

HOW TO INTEGRATE HISTORY OF MATHEMATICS INTO MATHEMATICS TEXTBOOKS: Case Study of Junior High School Textbooks in China and France

数学史怎样融入数学教材：以中、法初中数学教材为例*

Shuping PU 蒲淑萍 & Xiao-qin WANG 汪晓勤

(华东师范大学数学系, 上海 200241)

ABSTRACT

构建分析框架, 比较中、法两国初中数学教材对数学史的使用情况, 发现数学史已进入我国教材正文的各个环节, 数学历史名题的“复制式”与“顺应式”使用做到了联系学生实际。而对于符合学生认知需要的“重构式”融入, 相比于法国教材却有明显不足。建议数学史专家应成为教材编写专家团队成员; 史料呈现多种方式并举; 数学史应成为衡量教材质量的一个维度。

Keywords: 关键词: 数学教材; 数学史; 融入方式; 重构式; 比较研究

一、研究背景与问题

数学史具有重要的教学价值, 已得到理论与实践两个层面的普遍认同。然而在实践教学中, 却出现了史料及意识的“无米之炊”以及对数学史“高评价, 低利用”的现象。教材中运用数学史可直接为教学提供史料素材, 改变“无米之炊”的现状; 而以何种方式呈现将决定数学史的使用水平, 对数学教育目标的达成具有重要影响。数学史进入数学课程有显性和隐性两种形式 [1], 而尤以隐形融入为瓶颈。一些学者认为我国教材对数学史的处理方式, 因存在简单化倾向, 即对数学史料理解单一、内容选择单一、史料编排形式单一等不足, 使得数学史内容未能真正“融入”教材, 数学史料和教学主题与内容之间在形式及本质上仍处于分离状态。[2-3] 另外, 因教师认识水平等因素, 数学史在教学中常处于低水平使用、甚至被忽略的状态。数学史激发学习兴趣、帮助学生深入理解数学本质等多重资源价值与教学功能未能得到充分发挥。新课程的深入实施, 使得数学史融入数学教材成为一个倍受关注、颇有争议并富于挑战意义的课题。

数学史融入数学教材的“正文”[4-5]的“各个环节”[6]已成为理论研究与实践需要的共同呼声。如今, 新课程实施已逾 10 年, 我国教材亦几经改进, 教材中的数学史使用情况如何? 怎样的方式融入教材才能更好地发挥数学史的多重价值与功能? 扎根本土, 深入分析我国教材已有做法的成功与不足之处, 学习借鉴他国长处不失为一条客观、有效的途径。本研究将在比较、分析中国与法国初中数学教材运用数学史的内容、方式和水平的基础上, 探讨为什么要对数学史内容进行重构、怎样重构等问题。期望能对数学史素材在教材中的融入提供思路借鉴和内容参照。

二、中、法初中数学教材运用数学史情况及分析

本研究中, 我们选取了中国人教版教材 6 年级上册-9 年级下册 [7] (鉴于我国多把 6 年级作为初中预备班的事实) 以及法国初中数学教材 Maths (Nouveau programme)3-6 [8], 根据我们对两国教材内容的统计、

*基金项目: 国家社会科学基金“十一五”规划 2010 年度教育学重点课题“主要国家高中数学教材比较研究”(ADA100009)子课题九之部分研究成果。作者简介: 蒲淑萍 (1971-), 华东师范大学数学系博士研究生, 主要从事数学史与数学教育研究。汪晓勤 (1966-), 华东师范大学数学系教授, 博士生导师, 主要从事数学史与数学教育研究。

比对，涉及知识点吻合度近 90%，具有可比性。在对中、法两国初中数学教材中的数学史成分进行梳理的基础上，重点关注两个方面：1) 中、法两国初中数学教材的数学史内容及各自特色；2) 两国教材中数学史的呈现方式与使用水平。

(一) 我们的发现

通过对两国初中数学教材进行汇总整理、分类分析，我们发现中、法两国初中数学教材中的数学史料具有如下特征：

- 1) 两国都重视数学史在教材中的作用，使用数量较多：中国为 93 处，法国为 108 处；
- 2) 两国教材共有的特征是对某些数学史内容的集中使用以及在某些知识点上数学史相对集中。如“几何代数方法”在两国教材中都得到充分利用；使用数学史内容相对集中的章节有“勾股定理”、“方程”、“不等式”等；
- 3) 鲜明的民族特色。两国教材虽都注意吸收了世界范围内的数学史素材，然而，史料内容多以本国为主，如，我国教材对中国古代问题的大量使用，法国教材对法国本土古代数学史料的使用；
- 4) 从使用的史料所涉范围来讲，法国的史料内容视角更宽，史料来源也更广泛，对相应知识点融合了世界多个国家和地区数学史料；而中国教材的史料内容及来源略显单薄。

(二) 运用方式的分类与分析

为获得对中、法两国初中数学教材数学史的呈现方式和使用水平的认识，本文选用作者之一汪晓勤教授建立的分析框架。该框架的分类方式按数学史与数学知识的关联程度，将数学教材运用数学史的方式分成五类：点缀式、附加式、复制式、顺应式、重构式。显然，这五种类型在数学史的使用水平上成逐步递升的趋势，笔者将 5 种类型对应水平分别记作：A、B、C、D、E 五个层次。可以看到，前面两类数学史独立于教材正文内容以外，而后三类则是将数学史融入教材正文。具体分类、水平及判定标准如表 3 所示：

类别	水平	描述
点缀式	A	孤立的图片，如数学家画像、数学图案、反映数学主题的绘画或摄影作品等
附加式	B	文字阅读材料，包括数学家生平、数学概念、符号、思想的源泉、历史上的数学问题、思想方法等
复制式	C	正文各栏目中直接采用历史上的数学问题、问题解法、定理证法等
顺应式	D	正文各栏目中对历史上数学问题进行改编，使之具有适合于今日课堂教学的情境或属性
重构式	E	正文各栏目中借鉴或重构知识的发生、发展历史，以发生法来呈现知识

数学教材运用数学史的五种方式及水平

依据该表所列分类、水平及标准，我们对两国教材中的数学史进行定量统计与定性分析。

(1.) 中法两国数学教材中的数学史各类所占比重

按照表 1、表 2 所列结果，两国初中数学教材中的史料内容所占比重如下图 1，2：从统计图中可以看到：

- 1) 五种分类方式涵盖了两国教材数学史的使用情况 (所占比例如上图所示)；
- 2) 数学史都已经进入了两国教材的“正文”（复制式、顺应式和重构式），中国人教版教材占到了 41%；法国教材占到了 49%；
- 3) 在使用形式上，“附加式”是两国教材中史料的主要形式，都超过了使用量的半数；

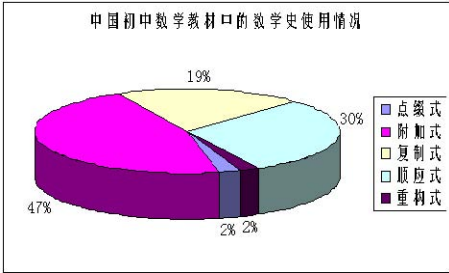


图 1

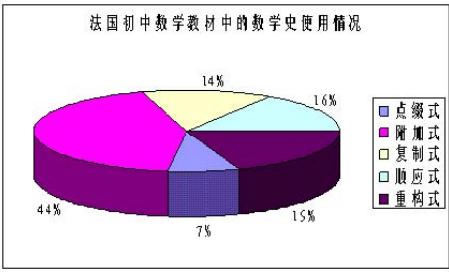


图 2

- 4) 两国差别较大的是顺应式与重构式两种方式，尤其后者差别明显；
- 5) 法国教材对数学史料在各个层次上的使用相对更均衡。

(2.) 中国教材在数学史融入方面已取得的进步

1) 数学史已进入我国人教版教材正文的各个环节

我们将两个国家教材使用数学史的情况放在一起进行对照，如图 3 中表格。从图表中可以看到，我国教材中进入正文的史料内容多以直接搬用古代数学名题的“复制式”，或者新瓶装老酒，以历史名题为模板，将情境或属性换成学生熟悉的现代场景的“顺应式”为主。对数学史教材进入正文的环节多集中在“题目”——例题和习题上。

2) 对史料的使用体现了新课程理念，符合学生认知规律

“顺应式”实现了数学史内容的“古为今用”。结合学生经验等创设情境，对古代问题进行改编，或使内容和形式稍有变更，能使学生更好理解与接受。这体现了“内容的选择要贴近学生的实际，有利于学生体验和理解、思考与探索”的新课程理念 [9]。

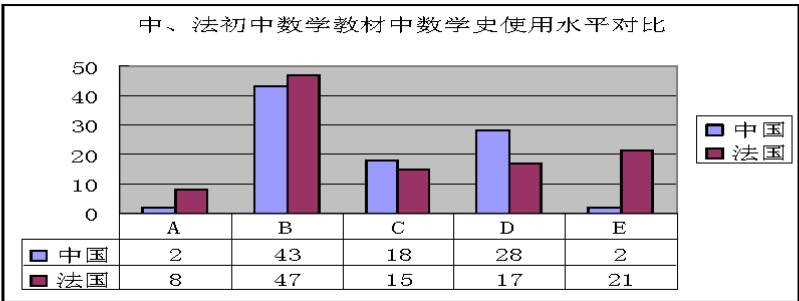


图 3

可以说，中国教材在数学史融入方面已经取得了长足的进步，然而存在的问题也是十分明显、突出的：史料使用水平较高形式的“重构式”内容所占比例相对不足，没有充分实现让学生从史学角度深刻理解数学本质的目的。

(3.) 中国教材在数学史融入方面已取得的进步

何为“重构式”？一般来讲，“重构式”数学史材料或出现于新概念的引入中，或隐含于某个知识点的整个脉络中，体现数学知识的历史形成过程。其优点是因遵循发生法，从而更符合学生的认识，更易于学生理解。如，代数学的发展经历了“修辞代数——缩略代数——符号代数”的演变过程，中、法两国教材都注意做到了间接地运用代数历史，进一步将学生从修辞代数引向符号代数，符合学生的认知。

两国教材对数学史料的使用方式，差别最大的就是“重构式”。中国教材“重构式”数学史料仅有 2 处，只占教材中使用数学史内容的 2%，而法国教材却在 103 处史料中的 21 处使用了“重构式”，占总数

的近 20%，是我国“重构式”史料使用量的 10 倍。“重构式”史料使用的严重不足，不能不说是我国教材一个很大的缺憾。相比之下，法国教材“重构式”史料不仅在量上要明显多于我国，而且在使用水平上也高于我国教材。

综合以上，我们认为，对史料进行隐性的“重构”融入教材是当今数学史融入数学教材应该重点关注的方面及努力的方向，而这也是数学史角度的教材编写面临的最大困难与瓶颈。

三、为什么要在教材中对数学史进行“重构”？

英国数学史家 John Fauvel 总结了应用数学史于数学教学的大致 15 条理由，其中包括：增加学生的学习动机；改变学生的数学观；历史发展有助于安排课程内容顺序；告诉学生概念如何发展，有助于他们对概念的理解；提供探究的机会，等等。[10] 如何实现以上目标？弗赖登塔尔（H. Freudenthal, 1905–1990）在《数学教育的主要问题》的报告中指出：“数学史是一个图式化不断演进的系统化的学习过程，儿童无需重蹈人类的历史，但他们也不可能从前人止步的地方开始。从某种意义上说，儿童应该重蹈历史，尽管不是实际发生的历史，而是倘若我们的祖先已经知道我们今天有幸知道的东西，将会发生的历史。”[11] 这提醒我们，教学中需要使用数学史，但不是原原本本地照搬数学史。我们须依据学生的数学现实，“重构”历史融于教材，这既是理论演绎的必然，也是实践需要的使然。为何需要对融入数学教材的史料进行“重构”，则涉及学生认知需要以及与之直接相关的教学需要的理论与实践两个层面。

（一）理论层面

（1.）历史发生原理

历史发生原理 (Historical-genetic-principle) 是指导对数学史进行“重构”的主要理论依据。该原理可以上溯到 18 世纪。法国实证主义哲学家、西方社会学创始人孔德 (A. Comte, 1798–1857) 认为：个体教育必然在其次第连续的重大阶段，仿效群体的教育。19 世纪，人们将德国生物学家海克尔 (E. Haeckel, 1843–1919) 所提出的生物发生学定律——“个体发育史重蹈种族发展史”运用于教育中，得出“个体知识的发生遵循人类知识发生的过程”，历史发生原理因此而形成。[12] 基于历史发生原理的相似性研究表明：学生对概念的理解与历史上该概念的历史发展具有相似性。因此，“知识的历史发展顺序符合学习心理的序进原则，符合个体的认知顺序，微观认识论是宏观认识论的具体而微。按照历史发展顺序编写教材能实现科学知识的序和学习心理的序的有机统一”。[13]

（2.）“再创造”理论

弗赖登塔尔认为存在两种数学，一种是现成的或已完成的数学，另一种是活动的或者创新的数学。完成的数学在人们面前以形式演绎的面目出现，它完全颠倒了数学的思维过程和实际创造过程，给予人们的是思维的结果；活动的数学则是数学家发现和创造数学的过程的真实体现，它表明了数学是一种艰难曲折又生动有趣的活动过程。弗赖登塔尔认为有效的学习要求每个学习者回溯所学学科历史演进的主要步骤。他反复强调：数学学习的唯一正确方法是实行“再创造”。“再创造”是“重构”数学主题的重要理论基础之一。[14]

（3.）发生教学法

发生教学法是一种借鉴历史、呈现知识自然发生过程、介于严格历史方法和严格演绎方法之间的一种方法，它关注主题的必要性和可接受性，要求在学生具备足够的学习动机、在学生心理发展的恰当时机教授该主题。这里，知识的自然发生过程不是历史过程的还原，而是历史知识的重构。

另外，发生教学法也得到了众多名家的重视与认同。英国哲学家、生物学家斯宾塞 (H. Spenser, 1820–1903) 认为：个体知识的发生必须遵循人类知识的发生过程。历史上的教育方法，有助于为我们今天的教育提供指南。德国教育家、思想家第斯多惠 (F. A. W. Diesterweg, 1790–1866) 认为：之所以需要

采用发生方法, 乃是因为这是所教学科兴起或进入人类意识的方式。德国数学家、数学教育家 F·克莱因 (F. Klein, 1849–1925) 认为: “发生教学法” 是自然的真正科学的教学方法; 美国数学家、数学教育家波利亚 (G. Polya, 1887–1985) 也曾说过: 在教一门科学分支 (理论、概念) 时, 我们应该让儿童重演人类心理演进的重大步骤。当然, 我们不应该让他重复过去一千零一个错误, 而只是重复重大步骤。波兰数学家托普利茨 (O. Toeplitz, 1881–1940): 发生法的本质是追溯一种思想的历史起源, 以寻求激发学习动机的最佳方式, 研究这种思想创始人所做工作的背景, 以寻求他试图回答的关键问题。纽约大学著名教授爱德华 (H. M. Edwards, 1936–) 认为: 发生法倾向于从一个 “虚构的” 视角来呈现历史。以上名家名言对于我们理解 “发生教学法” 提供了不同的视角, 对于如何实施发生教学法提供了可供参照的方法和路径。

(二) 实践层面

(1.) 为教师教学提供史学视角直接的素材与方案

很多的研究表明, 教师在教学中较少使用数学史, 主要原因在于缺乏 “直接能用的数学史”。表现在两个方面: 一是缺乏相应史料; 二是有史料, 却不知怎样使用。融入教材正文的数学史, 展现了融入教学的具体形式, 为教师设计教学提供了 “直接可用的数学史”, 解决了 “无米之炊” 的问题, 为教师使用史料素材进行教学设计提供了素材与方案。

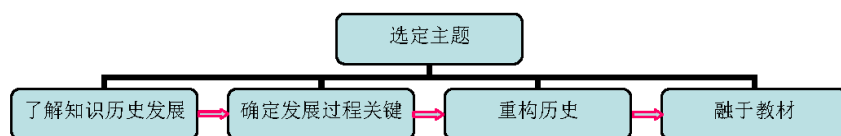
(2.) 改变以往低水平使用、甚至被忽略的状况, 发挥应有价值

在教材中 “重构式” 地使用数学史, 突破了仅仅满足于 “为历史而历史” 的附加式等对数学史料的浅表使用, 而是在一个较高的水平上无声地融入历史, 是对发生法的恰当运用。这样编写教材, 使得即使没有多少数学史素养的教师也能遵循知识形成过程的科学路径进行教学, 充分发挥了 “数学史是教学的指南” (Morris Kline, 1908–1992) 的作用。

四、“重构” 史料融入数学教材

(一) 如何重构

以发生教学法为参照, 对于选定主题, 我们可沿如下步骤 “重构” 历史融于教材: 首先需要了解主题的历史发展过程, 寻找并确定知识历史发展过程中的关键步骤与环节, 对知识的历史进行重构, 使其适合学生认知和课堂教学, 并设计一系列由易至难、环环相扣的问题。[15] 其具体步骤如下图所示:



在教材的编写过程中, 应组成一支以专职教材编写人员、数学史专家、数学教育专家、一线专家教师组成的研发团队, 选定教材的核心主题, 围绕相应内容, 如概念、公式、定理等, 开发研制数学史在教材中的 “重构式” 融入。为增强在实践中的可操作性, 我们还可以在融入教材前, 进行实践检验: 将设计方案拿到课堂进行试验, 根据教学反馈进一步修改、完善, 再入编教材”。需要重点指出的是, “重构式” 数学史料的研究, 数学史专家的力量是不可忽略的重要因素。[16]

(二) 哪些内容、哪些环节需要 “重构” 历史

我们知道无理数、负数、指数、对数、复数等许多重要概念都是经历了漫长的历史发展逐过程逐渐形成。在诸如此类的概念引入环节, 应以 “重构” 历史史料的方式为主, 展示概念在演进过程中的重要步骤, 把握知识发展脉络, 感受不断修正、完善的演进过程中古人的丰富智慧及所付出的艰辛与努力, 使学生在理解概念、公式及定理本质的同时, 培养他们勤奋、坚韧的学习品质。

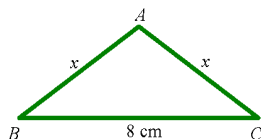


图4 周长问题之一

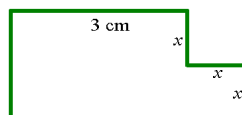


图5 周长问题之二

对待公式和定理，“证明一个定理还是探索一个定理”¹的态度反应了是将数学看作一个已经完成了、固定的数学知识体系，还是将数学看作一个动态的不断完善的演进过程两种截然不同的数学观。显然。后者才是我们的课程理念所倡导的。为展现数学的动态演进过程，我们可重构历史展示公式、定理的探索发现过程，如此可对学生掌握正确的学习方法以启迪，且能将逻辑推理还原为合情推理，将逻辑演绎追溯到归纳演绎；多种历史方法的展示能够体现不同时空数学家对同一课题的探求过程、多种不同文化的启发、育化作用，可以激励学生探索规律，发现定理，体验数学发现的成就与快乐。[6] 典型的例子如勾股定理、乘法公式、一元二次方程的公式求解等。

（三）学习借鉴：法国教材“重构式”的两个典型案例

他山之石可以攻玉，学习借鉴可为我们提供最为直接做法，在此介绍法国初中教材“重构式”数学史料两个案例：

《数学4》“不等式、序与运算”一章对不等式的处理遵循了发生法。在“方法”栏目中，一道应用题相当于已知 $145 \leq x \leq 155$ ，求 $1000 - 5x$ 的范围。“习题”栏目中有很多类似问题，如：

- 已知 $-3 < x < 5$ ，求 $2x + 4$ ， $\frac{x-2}{3}$ ， $\frac{7-3x}{8}$ 的范围；
- 已知 $4.5 < x < 4.6$ ，求图4中等腰三角形 ABC 周长的范围；
- 已知 $0.8 < x < 0.9$ ，求图5中多边形周长的范围。

在这些问题之后，设置了两道相反的问题，即已知 x 的一次多项式的范围，求 x 的范围。于是，一元一次不等式悄然出现，尽管其正式内容安排在下一册。这种由一次多项式所属区间的问题过渡到相反的问题（不等式），正如由多项式求值问题过渡到相反的问题（方程）一样，是对数学史的借鉴和重构，是对发生法的恰当运用。

另外法国教材在《数学3》“乘法公式与零积方程”一章的活动栏目引入了“零积方程”[17]概念——一边为两个一次因式乘积、一边为零的方程。据相关数学史料，零积方程先于因式分解法产生，正是零积方程导致了因式分解法的诞生。因此先于因式分解呈现“零积方程”既符合知识的历史发展顺序，也能符合学生的认知过程，使得“因式分解法”对于学生来说不再是“天上掉下的馅饼”，而找到了“生产馅饼”的作坊。

史料的“重构式”直接将概念等的历史发展融入数学教材，没有显性的历史素材，却在悄无声息中以最完美的方式体现数学史料所提供的思想、方法等，这应是数学教材使用数学史追求的最好境界。对此，郑毓信先生认为：“历史的理性重建”为彻底改变数学史向数学教学渗透方面所存在的“高评价、低应用”现象指明了可能的前进方向。[18]

五、思考与建议

以恰当的方式将数学史融入数学教材，还有许多需要有待进一步思考、完善的地方。对此我们的思考与建议是：

¹引自2011年5月“第四届数学史与数学教育国际研讨会”，国际数学教育委员会前秘书长、加拿大Laval大学B. R. Hodgson教授所做“作为教师教育组成部分的数学史与数学文化——F·克莱因《高观点下的初等数学》启发下的一些观点”报告内容。

(一) 教材编写与数学史融入数学教材的 5 种形式

融数学史于教材的 5 种方式：点缀式、附加式、复制式、顺应式、重构式，彼此只有使用水平上的差异，却无严格的孰优孰劣的区分。5 种方式各有所长，配合使用更能从不同层次、角度展示数学内容的历史发展及其教育价值。我们应根据所要达到的教育教学目标选择使用。另外，五种方式在使用的量和比例上应有所均衡，力戒只以点缀式、附加式、复制式等对数学史“为历史而历史”的浅层使用，增加促进学生认知发展的复制式、顺应式和重构式的“为教育而历史”的融入使用。

(二) 数学史专家应成为教材编写的团队成员

“重构式”需要对史料进行艰苦的再创造，非一人之力所能为，故而建议教材编写的专家团队，除专职编写人员、数学家、数学教育家外，还应吸纳数学史专家加入进来。这样的编写团队构成更加合理，力量更加雄厚。他们能对应融入教材的数学史内容在总体上进行统筹规划，注意做到前后同类知识使用史料的连续性，并就具体史料内容及其深度和范围、融入方式等进行充分论证，使得教材中数学史料的呈现更为科学合理，更加符合学生的认知、方便教师的教学。

(三) 数学史对教材编写的评价作用探讨

数学史视角的教材编写能够按照历史演进顺序呈现知识，数学史理应成为教材编写质量好坏的一个衡量指标²。因为“对孩子的教育在方式和顺序上都必须符合历史上人类的教育，换言之，个体知识的发生必遵循人类知识的发生过程。”[19] 参照了知识的历史发展顺序的教材编写更加符合学生的认知过程与认知规律。

REFERENCES

- 汪晓勤, 张小明. HPM 的实践和若干思考 [J]. 中学数学教学参考, 2006, (12):117-120.
- 张生春. 数学史与数学课程融合的现状分析 [J]. 数学通报, 2008, 47(5):15-17.
- 张生春. 数学史与数学课程融合的现状分析 [J]. 数学通报, 2008, 47(5):15-17.
- 王振辉, 汪晓勤. 数学史如何融入中学数学教材 [J]. 数学通报, 2003, (9):18-21.
- 李红婷, 课改新视域: 数学史走进新课程 [J]. 课程·教材·教法, 2005, 25(9):51-54.
- 李明振, 庞坤. 数学史融入中学数学教材的原则、方式与问题 [J]. 数学通报, 2006, 45(3):23-25.
- 课程教材研究所等. 义务教育课程标准实验教科书数学 6 年级 [M]. 北京: 人民教育出版社, 2005.
- Ancel-Lepesqueur, C. et al. Math (3e-6e) [M]. Paris: Belin, 2007.
- 教育部. 全日制义务教育数学课程标准 [S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2011:2.
- Fauvel, J. Using History in Mathematics Education[J]. For the Learning of Mathematics, 1991, 11(2): 3-6.
- H Freudenthal. Major Problems of Mathematics Education[J]. Educational Studies in Mathematic, 1981, (5):133-150.
- H Freudenthal. Major Problems of Mathematics Education[J]. Educational Studies in Mathematic, 1981, (5):133-150.
- 徐章韬, 梅全雄. HPM 视角下的数学教材编写 [J]. 数学教育学报, 2009, 18(3):14-17.
- 弗赖登塔尔. 作为教育任务的数学 [M]. 陈昌平, 唐瑞芬译. 上海: 上海教育出版社, 1995.
- 弗赖登塔尔. 作为教育任务的数学 [M]. 陈昌平, 唐瑞芬译. 上海: 上海教育出版社, 1995.
- 王青建, 陈洪鹏. 《数学课程标准》中的数学史及数学文化 [J]. 大连教育学院学报, 2009, 25(4):40-42.

²引自 2011 年 5 月“第四届数学史与数学教育国际研讨会”上, 我国数学教育家张奠宙教授所做“关于中国 HPM 开展研究活动的几点思考”报告内容。

- 蒲淑萍, 汪晓勤. 法国数学教材中的“乘法公式和零积方程” [J]. 数学教学, 2011, (10):7–10.
- 郑毓信, 郑玮. 从 HPTM 到 HPTS[J]. 全球教育展望, 2007(10): 82–87.
- Spencer H. Education: Intellectual, Moral, & Physical [M]. New York: Hurst & Company, 1862, 123–125.