombres* (pp. 113-147). Turnhout: Editions Brepols.

⁴⁸ Djebbar, A. (2016). Les techniques de découpage dans un ouvrage géométrique d'al-Andalus. In *Actes du XI^e Colloque maghrébin sur l'Histoire des mathématiques arabes* (pp. 109-138). Alger: Dar al-Khalduniya.

⁴⁹ Djebbar, A. (1980). *Enseignement et recherche mathématiques dans le Maghreb des XIII^e-XIV^e siècles*, op. cit., 76-98.

⁵⁰ Djebbar, A. (2003). Mathématiques et société à travers un écrit maghrébin du XIV^e siècle. In *Actes du colloque international « De la Chine à l'Occitanie, chemins entre arithmétique et algèbre »* (pp. 29-54).

équations de second degré des preuves pour l'existence des solutions positives qui ne font intervenir que des identités remarquables, c'est à dire sans recours explicite au discours et aux outils de la géométrie⁵¹.

Mais ce ne sont pas ses contributions originales que retiendront ses successeurs. C'est un petit manuel, sans aucune nouveauté dans son contenu, qui le fera connaître un peu partout et pendant plusieurs siècles. Il s'agit de « *L'abrégé sur les opérations du calcul* » qui expose, d'une manière très concise, et sans aucune justification ni aucun exemple, les éléments de base du calcul indien et les algorithmes arithmétiques (méthode de fausse position, règle de trois) et algébriques permettant de résoudre les problèmes qui aboutissent à des équations du premier ou du second degré. Ce manuel a bénéficié d'une quinzaine de commentaires d'auteurs originaires d'al-Andalus⁵², du Maghreb⁵³ et même de l'Orient musulman⁵⁴. La seule particularité à signaler, à propos de la plupart des commentaires réalisés en Occident musulman, c'est la présence d'un symbolisme algébrique tout à fait performant dont on ne connaît pas l'initiateur.

L'analyse comparative des contenus de ces différents commentaires, qui ont été produits entre la fin du XIII^e siècle et le milieu du XV^e, confirme la tendance à la réduction de la matière mathématique enseignée : des thèmes, comme l'extraction de la racine cubique approchée d'un nombre ou le calcul de nouveaux couples de nombres amiables, qui étaient présent dans les ouvrages des X^e-XIII^e siècles, ont tout simplement disparu. A cela, il faut ajouter l'absence de nouveauté dans les domaines qui ont continué à être enseignés ou qui étaient la matière des ouvrages publiés.

7 Le rôle d'al-Andalus et du Maghreb dans la circulation des mathématiques arabes en Europe

Pour conclure cette brève présentation des sept siècles d'activités mathématiques en Occident musulman, il nous reste à évoquer le rôle joué par l'Andalus et le Maghreb dans le phénomène de diffusion des savoirs et des savoir-faire mathématiques de la rive sud de la Méditerranée vers l'Europe. Très discret à ses débuts, ce phénomène ne cessera de se développer au moment même où l'activité mathématique en pays d'Islam entrait dans une phase de ralentissement. A partir de la fin du X^e siècle, des initiatives multiformes vont permettre la diffusion d'une partie de la production mathématique grecque, indienne et arabe

Toulouse: Editions du C.I.H.S.O.; Taïbi, N. (2015). *Mathématiques et société au Maghreb : L'exemple du Tanbīh al-albāb d'Ibn al-Bannā*. Mémoire de Magister: Alger, E.N.S.

⁵¹ Aballagh, M. (1988). *Le Raḥ al-ḥijāb d'Ibn al-Bannā*. Thèse de Doctorat. Paris: Université Paris I-Panthéon-Sorbonne.

⁵² Al-Qalaḥādī (1999). Commentaire de l'Abrégé sur les opérations du calcul. In F. Bentaleb (Ed.), Beyrouth: Dār al-Gharb al-Islāmī.

⁵³ En particulier al-Misrātī (XIV^e s.), al-Muwāhidī (XIV^e s.), Ibn Haydūr (m. 1413) et d'Ibn Ghāzī (m. 1514) du Maghreb Extrême, al-ʿUqbānī (m. 1408), al-Ḥabbāk (m. 1463), al-Ghurbī (XIV^e s.) et Ibn Qunfudh (m. 1406) du Maghreb central.

⁵⁴ Djebbar, A., & Aballagh, M. (2001). *La vie et l'œuvre d'Ibn al-Bannā*. Rabat: Publications de la Faculté des Lettres et Sciences Humaines.

vers les espaces culturels latins et hébraïques de l'Europe du sud. Cela a commencé, semble-t-il, par la circulation de la numération positionnelles indienne et de certains instruments astronomiques produits en Andalus. Puis ont été réalisées les premières traductions latines de textes arabes exposant les principes de construction de ces instruments et de leur mode d'emploi. A partir de la fin du XI^e siècle, ce sont des scientifiques chrétiens ou juifs d'al-Andalus, parfaitement arabisés, qui vont assurer le relai en publiant, directement en hébreu ou en latin, des manuels mathématiques dont le contenu était puisé dans les écrits arabes de l'époque. C'est ce qu'a fait Abraham Bar Hiyya (m. 1145) avec son « *Livre de la surface et de la mesure* »⁵⁵ suivi, quelques décennies plus tard, par Abraham Ibn ʿEzra (m. 1167)⁵⁶ puis par un anonyme du XII^e siècle, auteur d'un ouvrage beaucoup plus riche que ceux de ses prédécesseurs dont le titre, « *Liber Mahamelet* » [Livre des transactions] évoque son origine arabe et andalouse parce qu'il se rattache à toute une tradition locale dite « *calcul des transactions* »⁵⁷. Il faut enfin signaler le rôle important joué par Fibonacci (m. après 1240) dans l'appropriation d'une partie de la matière mathématique produite en Occident musulman, en particulier celle qui correspond à la tradition indienne du calcul. On la trouve exposée dans son « *Liber Abaci* » avec le symbolisme arithmétique qui était en usage au Maghreb depuis le XII^e siècle⁵⁸.

Mais la forme la plus importante qu'a connue la circulation des mathématiques de l'espace musulman vers l'espace latin a été celle des traductions de l'arabe au latin, à l'hébreu puis à certaines langues vernaculaires, comme le catalan ou le toscan. Pour les mathématiques et l'astronomie, ces traductions ont été réalisées, essentiellement, en Espagne, en Sicile, en Italie et dans le midi de la France⁵⁹. Elles ont concerné bien sûr des ouvrages grecs parvenus en Andalus dans leur version arabe, mais également des livres écrits en arabe et dont la production s'est développée entre le début du IX^e siècle et la fin du XIII^e. Dans la seconde catégorie, on trouve des ouvrages de géométrie de calcul et de trigonométrie qui ont été produits dans les deux régions de l'Occident musulman qui concernent cette étude. Certains d'entre eux ont circulé en Europe dans une version latine, comme les livres de géométrie d'Ibn as-Samḥ (m. 1035), d'Abū Bakr (X^e s.) et d'Ibn Muʿādh et le traité de trigonométrie sphérique de Jābir Ibn Aflaḥ (m. 1145). D'autres seront accessibles à travers des versions hébraïques, comme le « *Livre de la démonstration et du rappel* » d'al-Ḥaṣṣār et « *L'abrégé des opérations du calcul* » d'Ibn al-Bannā⁶⁰.

⁵⁵ Bar Hiia, A. (1931). *Llibre de geometria*. M. M. Guttman, & J. M. Vallicrosa (Eds. & Trad.). Barcelone: Editorial Alpha.

⁵⁶ Lévy, T. (1996). Hebrew Mathematics in the Middle Ages : An Assessment. In F. J. Ragep, & S. P. Ragep (Eds.), *Tradition, Transmission, Transformation. Proceedings of two Conferences on pre-modern science held at the University of Oklahoma* (pp. 71-88). Leiden: Brill.

⁵⁷ Sesiano, J. (2014). *Liber Mahameleth*. New York: Springer.

⁵⁸ Sigler, L. E. (2002). *Fibonacci's Liber Abaci*. New York: Springer.

⁵⁹ Steinschneider, M. (1904). *Die Hebräischen Übersetzungen des Mittelalters und die Juden als Dolmetscher*. Berlin : Bibliographisches Bureau; Steinschneider, M. (1956). *Die Europäischen Übersetzungen*, op. cit.

⁶⁰ Levy, T. (2003). L'algèbre arabe dans les textes hébraïques. I : Un ouvrage inédit d'Isaac Ben Salomon al-Aḥdab (XIV^e siècles). *Arabic Science and Philosophy*, 13, 269-301.