
Oral Presentation

QUAND LES « MATHÉMATIQUES MODERNES » QUESTIONNENT LES MÉTHODES PÉDAGOGIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE (1904-1910)

Hervé Renaud

LMJL – Université de Nantes

En 1907, la Revue de Philosophie publie une série d'articles critiquant vivement un livre du mathématicien Hermann Laurent et la logique symbolique défendue par le philosophe Louis Couturat. Leur auteur, Charles Lucas de Pesloüan, polytechnicien, y adopte le ton et la méthode utilisés par Henri Poincaré lors de la controverse qui l'a opposé à Couturat et à Bertrand Russell en 1905 et 1906 à propos de la logique et des mathématiques. Pesloüan va cependant plus loin, développant une critique politique et sociale et situant le débat sur le terrain de l'enseignement secondaire. Ces articles révèlent des craintes liées au contexte de réformes de l'enseignement secondaire et aux questionnements pédagogiques que posent les apports théoriques survenus en mathématiques durant la deuxième moitié du XIX^e siècle.

INTRODUCTION

En 1907, Charles Lucas de Pesloüan (1878-1952), ancien élève de l'École Polytechnique, fait paraître dans la *Revue de Philosophie* une série de quatre articles sous le titre « Sur les fondements de l'arithmétique et autres questions connexes ». Il y critique violemment des livres du philosophe Louis Couturat (1868-1914) et du mathématicien Hermann Laurent (1841-1908). Sous-titrés « Lettres à M. N***, professeur de mathématiques au collège de X*** », ils situent d'emblée le débat sur le terrain de l'enseignement secondaire.

Ces articles furent publiés en marge de la controverse qui opposa en 1905 et 1906 le mathématicien Henri Poincaré (1854-1912) à Couturat et au philosophe et logicien britannique Bertrand Russell (1872-1970) à propos de la logique et des mathématiques. A travers l'étude de ces textes de Pesloüan, repris et complétés dans un livre paru en 1909, *Les Systèmes logiques et la logistique. Étude sur l'Enseignement et les Enseignements des mathématiques modernes*, cet article s'intéresse aux liens que Pesloüan tisse entre logique, « mathématiques modernes » de ce début de XX^e siècle et enseignement secondaire. Ces liens mettent en lumière des craintes exprimées par différents acteurs du système éducatif français durant cette période marquée par la question des fondements en mathématiques et par des réformes majeures de l'enseignement secondaire, en particulier celle de 1902. Certaines de ces craintes sont imaginaires, conséquences du contexte politique et social. D'autres reposent sur de réels enseignements de ces « mathématiques modernes ». Nous tenterons de les mettre en évidence, à la lumière de la lecture des *Conférences du Musée pédagogique* de 1904 et d'articles de revues.

DES TEXTES EN MARGE DE LA CONTROVERSE POINCARÉ– RUSSELL, COUTURAT

Le premier article de Pesloüan est une critique du livre de Laurent, *Sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres et de la géométrie*. Les trois suivants forment un ensemble centré sur la critique de deux livres de Couturat : *L'algèbre de la logique* et *Les principes des mathématiques*, publiés en 1905. Le premier est un ouvrage d'initiation aux théories élémentaires de la logique. Le second reprend, avec quelques modifications, une série d'articles parus dans la *Revue de métaphysique et de morale* en 1904 et 1905. Ce sont ces articles, compte rendu du livre de Russell paru en 1903, *The Principles of Mathematics*, qui ont entraîné la réaction de Poincaré et provoqué la controverse évoquée précédemment, le mathématicien réfutant les positions de Russell et Couturat qui affirmaient construire les mathématiques sur des bases logiques.

Quelques brèves indications sur la logique au début du XX^e siècle [1]

Au début du XIX^e siècle, la logique est encore essentiellement la logique des syllogismes forgée par Aristote, non pas une science mais un outil de raisonnement. On peut considérer que le premier vrai réformateur de la logique au XIX^e siècle est le britannique Georges Boole.

Formé aux mathématiques, il applique à la logique les méthodes algébriques. Il reprend au mathématicien et logicien britannique Augustus De Morgan l'idée d'univers du discours qu'il note 1, 0 désignant « rien », et utilise les symboles opératoires +, ×, – pour élaborer son algèbre. Raisonnant en termes de classes (d'ensembles, en langage actuel), il note par exemple x la classe des hommes, $1 - x$ désignant la classe des objets qui ne sont pas des hommes. Ainsi, l'un des principes fondamentaux de la logique, le principe de non-contradiction qui exprime qu'on ne peut pas penser simultanément une chose et son contraire s'écrit : $x(1 - x) = 0$, conséquence de ce qu'il nomme « la loi fondamentale de la pensée » : $x^2 = x$.

Le mathématicien allemand Ernst Schröder parachève l'algèbre logique de Boole dans les trois volumes de ses *Vorlesungen über die Algebra der Logik* parus entre 1890 et 1895. Couturat situe son livre, *L'Algèbre de la Logique*, dans cette lignée Boole-Schröder. Ce petit volume d'une centaine de pages est conçu comme un livre d'initiation destiné au public français car, en France, philosophes et mathématiciens sont restés à l'écart de ce mouvement de renouvellement de la logique.

Le livre se présente comme un calcul formel, une algèbre qui peut s'interpréter en logique. Cependant, à la fin de son livre, Couturat précise qu'il n'a traité que de la logique classique, restant dans le domaine circonscrit par Aristote. Il n'a pas traité, annonce-t-il, de la logique des relations qu'il qualifie de véritable logique des mathématiques et dans laquelle ces dernières trouvent leurs concepts et leurs principes fondamentaux.

En effet, la majeure partie des raisonnements fondés sur les relations ne relèvent pas de la syllogistique [2]. De Morgan est considéré comme le fondateur de cette logique des relations. Il a mis en évidence les propriétés de réflexivité, symétrie, transitivité, asymétrie. Elle est ensuite développée par le philosophe américain Charles Sanders Peirce qui invente les quantificateurs et les tables de vérité.

C'est dans cette logique des relations que va se développer le projet logiciste de reconstruction logique des mathématiques. Le mathématicien et logicien allemand Gottlob Frege conçoit le projet de reconstruire l'arithmétique sur des bases logiques. Russell se propose, lui, de reconstruire toutes les mathématiques sur des bases purement logiques [3]. A cette fin, il adopte et développe le langage symbolique inventé par le mathématicien italien Giuseppe Peano [4]. Couturat désigne cette logique symbolique sous le nom de logistique.

La crise des fondements en mathématiques

Ces projets de reconstruction des mathématiques se situent à un moment de l'histoire des mathématiques parfois qualifié de « crise des fondements ». Si l'expression n'était pas employée par les mathématiciens du début du XX^e siècle, ils s'accordaient cependant sur des bouleversements apportés par quelques découvertes majeures au siècle précédent : les géométries non-euclidiennes par Lobatchevski en 1829 ainsi que les fonctions continues sans dérivées par Weierstrass en 1872. Ces découvertes remettaient en cause les notions intuitives de l'espace géométrique et de la continuité.

A ces découvertes il faut ajouter le mouvement d'arithmétisation de l'analyse qui débute dans les années 1820 sous l'impulsion de Bolzano et Cauchy (Boniface, 2002). La volonté d'établir l'analyse sur des bases rigoureuses amènera aux constructions des nombres irrationnels dans les années 1870, à celle des nombres relatifs, des fractions et des nombres entiers. C'est bien d'ailleurs dans ce mouvement de reconstruction de l'analyse sur des bases purement arithmétiques que Couturat situe l'origine du projet de reconstruction logique des mathématiques.

Un autre événement majeur du dernier tiers du XIX^e siècle est l'émergence de la théorie des ensembles avec les travaux de Cantor et Dedekind. Pour ses contemporains, c'est cependant le nom de Cantor qui, en France, reste attaché à cette théorie. Aux mathématiciens français elle apparaît dès le départ comme ambivalente. Les premiers mémoires de Cantor sont traduits en français en 1883. Charles Hermite et Poincaré s'opposent à certains travaux de Cantor (Dugac, 1984), qualifiés de philosophiques. Mais Jules Tannery (1848-1910) signale la même année l'importance de la notion d'ensembles dérivés. Il donne des éléments de la théorie des ensembles en 1886 dans son livre, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, écrit selon lui d'après des leçons faites à l'École Normale Supérieure. Très rapidement, les mathématiciens français Poincaré, Borel, Baire, Lebesgue vont s'emparer de cette théorie pour faire progresser l'analyse (Gispert, 1995) tout en continuant à se méfier des symboles de l'infini de Cantor. Cette théorie, devenue au début du XX^e siècle la

base de la théorie des fonctions, ne dispose pas encore d'une axiomatique solide et a le défaut d'engendrer des paradoxes.

Ces mathématiques fondées sur la seule idée de nombre et utilisant la théorie des ensembles semblent être celles que Pesloüan qualifie de « modernes » dans ses textes.

La controverse Poincaré–Russell, Couturat [5]

C'est donc à la suite de la publication des articles de Couturat dans la *Revue de Métaphysique et de Morale* qu'éclate en 1905 cette controverse. Poincaré va faire paraître, dans la même revue, des critiques qui donneront lieu à une série d'échanges entre les divers protagonistes. Le ton est polémique. Par exemple, sur le modèle du piano logique, une machine destinée à effectuer des calculs logiques, inventée par l'économiste et logicien britannique Stanley Jevons, Poincaré imagine

[...] une machine où l'on introduirait les axiomes par un bout pendant qu'on recueillerait les théorèmes à l'autre bout, comme cette machine légendaire de Chicago, où les porcs entrent vivants et d'où ils sortent transformés en jambons et saucisses (Poincaré 1905, pp. 824).

Ton polémique qu'on ne trouve pas dans les textes de Russell mais que saura lui aussi manier Couturat, dénonçant par exemple « cette clarté vulgaire qu'on nomme l'intuition, et que M. Poincaré prise si fort » (Couturat 1906a, pp. 209).

L'intuition est en effet au cœur de la controverse. Selon l'affirmation de Couturat lors de sa leçon inaugurale au Collège de France en 1905, la logique dit comment « l'on doit penser si l'on veut penser normalement et correctement » (Couturat 1906b, pp. 320). La réponse de Poincaré s'adresse à ceux qui pensent que « les mathématiques sont entièrement réductibles à la logique et que l'intuition n'y joue aucun rôle » (Poincaré 1905, pp. 815), thèse qu'il récuse. Les raisonnements mathématiques ne peuvent, selon lui, se réduire à un algorithme de calcul logique. Il accuse les logisticiens d'avoir simplement déplacé les appels à l'intuition en remplaçant les axiomes par des postulats qui n'ont pas l'évidence des axiomes. Il doute en outre que leur théorie ne repose que sur neuf notions indéfinissables et vingt propositions indémonstrables, écrivant : « je crois que si c'était moi qui avais compté, j'en aurais trouvé quelques unes de plus » (Poincaré, 1905, pp. 829).

A ces reproches, il faut ajouter des critiques plus fondamentales que Poincaré adresse aux logisticiens. Il les accuse notamment de se livrer à des pétitions de principe comme, par exemple, dans la définition du nombre 1 donnée par Burali-Forti :

$$1 = \{ T' \} \text{ Ko } \wedge (u, h) \ni (u \in \text{Un}) \}$$

Sans donner la signification de cette assertion [6], il écrit :

J'entends trop mal le Péanien pour oser risquer une critique, mais je crains bien que cette définition ne contienne une pétition de principe, attendu que j'aperçois 1 en chiffre dans le premier membre et Un en toutes lettres dans le second (Poincaré, 1905, pp. 823).

L'INTERVENTION DE LUCAS DE PESLOÛAN

Cousin de Maurice Barrès, sorti en 1899 de l'École Polytechnique, ingénieur dans les Chemins de Fer puis dans les Mines, Lucas de Pesloüan n'est ni mathématicien, ni philosophe [7]. Ami de Charles Péguy qui s'est engagé contre la réforme de 1902 et a exprimé à cette occasion son rejet de la modernité [8], Pesloüan signale une première fois son intérêt pour les questions d'enseignement en 1903 par un article intitulé « Sur la nécessité du postulat d'Euclide » dans la revue *L'Enseignement mathématique*. Les articles qu'il écrits à la suite la controverse entre Poincaré, Russell et Couturat sont publiés dans la *Revue de Philosophie*, revue fondée en 1900 par l'abbé Peillaube, professeur de philosophie à l'Institut Catholique de Paris [9].

Tout comme la *Revue de Métaphysique et de Morale*, cette revue propose de faire entrer en collaboration scientifiques et philosophes. Mais son objectif annoncé est de promouvoir une philosophie thomiste, anti-moderniste et, en particulier, anti-positiviste.

Des articles scénarisés

Les articles se présentent sous forme de lettres écrites par un ancien ingénieur à un professeur de mathématiques d'un collège de province. A la suite d'une remarque de l'inspecteur, l'ingénieur met à profit un séjour à Paris pour rechercher des ouvrages qui permettront au destinataire des lettres de découvrir des méthodes modernes d'enseignement des mathématiques.

Lors d'une première visite chez un libraire il choisit le livre de Laurent. Par la suite il rencontre un étudiant en philosophie, partisan convaincu de la logistique, qui lui conseille les livres de Couturat. Il retrouve aussi à Paris un ami, ingénieur retraité, farouche opposant de la logistique à laquelle il oppose Pascal.

Les lettres sont les récits de ces rencontres et les commentaires de sa lecture des trois livres. L'étudiant y apparaît un peu ridicule, parfois proche du fanatisme. L'ingénieur retraité a, avec le rédacteur des lettres (qui représente bien évidemment l'auteur), une grande proximité intellectuelle mais fait preuve d'opinions tranchées que Pesloüan-narrateur ne reprend pas toutes à son compte.

Une méthode empruntée à Poincaré : ton polémique et critiques fondamentales

Pesloüan, comme Poincaré, adopte un ton polémique qu'il tire vers l'ironie et reprend certaines des critiques fondamentales formulées par le mathématicien. Sa première cible est le livre de Laurent.

Laurent est un ancien élève de l'École Polytechnique. Il y devient répétiteur puis examinateur et publie à partir de 1862 un nombre important de traités concernant principalement l'analyse et le calcul des probabilités. Le livre paru en 1902, *Sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres et de la géométrie*, dont le titre résume bien le propos, est revendiqué par l'auteur comme un livre d'enseignement, et

même un livre d'enseignement de l'arithmétique pour de jeunes enfants, à la condition d'admettre un certain nombre des théorèmes démontrés.

Dans sa présentation, Laurent déclare renoncer à la « doctrine des axiomes très évidents », un « axiome [étant] une proposition que l'atavisme, l'éducation, l'autorité du maître, nous ont fait accepter comme vraie sans examen » (Laurent, 1902, pp. 2). Il propose d'y substituer le plus petit nombre « d'hypothèses plausibles » et construit son arithmétique sur six hypothèses.

Ce renoncement à la doctrine des axiomes que Laurent fait remonter à Pascal est la critique majeure de Peslöüan. Reprenant l'idée de Poincaré sur le décompte des principes fondamentaux de la logistique, Peslöüan traque les hypothèses dissimulées dans le texte. L'exemple qui suit est en outre révélateur du ton adopté par Peslöüan.

L'arithmétique de Laurent commence par la définition de l'égalité de deux objets :

Deux objets égaux sont donc deux objets jouissant d'une même propriété énoncée ou sous-entendue et dont on laisse de côté les autres propriétés.

Il n'y a là rien de conventionnel de ma part, et je ne fais que préciser une idée que nous nous faisons tous de l'égalité. L'égalité est une propriété toute relative, et qui dépend du point de vue auquel on se place. Ainsi un cheval est l'égal d'une poule, quand, faisant abstraction de toutes leurs autres propriétés, on les considère l'un et l'autre comme des animaux.

Si des objets A et B sont égaux à un objet C, A et B sont égaux entre eux, par définition. (Laurent, 1902, pp. 4)

L'objection de Peslöüan est la suivante :

Cette définition est à mon avis une hypothèse : en effet, si le cheval est l'égal de la baleine en tant que mammifère, et la baleine l'égal de l'éponge en tant qu'habitant de la mer, il n'en résulte pas que le cheval soit d'une de ces deux façons l'égal de l'éponge. Cette hypothèse signifie qu'on peut, sur A, B et C, faire le même travail d'abstraction. (Peslöüan, 1907a, pp. 376).

Cette définition qui permet à Peslöüan de tourner le texte en dérision lui donne aussi l'occasion d'exprimer une critique fondamentale : Laurent a défini l'égalité de deux objets jouissant d'une même propriété. Il faut donc que l'égalité de A et B puisse se faire dans ce cadre, ce qui n'est pas *a priori* évident pour trois objets.

Un autre type de critique que Peslöüan reprend à Poincaré est l'accusation de pratiquer des pétitions de principe. Il signale ainsi dans le texte de Laurent chaque occurrence d'un nombre avant que Laurent n'ait donné la définition du nombre entier.

Nous retrouvons cette méthode critique dans les lettres sur la logistique. Les définitions par postulats de la logistique ne lui conviennent pas plus que les hypothèses plausibles de Laurent : les unes comme les autres éloignent la science des réalités sensibles.

Mais la critique de la logistique passe progressivement d'une critique scientifique à une critique sociale et politique des textes de Couturat.

La crainte d'un monde logisticien ?

La critique sociale est en fait sous-jacente dans le sous-titre des articles. Les lettres sont adressées à un professeur de collège. Un passage du livre que Peslöian publiera en 1909 nous renseigne sur sa perception des collèges [10] :

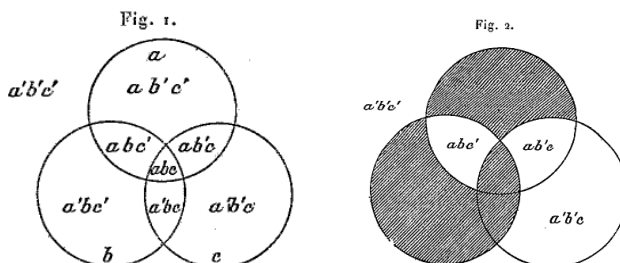
De l'architecture d'un temple grec à celle d'un musée ou d'un collège, *le collège départemental de toutes les connaissances*, telle est la dégradation de l'image qu'on peut se faire des hiérarchies scientifiques (Peslöian, 1909, pp.28).

La critique sociale et politique se développe dans les lettres consacrées à la logistique. L'exemple du problème de Venn traité par Couturat dans *L'algèbre de la Logique* l'illustre parfaitement. L'énoncé en est le suivant :

Les membres du Conseil d'administration d'une société financière sont, soit des obligataires, soit des actionnaires (mais pas les deux). Or tous les obligataires en font partie. Que faut-il en conclure ? (Couturat, 1980, pp. 73) [11].

Couturat résout le problème par le calcul puis avec les « schèmes géométriques de Venn », donnant les figures suivantes, qui nous semblent à présent bien familières :

Figure 1 : Diagrammes illustrant la résolution du problème de Venn (Couturat, 1980, pp. 76,77)



Si a désigne l'ensemble des membres du conseil, b celui des obligataires et c celui des actionnaires, l'intersection de deux ensembles se traduisant par un produit, la réunion par une somme et le complémentaire de a étant noté a' , etc, on obtient : $abc + ab'c' + a'bc + a'bc' = 0$, ou, de façon équivalente, en utilisant le complémentaire : $a'b'c' + abc' + ab'c + a'b'c = 1$. De ces relations, Couturat déduit seize causes et seize conséquences. Par exemple, la 11^e cause est la suivante : $abc' + ab'c + a'b'c = 1$, ce qui équivaut à : $(b = c')(c' < a)$, $c' < a$ se traduisant en langage ensembliste actuel par $c' \subset a$.

Peslöian détourne le problème de Venn, qui devient sous sa plume :

Dans une ville est une mutualité dont les membres sont, soit des libéraux, soit des socialistes (mais aucun n'étant les deux à la fois). Or tous les libéraux en font partie. Que faut-il en conclure ? (Peslöian, 1907a, pp. 497).

Il traduit par exemple la 11^e cause par : « les libéraux ne sont pas socialistes et les non-socialistes, c'est-à-dire les libéraux, sont mutualistes » (Pesloüan, 1907a, pp. 500). Il nous faut nous reporter au contexte politique de l'époque : socialistes et libéraux sont opposés, les catholiques conservateurs, public visé par la *Revue de Philosophie*, étant eux-mêmes opposés à ces deux courants de pensée. Nous pouvons imaginer que l'énumération sur trois pages de conclusions semblables, sur un mode ironique, devait réjouir un certain nombre de lecteurs.

La dernière lettre offre un autre exemple de ce type de critique. S'appuyant sur l'article d'un juriste paru dans la *Revue de Métaphysique et de Morale* qui se prononce pour l'enseignement de la logistique en Faculté de Droit, l'ingénieur retraité dénonce l'ambition logisticienne : « Les logisticiens veulent juger, légiférer puis gouverner » (Pesloüan, 1907b, pp. 204) afin de créer une société logisticienne où « dans les écoles, on enseignera aux enfants le parler nouveau par signes et par figures » (Pesloüan, 1907b, pp. 205). A ces craintes il faut cependant opposer l'attitude plus modérée d'un narrateur dubitatif qui conclut à la manière de Voltaire :

Nous voici peu avancés en ce qui concerne notre enseignement : je crains bien qu'il ne nous faille continuer comme nous faisons autrefois, et, pour cultiver notre jardin, conserver nos vieux outils. (Pesloüan, 1907b, pp. 206)

Les réactions aux articles de Pesloüan

Ces textes semblent n'avoir suscité aucune réaction en France, ce qui ne sera pas le cas du livre [12]. Ce dernier reprend les articles, précédés d'une longue préface et suivis de neuf appendices. Dans la préface, l'auteur affirme ne s'intéresser qu'à l'enseignement supérieur délivré dans les facultés, contrairement à ses articles qui évoquaient presque exclusivement l'enseignement secondaire. De ce déplacement de son centre d'intérêt, il ne dit rien. Les articles ne subissent que quelques modifications, toutefois révélatrices [13]. Les appendices mêlent texte purement mathématiques (il donne les démonstrations de la non-dérivabilité des fonctions de Riemann et de Weierstrass), textes de vulgarisation (sur les géométries non-euclidiennes et sur la théorie des ensembles), et textes de mathématiciens (Fourier, Weierstrass), etc.

Une recension du livre paraît en 1909 dans la *Revue de Philosophie*, signée des initiales H.P. [14]. Reprochant au texte des longueurs et certains passages qu'il qualifie de nuageux, l'article lui adresse cependant de sincères éloges. En effet, il juge que Pesloüan a découvert les nombreux postulats implicitement admis par Laurent et donné de la logistique des « indications [...] qui suffisent même [...] à nous ôter tout désir de la connaître d'avantage » (H.P., 1909, pp. 456).

Tel n'est pas l'avis de Tannery qui est sous-directeur de l'École Normale Supérieure, responsable des études scientifiques. Plus que ses travaux scientifiques, ce sont ses fonctions institutionnelles et son rôle de formateur qui lui font jouer un rôle privilégié dans la communauté mathématique française (Gispert, 1991 et Zerner, 1994). Il a été mis en cause à deux reprises dans le livre de Pesloüan. La première, pour son livre

Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, accusé de proposer une présentation trop abstraite de l'analyse, encombrée d'une foule de détails dont les élèves ne comprennent ni le sens ni la portée. Plus loin Tannery est accusé de participer à une mystification du public, lui faisant croire à tort que, dans l'enseignement des facultés, tout l'effort est porté sur la pratique.

Dans sa recension, Tannery place à son tour le débat sur le terrain de l'enseignement secondaire. Il reproche à Pesloüan de laisser croire que le livre de Laurent où ceux de Couturat aient pu avoir la moindre influence sur l'enseignement, affirmant que « ce n'est pas dans les lycées français que les professeurs passeront leur temps à cette subtile analyse [des principes] » (Tannery, 1912, pp. 78) [15].

« MATHEMATIQUES MODERNES » ET ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Les articles de Pesloüan ne sont pas que des textes de circonstance provoqués par la parution des livres de Laurent, Couturat et par la controverse avec Poincaré. D'autres raisons liées à l'enseignement secondaire justifient plus probablement leur publication et leur positionnement qui hésite entre critique outrancière et conservatisme modéré. Les craintes qu'ils expriment permettent de mieux comprendre le contexte dans lequel ils ont été écrits.

Une peur fantasmée : un monde logisticien

Rien ne permet d'étayer les craintes d'une survenue de ce monde logisticien redouté par l'ingénieur retraité mais Pesloüan l'évoque car il existe en effet un lectorat réceptif à ces craintes.

La réforme de 1902 de l'enseignement secondaire, d'inspiration positiviste, a augmenté significativement la part des sciences dans les programmes, et placé l'enseignement scientifique, notamment les mathématiques, sous le signe du concret (Belhoste, 1995). Cette orientation nouvelle a suscité des rejets dans certains milieux, d'autant plus qu'accède ensuite au pouvoir une majorité dominée par les radicaux et les radicaux-socialistes. Le ministre de l'Instruction Publique, Joseph Chaumié, fait voter une loi destinée à combattre l'enseignement congréganiste, loi qui touche aussi les institutions privées laïques. Pour certains, c'est une remise en cause de la Loi Falloux qui organisait depuis 1850 la liberté d'enseignement. Voici par exemple ce qu'écrit Adolphe Legorju, Secrétaire Général de la Société Nationale d'Éducation de Lyon pour qui il existe une relation étroite entre la loi Chaumié et la mise en application des nouveaux programmes dans l'enseignement secondaire :

Après un demi-siècle de monopole suivi d'un demi-siècle de liberté, voici que le droit d'enseigner est à nouveau remis en question. Après un demi-siècle d'éducation libérale, voici que l'utilitarisme semble prévaloir comme principe d'éducation. On se demande si la Révolution s'est faite au nom de la Liberté ou au nom du Socialisme. (Legorju, 1905, pp. 51)

L'une et l'autre participent, selon Legorju, d'une volonté d'assujettissement de l'individu à la société : pour leurs promoteurs, l'enfant appartient d'abord à la société. Parmi les inspirateurs de cette politique, il cite le philosophe, logicien et économiste britannique John Stuart Mill, le parrain de Russell. Mill nous ramène ainsi à Russell et Couturat.

Les propos polémiques de Legorju qui ne craint pas de manier l'amalgame sont à situer dans le contexte des violents débats politiques de l'époque sur les questions d'enseignement. Destinés à mobiliser l'opinion, ils n'hésitent pas à attiser les craintes de leurs partisans. Les articles de Pesloïan se font ainsi l'écho de la peur que les réformes en cours dans le système d'éducation ne préparent de profonds changements sociétaux.

Une réalité : des tentatives « d'enseignement logique » des mathématiques dans le secondaire

Dans son livre Pesloïan distingue logistique et système logique. Il appelle système logique un système de reconstruction logique des mathématiques. Le livre de Laurent en est sans doute pour lui l'exemple le plus caricatural mais, à un degré moindre, la construction de l'analyse sur le nombre entier proposée par Tannery dans son *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable* en est un autre. Et si, rien ne permet de supposer l'existence d'une quelconque tentative d'enseignement de la logistique, il n'en est pas de même avec les systèmes logiques. C'est bien ce que semble nous indiquer l'extrait suivant du discours de Louis Liard.

Le philosophe Louis Liard, vice-recteur de l'Académie de Paris, est l'un des principaux instigateurs de la réforme de 1902. Les programmes de mathématiques qui ont été élaborés sans consultation des enseignants vont faire l'objet de critiques de la part de ces derniers (Belhoste 1995). Des conférences sont alors organisées pour les professeurs des lycées parisiens. Dans son discours d'ouverture aux conférences Liard déclare :

On dit que depuis une vingtaine d'années les mathématiques subissent une crise d'idéalisme transcendantal. [...] Mais ce qui est à sa place dans l'enseignement supérieur ne l'est pas dans l'enseignement secondaire. Or on m'assure que là, sous l'influence des plus hautes spéculations, il s'est introduit, depuis quelques années, des façons qui ne seraient pas sans péril. Ne perdons pas de vue que, dans nos classes, il s'agit de former, non des candidats à la section de géométrie de l'Académie des Sciences, mais des esprits clairs, voyant juste, raisonnant juste. (Liard, 1904, pp. VIII).

En 1906, Raoul Bricard, rédacteur de la revue *Nouvelles Annales de Mathématiques* et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, fait écho aux propos de Liard:

L'enseignement des mathématiques élémentaires subit en ce moment une crise profonde. Les progrès de la philosophie des mathématiques ont bouleversé les idées traditionnelles sur les fondements de la Science, et l'influence des doctrines nouvelles se fait de plus en plus sentir sur les méthodes d'exposition. C'est ainsi que la notion d'ensemble [...] tend à

devenir, didactiquement comme philosophiquement, le fondement même des mathématiques. (Bricard, 1906, pp. 511)

Des professeurs du secondaire ont sans conteste introduit dans leur enseignement des façons de faire, des définitions puisées dans un de ces systèmes logiques dont parlait Peslouan. Cet état de fait, sous-entendu par Liard et pointé par Bricard, permet peut-être de mieux comprendre certains passages de la conférence de Poincaré à qui Liard passait la parole en 1904. Le sujet de la conférence était : « Les définitions générales en mathématiques ». Poincaré y critiquait notamment certaines définitions ne figurant alors dans aucun programme du secondaire.

En arithmétique, Poincaré prenait l'exemple des fractions. Enseignées à l'école primaire à l'aide des partages, une fraction devenait, disait-il, à l'École Normale Supérieure, un ensemble de deux nombres entiers séparés par un trait horizontal sur lesquels on définissait par convention des opérations. Il concluait, à propos des définitions possibles d'une fraction : « Quant aux définitions plus subtiles, à celles qui sont purement arithmétiques, il faut les abandonner à l'enseignement supérieur, s'il en veut » (Poincaré, 1904, pp. 15). Cet exemple de la définition des fractions choisi par Poincaré correspond à un sujet fréquemment discuté à cette période. Dans son livre d'arithmétique pour la classe de mathématiques élémentaires, Tannery avait proposé, en complément de la définition concrète des fractions, cette même définition purement arithmétique (Tannery, 1894) qu'il enseignait à l'École Normale Supérieure. En 1899, Robert de Montessus, professeur de mathématiques dans un collège des Jésuites, proposait lui aussi une introduction logique des fractions dans la revue *L'Enseignement mathématique* (Montessus, 1899). S'il ne la destinait pas à tous les élèves de mathématiques élémentaires, il pensait profitable d'en faire un complément de cours pour les meilleurs élèves et conseillait leur introduction en deuxième année de mathématiques élémentaires. Dans la même revue, en 1904, un professeur de Genève, C. Cailler, proposait de définir les fractions comme des opérateurs, méthode qu'il disait avoir utilisée dans le secondaire (Cailler, 1904). Et c'est à l'occasion de la recension d'un ouvrage qui proposait une définition purement arithmétique des fractions que Bricard évoquait cette crise de l'enseignement des mathématiques élémentaires.

Une autre question d'arithmétique fréquemment discutée durant cette période est celle de la définition des nombres irrationnels. Poincaré indiquait qu'il fallait définir les nombres incommensurables en partant des longueurs. Dans le même livre d'arithmétique, Tannery définissait les irrationnels par la méthode des coupures de Dedekind. Le chapitre était signalé comme hors programme mais, selon l'auteur, les efforts nécessaires pour comprendre cette construction n'étaient pas « au-dessus de la portée d'un bon élève de la classe de mathématiques élémentaires » (Tannery, 1894, pp. VII). Le *Traité d'Arithmétique* de Eugène Humbert, publié un an auparavant, destiné lui aussi aux élèves de mathématiques élémentaires, définissait déjà les irrationnels comme limites de suites convergentes (Humbert, 1893). C'est aussi l'exemple de la définition des irrationnels que prendra Couturat lorsqu'il écrira :

Il semble qu'on se soit trop hâté (par un souci de rigueur logique qui fait honneur à la conscience des professeurs) d'introduire dans l'enseignement élémentaire des lycées des théories un peu trop abstraites et subtiles. (Couturat, 1916, pp. 880) [16]

Et c'est toujours à propos des irrationnels que Émile Picard rappellera la critique suivante faite à Tannery :

On a parfois reproché à Tannery d'avoir exercé une mauvaise influence sur l'enseignement des mathématiques spéciales. Certes, il a pu arriver qu'un normalien, à sa sortie de l'École, ait voulu montrer les abîmes que cachait la notion de nombre incommensurable à de jeunes lycéens. (Picard, 1925, pp. XVIII)

Enfin, quittant le champ de l'arithmétique mais restant dans celui de l'arithmétisation de l'analyse, nous terminerons par la définition de l'intégrale définie à laquelle Poincaré consacre un passage de sa conférence. Selon lui, elle doit être définie comme une surface. Comparant les définitions des mathématiciens de l'époque à celles de « leurs pères », il écrit :

Et alors, pour définir une intégrale, nous prenons toutes sortes de précautions : nous distinguons les fonctions continues de celles qui sont discontinues, celles qui ont des dérivées de celles qui n'en ont pas. Tout cela a sa place dans l'enseignement des Facultés ; tout cela serait détestable dans les lycées. (Poincaré, 1904, pp. 23)

Or, dès la fin des années 1880, des manuels destinés aux élèves de la classe de mathématiques spéciales donnaient la définition de Riemann de l'intégrale définie [17]. En réaction contre ces introductions, le programme du concours d'admission à l'École Polytechnique précisait en 1895 que la notion d'intégrale définie devait être fondée sur la notion d'aire. Cette notion sera supprimée au concours de 1897. À la suite de cette suppression, Maurice Fouché, professeur au collège Sainte Barbe, proposera, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, une définition de l'intégrale définie basée sur la considération des ensembles en s'appuyant sur les travaux de Tannery sur les incommensurables (Fouché, 1896).

Nous avons beaucoup évoqué Tannery. Son influence sur les professeurs de lycée était considérable en raison de sa position institutionnelle [18]. Ses textes, et en particulier son arithmétique, sont fréquemment cités par des professeurs du secondaire. Mais comment discerner les signes de cet « enseignement logique » dans la pratique même de ces enseignants ? Les rapports d'inspection, bien que souvent peu diserts sur le déroulement d'une leçon, font partie des sources qui peuvent nous y aider. Ainsi, lorsqu'on lit que tel professeur « a l'esprit philosophique », que l'inspecteur craint que le cours d'un autre « ne soit un peu trop savant », ou qu'un troisième ne propose « des démonstrations trop philosophiques » on peut se demander s'il n'est pas question d'un de ces « enseignements logiques » [19].

CONCLUSION

Faut-il croire Tannery quand il écrit que le livre de Laurent n'a pas eu d'influence sur l'enseignement secondaire ? Sa position institutionnelle donne un indiscutable crédit à

ses propos. La critique de ce « système logique » par Pesloüan est à replacer, comme celle de la logistique, dans le contexte politique et social de l'époque marquée par d'importantes réformes du système éducatif. Mais, en citant le nom de Tannery, Pesloüan a désigné l'un des acteurs majeurs de la formation des professeurs de lycée. Diffuseur de théories nouvelles, particulièrement celles issues de l'école allemande [20], on peut légitimement supposer que de jeunes normaliens aient eu envie, comme le rappelait Picard, de faire partager à leurs élèves quelques uns des principes qu'il leur enseignait. Cependant, dans la formation des professeurs, d'autres jeunes mathématiciens rompus à ces « mathématiques modernes » intervenaient. Citons notamment Émile Borel, maître de conférences à l'École Normale Supérieure et Jacques Hadamard professeur adjoint à la Sorbonne.

Enfin, suivant en cela Pesloüan, cet article s'occupe essentiellement d'arithmétique. Le sujet est débattu, nous l'avons vu, dans les revues de l'époque, mais le nombre d'articles consacrés à l'arithmétique reste très inférieur à celui des articles se rapportant à la géométrie. Ceci est particulièrement vrai après les modifications de programmes de 1905 et les expériences pédagogiques inspirées par la géométrie de Méray [21].

C'est bien tout le champ de l'enseignement des mathématiques qui est touché par une volonté de modernisation qui trouve en partie son origine dans les découvertes théoriques du XIX^e siècle. Les réactions de Pesloüan à cette modernité, réelle ou fantasmée, ne sont qu'un exemple de ces oppositions qui mériteraient d'être mieux connues.

NOTES

[1] Pour ce paragraphe, voir en particulier : Rivenc et Rouilhan 1992, Vernant 2003, Belna 2005.

[2] Par exemple, le raisonnement : Si « F est le fils de P » alors « P est le père de F » ne peut être réduit à une succession de syllogismes.

[3] Dans l'arithmétique de Russell, un nombre cardinal est une classe de classes équivalentes, c'est-à-dire entre lesquelles on peut établir une relation biuniforme (une bijection en termes actuels), 0 étant la classe qui comprend la seule classe nulle (l'ensemble vide).

[4] Peano ne se situait pas dans le projet logiciste. Il avait inventé ce langage symbolique afin de réécrire les mathématiques sans utiliser les langues traditionnelles. Un exemple d'emploi de ce langage est donné plus loin.

[5] Cette controverse, son histoire, les problèmes philosophiques et mathématiques qu'elle soulève, a suscité et suscite encore de nombreuses études. Voir par exemple les actes du colloque *Louis Couturat... de Leibniz à Russell...* (1983), Heinzmann (1994), Schmid (2006), Le but de ce paragraphe est simplement de signaler, parmi les points essentiels de la controverse, ceux qui fourniront la trame de la critique de Pesloüan.

[6] Dans sa réponse Couturat en donne ce qu'il appelle une traduction verbale: « 1 est le type d'ordre des classes ordonnées dont le nombre cardinal est un » (Couturat, 1906b, pp. 227).

[7] Pesloüan poursuivra cependant des recherches mathématiques en dehors de tout cadre institutionnel, faisant publier en 1920 deux notes d'Analyse mathématique dans les *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*.

[8] On pourra à ce sujet consulter le *Bulletin de l'Amitié Charles Péguy*, n° 45. Dans le chapitre III de son livre où il critique la « suprématie » des mathématiques dans l'enseignement, en particulier celui de l'histoire, Pesloüan dépeint son travail comme une contribution aux idées de Péguy. A propos de Barrès, signalons qu'il participera en 1929 à la publication du livre : *Le dernier projet littéraire de Maurice Barrès, Descartes et la princesse Élisabeth*, Paris, Champion.

[9] Rappelons qu'à cette époque les établissements secondaires sous la tutelle de l'Église Catholique regroupent environ 90 000 élèves, contre 86 000 dans les collèges et lycées de l'enseignement public et 9 000 pour les établissements de « l'enseignement libre » laïque.

[10] En ce début du XXe siècle, le collège public est un établissement secondaire qui peut dispenser les mêmes enseignements que le lycée mais, plus souvent, une partie seulement de ces enseignements. A la différence du lycée il est financièrement à la charge des communes pour les locaux et le traitement des personnels mais reste cependant sous l'autorité de l'état.

[11] Cette seconde édition du texte de Couturat par la Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, en 1980, est une reprise intégrale du texte de la première édition.

[12] La revue américaine *The Journal of Philosophy, Psychology and Scientific Methods* propose une brève recension des articles en janvier 1908. Elle donne aussi un compte rendu du livre. Le philosophe italien Benedetto Croce signale le livre dans sa revue *La Critica*, en 1910. Le philosophe Georges Sorel, qui avait recommandé le livre à Croce, le cite aussi dans son article « Vues sur les problèmes de la Philosophie » paru dans la *Revue de Métaphysique et de Morale* en 1910.

[13] Par exemple, dans la dernière lettre, il insère un long paragraphe dans lequel il soutient que la logistique a de fortes attaches avec des courants de pensée de « l'École » (comprendre l'École Normale Supérieure).

[14] Il est fréquent de trouver dans diverses revues de l'époque les brèves recensions signées des initiales de l'auteur. Aucun collaborateur de la *Revue de Philosophie* n'ayant ces initiales, on ne peut éviter de penser à Henri Poincaré, d'autant plus que certains passages sont proches par le ton et les propos des articles de Poincaré sur la logistique. On ne connaît cependant pas d'autre recension de la main de Poincaré.

[15] Le texte cité ici est extrait de l'ouvrage posthume de Tannery, *Science et Philosophie*, qui réunit ses écrits concernant la philosophie des science, publiés dans diverses revues.

[16] Il s'agit d'un article posthume de Couturat. Nous ne disposons pas de plus d'information sur la date à laquelle il a été écrit.

[17] Citons notamment : Niewenglowski, B. (1889). *Cours d'Algèbre*, Paris, Armand Colin et Pruvost, E., Pieron, D. (1893). *Leçons d'Algèbre*, Paris, Paul Dupont (Pruvost était Inspecteur Général de l'Instruction publique et Piéron Inspecteur de l'Académie de Paris).

[18] En 1903, au moins 1/3 des professeurs de lycée étaient d'anciens élèves de tannery.

[19] Ces quelques exemples ont été obtenus en consultant une dizaine de dossiers de carrière pris parmi ceux d'anciens élèves de l'École Normale Supérieure ayant obtenu leur agrégation entre 1884 et 1902. Sources : Archives Nationales, respectivement dossiers : F/17/24520, F/17/24512 et F/17/24899

[20] Quand Laurent répond à une critique de Tannery sur sa définition du nombre, il écrit qu'il souhaiterait un jour faire une critique des « méthodes allemandes » (Laurent, 1898).

[21] Au sujet de l'enseignement de la géométrie au tournant du XX^e siècle on pourra notamment consulter Bkouche (1991), Belhoste, Gispert et Hulin (1996), d'Enfert et Gispert (2010). On pourra aussi lire, par exemple, l'article de Marotte (1907), Les Nouveaux Éléments de Géométrie de M. C. Méray, *La Revue de l'Enseignement des Sciences*, 10, 359-367, dans lequel Marotte qualifie Méray de logicien et son livre d'une arithmétisation de la géométrie qu'il apparente aux travaux de Hilbert.

REFERENCES

- Belhoste, B. (1995). *Les sciences dans l'enseignement secondaire français. Textes officiels. Tome I: 1789-1914*. Paris: Economica.
- Belhoste, B., Gispert, H. & Hulin N. (1996). *Les Sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*. Paris: Vuibert-INRP.
- Belna, J.P. (2005). *Histoire de la logique*, Paris, Ellipses.
- Bkouche, R. (1991). Variations autour de la réforme de 1902-1905. *Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences*, 34, 181-213.
- Boniface, J. (2002). *Les constructions des nombres réels dans le mouvement d'arithmétisation de l'analyse*. Paris: Ellipses.
- Bricard, R. (1906). Les nombres positifs, exposé des théories modernes de l'Arithmétique élémentaire par M. Stuyvaert, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4^e série, 6, 511-514.
- Cailler, C. (1904). Une leçon sur la théorie élémentaire des fractions. *L'Enseignement Mathématique*, 6, 25-39.
- Couturat, L. (1906a). Pour la logistique. *Revue de Métaphysique et de Morale*, 14, 208-250.
- Couturat, L. (1906b). La logique et la philosophie contemporaine. *Revue de Métaphysique et de Morale*, 14, 318-341.
- Couturat, L. (1980). *L'Algèbre de la Logique*. Paris : Blanchard.
- Couturat, L. (1916). De l'abus de l'intuition dans l'enseignement mathématique. *Revue de Métaphysique et de Morale*, 23, 879-884.
- Dugac, P. (1984). Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1874-1886), *Cahier du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 5, 49-285.

- d'Enfert, R., Gispert, H. (2010). L'enseignement mathématique dans le primaire et le secondaire. *Une histoire de l'école. Anthologie de l'éducation et de l'enseignement en France XVIII^e-XX^e siècle*. Jacquet-Francillin, F., d'Enfert, R., Loeffel, L. (dir.), 333-341. Paris: Retz.
- Fouché, M. (1896). Sur la définition de l'intégrale définie, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3^e série, 15, 207-215.
- Gispert, H. (1991). La société mathématique de France (1872-1914) *Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences*, 34, 11-180.
- Gispert, H. (1995). La théorie des ensembles en France avant la crise de 1905 : Baire, Borel, Lebesgue ... et tous les autres. *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 1, 39-81.
- Heinzmann, G. (1994). On the controversy between Poincaré and Russell, about the status of complete induction, *Epistemologia*, 17, 35-52.
- Humbert, E. (1893). *Traité d'Arithmétique*. Paris: Vuibert.
- H.P. (1909). C. Lucas de Pesloüan. Les systèmes logiques et la logistique. *Revue de Philosophie*, 15, 454-457.
- Laurent, H. (1898). A propos de la définition du nombre. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3^e série, 17, 277-280.
- Laurent, H. (1902). *Sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres et de la géométrie*. Paris: Scientia.
- Légorju, A. (1905). La Crise de l'Enseignement secondaire, l'éducation et le droit social. *Annales de la Société Nationale d'Éducation de Lyon*, 47-461, Lyon, Rey & C^{ie}.
- Liard, L. (1904). Les sciences dans l'enseignement secondaire. *Conférences du Musée pédagogique, 1904. L'enseignement des sciences mathématiques et des sciences physiques*, Paris, Imprimerie Nationale, pp. I-XIV.
- Louis Couturat... de Leibniz à Russell... (1983). Paris: Presse de l'École Normale Supérieure.
- Montessus (de), R. (1899). Les fondements de l'Arithmétique moderne. *L'Enseignement Mathématique*, 1, 185-194.
- Pesloüan (Lucas de), C. (1907a). Sur les fondements de l'arithmétique et autres questions connexes. *Revue de Philosophie*, 10, 372-397, 488-509, 568-592.
- Pesloüan (Lucas de), C. (1907b). Sur les fondements de l'arithmétique et autres questions connexes. *Revue de Philosophie*, 11, 182-206.
- Pesloüan (Lucas de), C. (1909). *Les systèmes logiques et la logistique*. Paris: Marcel Rivière.

- Picard, E. (1925). *La vie et l'œuvre de Jules Tannery, membre de l'Académie, lecture faite dans la séance publique annuelle du 14 décembre 1925*, http://www.academie-sciences.fr/activite/archive/dossiers/Picard/Picard_pdf/Picard_Tannery.pdf
- Poincaré, H. (1904). Les définitions générales en mathématiques. *Conférences du Musée pédagogique, 1904. L'enseignement des sciences mathématiques et des sciences physiques*. Paris: Imprimerie Nationale, pp. 1-28.
- Poincaré, H. (1905). Les Mathématiques et la Logique. *Revue de Métaphysique et de Morale*, 13, 815-835.
- Rivenc, F., Rouilhan, P. (1992). *Logique et fondements des mathématiques. Anthologie (1850-1914)*. Paris, Payot.
- Schmid, A-F. (2006). *La démonstration*, Philopsis, http://www.philopsis.fr/IMG/pdf_demonstration_schmid-2.pdf
- Tannery, J. (1894). *Leçons d'Arithmétique théorique et pratique*. Paris: Armand Colin.
- Tannery, J. (1912). *Science et Philosophie*. Paris: Alcan.
- Vernant, D. (2003). *Bertrand Russell*. Paris: Flammarion.
- Zerner, M. (1986). La transformation des traités français d'analyse (1870-1914), <https://hal-unice.archives-ouvertes.fr/hal-00347740/fr/>