ON THE EIGENVALUES OF THREE BODY IN EARLY 20th CENTURY

20세기초의 삼체문제에서 고유치에 관해서

LEE Ho-Joong

Inviting Professor in Hong Ik University Institution
: 94 Wausan-ro, Mapo-Gu, Seoul, 121–791,
mannnlee@hanmail.net

ABSTRACT

In the past 200 years, three body problem in classical approaches have been applied to Lagrangian and Hamiltonian. In the resolution of the three body problem more general representative of the way there is the statistical methods and the perturbation methods, here assume the foundation of resolution by the combination of analytical calculations of orbit and semi-analytic method.

For a closed solution three mass points in three dimension require 18 independent integrals. But it is possible to resolve 12 integrals: the six integrals of motion of center of mass, the three integrals of angular momentum, one energy integral, one elimination of the time and one elimination of the ascending node. So the integral system reduces to sixth order. Thus the n body problem constituting a system of order 6n can be reduced to a system of order $(6n - 12)$. In 1887 Bruns proved the ten classical integrals are the only independent algebraic integrals of the problem by the rectangular coordinates and all others can be formed by a combination of them. By extending this idea Poincaré establish no existence of new single-valued transcendental integral providing the masses of two of the bodies are very small compared the third. Concerning the stability of the solar system, the problem become the convergence or divergence of series then Poincaré firstly prove the general divergence of series selecting the achievements of Delaunay, Lindstedt, Gyldén. Poincaré open the new possibility of using a statistical approach in three body problem concluding an example of chaos in nature.

The key word of Poincare in celestial mechanics is periodic solutions, invariant integrals, asymptotic solutions, characteristic exponents and the non existence of new single-valued integrals.

Poincaré define an invariant integral of the system as the form which maintains a constant value at all time t, where the integration is taken over the arc of a curve and Y_i are some functions of x, and extend 2 dimension and 3 dimension.

Eigenvalues are classified as the form of trajectories, as corresponding to nodes, foci, saddle points and centre. In periodic solutions, the stability of periodic solutions is dependent the properties of their characteristic exponents.

Poincaré called bifurification that is the possibility of existence of chaotic orbit in planetary motion. Existence of near exceptional trajectories as Hadamard's accounts, say that there are probabilistic orbit. In this context we study the eigenvalue problem in early 20 century in three body problem by analyzing the works of Darwin, Bruns, Gyldén, Sundman, Hill, Liapunov, Birkhoff, painlevé and Hadamard.

지난 200년 전부터 삼체문제에 고전적 접근방식인 라그랑즈안과 하밀토니안이 적용되어왔다. 일반삼체문제는 통계적인 방식과 섭동적인 방식이 대표적인 해의 방법이고, 여기에는 해의 기초가 되는 궤도의 계산과 반 해석적(semi-analytic)방법의 결합을 가정하는 것이다. 삼체문제의 거장 프엥카레(1854-1912)는 1890년 오스카 2세의 60회 생일 기념수상논문과 그의 저서 천체역학에서 중요한 진보가 20세기 초에 이루어졌다.

결정론적인 행성의 궤도와는 다른 카오스적인 궤도를 증명하였다. 프엥카레의 천체역학의 주요 키워드는 주기해, 적분불변, 점근해, 적분불가능성으로 볼 수 있다. 프엥카레는 적분불변을 정의하기를 $\int \sum Y_i \, dx_i$ 가 모든 적분시간상에서 상수값을 가지며, 적분은 커브의 호상에서 이루어지고, Y_i 는 x의 함수라고 하였다. 이를 2차원과 3차원으로 확장하였다.

주기해에서는 고유값에 해당하는 특성지수에 따라서 주기해를 갖는다고 하였다. 이는 해당 급수의 수렴 여부에 따라서 안정성과 불안정성을 판단하였다. 즉, 주기해의 안정성은 특성지수의 성질을 조사하는 것과 동일한 것이다. 미분방정식 $dx_i/dt = X_i$ 의 주기해에서 $\phi_i(t) + \zeta_i(t)$ 에서 선형항 $\zeta_i(t)$ 만을 제외하고 무시하면, 여기서 나오는 특성지수는 $\zeta_n = e^{\alpha_k t} S_{nk}$ 로 쓰는 바 α_i 를 고유값 또는 특성지수라고 부른다. S_{ik} 는 주기함수로서 동일한 주기의 $\Psi_i(t)$ 시간 t 에 해당한다. 해밀톤계가 자율적이면, 특성지수의 크기는 반대부호를 갖는 동일한 크기의 짝을 이루어 두 개의 특성지수가 영(zero)이 된다. 물체의 고유한 성질을 나타내는 고유값은 영년방정식을 풀어서 구할 수 있고, n차 다항식의 근을 찾는 것과 같다. 대각행렬일 경우 고유값은 대각선의 행렬요소와 같다. 적분불변과 주기해에서 특성지수가 실수이며 양의 값을 가지면 불안정하다고 판정하였다. 불안정성은 바로 카오스라 불리는 것으로 리아프노프 지수로 불리는 정의된 수이고, 주기해의 근방에 돌아오지 못하는 것을 말한다. 원래 주어진 주기해에서 근소한 차이를 보이는 해를 고려한 바, 급수는 파라메터인 질량 μ 나 $\sqrt{\mu}, \mu$ 의 멱제곱에 의존하여전개된 다고 하였다. 삼차원 공간상에서 세 개의 질점은 18개의 독립적인 적분의 닫힌 해를 필요로 한다. 그러나 10개의 적분만이 가능하다. 즉, 고전적 적분 개념에 의하면 질량중심의 운동에 대한 6개의 적분, 각운동량에 대한 3개의 적분, 그리고 1개의 에너지적분이다. 여기서 시간과 승교점의 2개의 적분이 소거되어 18개의 적분식을 갖는 삼체문제는 6개의 적분으로 축약이 된다. 따라서 n체 문제는 $(6n-12)$ 계의 시스템을 갖는 적분식으로 축약이 된다. 1887년 브뤼스는 변수를 직각좌표계로 잡으면, 10개의 고전적 적분이 서로 독립적임을 증명하였다. 나머지 적분들은 상호조합에 의해서 이루어 질 수 있다고 하였다. 이 점에 착안해서 프엥카레는 세 번째 물체에 비해서 두 물체의 질량이 매우 작은계에서는 유일의 초월적분값이 존재하지 않는 다고 하였다. 수학적으로 삼체문제의 해답은 무한급수의 전개문제이지만 급수가 천천히 수렴함으로 사용하기 힘들다. 뉴턴이래 200년간 지속된 삼체문제의 해법문제는 프엥카레가 자연의 카오스 문제로 결론을 내림으로서 통계적 접근의 길을 열어놓았다. 분지라고 불리는 천체궤도의 카오스적 존재 가능성을 프엥카레는 예외적 궤도의 존재로 주장하였고, 이는 아다마르의 견해대로 우연에 의한 확률적 궤도의 존재를 말하는 것이다. 호모크리닉점의 존재는 삼체문제의 이중 점근해를 말하고, 이것은 궤적이 카오적임을 말해주는 것이다. 주어진 조건에 따라서 엑스포넨셜함수의 고유값인 특성지수가 계속 변함으로, 매우 작은 간격에서도 분지들은 얻게 되고, 원래의 주기와는 다소 멀어지는 것이다. 주기해의 안정성문제는 특성지수를 연구하는 것과 같다. 점변환이 규칙적임을 가정하고, 선형항만을 고려해서 근사치를 구할 수 있다. 프엥카레는 궤적의 거동이 선형변환의 고유값 성질에 의존하고 이 고유 값들과 서로 다른 특이점들 사이에 매우 밀접한 관련이 있음을 발견하였다. 프엥카레는 처음으로 적분불가능성을 증명하였다. 이를 위해 일정시간동안 삼각급수와 멱급수를 이용한 근사해를 시도하였고, 뉴턴의 법칙이 제한된 시간뿐 만이 아니라 영원히 적용이 될 수 있을지에 대한 이론적 근거를 제공하였다. 여기서는 주로 프엥카레가 제기한 뉴턴적 세계관에 입각한 삼체문제를 살펴보는 바 그 이유는 프엥카레가 삼체문제의 연구에서 당대뿐이 아니라 그 이후에도 큰 영향을 미쳤기 때문이다. 뷔른스, 질덴, 순드만, 힐, 다윈, 벌코프, 하이테커, 아다마르등의 이론전개는 프엥카레의 이론과 불가분의 관계를 가는다.

1 시대적 맥락

세 질점 또는 세 천체가 중력하에서 어떤 운동을 그리는가가 삼체문제의 핵심이다. 프엥카레는 자연에서 삼체문제는 카오스의 한 예라고 결론내리면서 통계적 접근에 새로운 길을 열었다. 프엥카레의 천체역학은 1890년 오스카 2세의 60회생일 기념수상논문인 삼체문제의 확장으로 이루어졌다 .[1] 고전물리학의 한계가 들어난 20세기 초 프엥카레는 그의 천체역학에서 전통의 결정론적 우주관과는 다르게 행성운동이 카오스 적임을 증명하였다. 주기해, 적분불변, 점근해, 적분불가능성은 프엥카레 천체역학의 주요내용이다. 삼체문제의 고전적인 접근방식인 라그랑즈안과 하밀토니안 방식은 200년 전부터 계속되어져왔다. 일반삼체문제의 해는 통계적인 방법과 섭동적인 방식이 대표적인 해의 방법이고, 이것은 해의 기초가 궤도계산과 반 해석적 (semi-analytic)

[1] H. Poincare, Sur le probleme des trois corps et les equations de la dynamique, Acta Mathematica 13, 1890, pp. 1–270; OEuvres VII, pp. 262–479.

적 방법의 결합을 가정하는 것이다.

삼체문제의 9개 미분방정식중에서 속도상수와 위치상수를 고려하면 18번의 적분을 필요로 한다. 고전적으로 10개의 적분이 알려져 있고, 질량중심에 관한 6개의 적분, 각운동량에 관한 3개의 적분, 1개의 에너지 보존법칙에 의한 적분이다. 여기에 시간과 교점소거에 의해서 2개의 적분상수가 알려져 12개의 적분만이 가능하다. 3체 문제는 적분상수가 6개가 부족하므로 일반해를 얻을 수 없다. 계가 음의 에너지를 갖게 되면 모든 물체는 중력에 묶여있다. 계가 양의 에너지를 갖는 다면 물체를 구성하는 군은 불안정하며, 팽창한다. 뷔룬스, 펭르베, 프엥카레는 더 이상의 닫힌 해가 존재하지 않음을 보였다. 수학적으로 무한급수의 전개이나, 급수가 천천히 수렴해서 사용하기 힘들다. 실제로 수치적분이 정확하여 초기위치와, 초기속도, 그 순간의 힘의 세기를 앎으로서 다음순간의 위치가 계산된다.

태양 주의를 도는 지구와 행성들은 엄밀히 말해서 2체 문제는 아닌 것이다. 다른 행성에 의한 중력은 추가적인 힘이 작용해서 행성을 타원궤도에서 밀어내려고 한다. 그래서 18세기 과학자들이 추가적인 힘이 지구가 태양에 붙어버리든가, 아니면 태양계 밖으로 밀어내지 않을까 하고 걱정했던 것이 무리가 아니었다. 이러한 우려는 지구의 나이가 수 천년뿐이 안 된다고 여겨졌을 당시는 당연한 것이었다. 더구나 이때는 지구궤도에 미치는 다른 행성영향의 가능한 조합이 발생하지 않는 다고 여겨질 때였다.

2체 문제는 뉴턴의 만유법칙이래로 오일러에 의해서 완전한 해를 얻었다. 오일러는 제한삼체문제로서 동일직선상에서 태양-지구의 질량중심(두 고정점)을, 질량을 무시할 수 있는 달을 가정하여 5차방정식의 근이 달의 일정한 합충에 해당하는 해를 얻었다. 두 고정점 방식은 1903년 칼리에가 다시 다루었고, 최근에 인공위성의 기준궤도 축에 간접적으로 응용이 되고 있다. 그러나 뉴턴의 운동법칙에 따라서 임의의 질량과 임의의 초기조건에 따라서 푸는 3체문제의 일반해는 없다. 다만 1772년 라그랑즈는 삼체문제의 특수해로서 임의의 질량이 동일직선상의 평형점(L_1, L_2, L_3)에 놓일때와 정삼각형의 꼭지점(L_4, L_5)에 있을때 만 해당하는 특수해를 구했을 따름이다. 134년이 지난후 태양-목성을 밑변으로하는 정삼각형의 꼭지점, 즉 삼체문제의 해에 해당하는 지점에 소행성이 존재하고 있다는 것이 관측에 의해 확인되었다. 여기서 고띠에(A. Gautier)가 달의 이론에 대해서 프랑스 학사원으로부터 오일러와 라그랑즈가 공동수상한 주제인 삼체문제에 의한 달의 이론을 해석한 대목을 1817년의 그의 저서 "삼체문제의 역사적 시론" 9장 첫 부분에서 살피는 것이 맥락을 파악하는데 있어서 의미 있는 일이라고 생각한다.

> 오일러와 라그랑즈가 동시상황에서 삼체문제의 미분방정식에서 중요변수를 직각좌표계에서 극좌표로 바꾸려한 것은 특이한일이다. 1772년 상을 받은 라그랑즈 방법이란 물체 A, B, C의 궤도를 결정하는데 있어서, 이 물체들의 상호간 거리인 r, r', r''을 이용하는 것 이었다. 라그랑즈의 논문은 두 부분으로 구성되어있다; 첫 논문은 삼체문제를 일반적으로 다루는 2장으로 구성되고, 둘째 논문 특별히 달의 이론을 다루는 바 역시 2장으로 구성이 되어 있다. 첫 부분에서는 물체 A주위를 도는 물체 B와 C의 상대적인 궤도를 결정하는 것이고, 이어서 물체 B주위를 도는 C의 궤도를 결정하는 바, 라그랑즈는 4개의 원적분식을 정밀하게 만들었다; 이어서 6개의 처음원시방정식을 세 개의 대칭방정식으로 줄였다. 거리를 시간에 대한 2계미분방정식과, 질량과 거리함수의 이중적분기호를 생략하게 되었다. 이식은 원시적분식보다 더 복잡한데, 그 이유는 각각 2개의 적분기호가 필요하기 때문이다. 그러나 어떠한 근도 포함하질 않기 때문에 라그랑즈는 이것을 달 이론에 적용을 한 것이었다. 직각좌표계에서 나타나는 r, r', r''의 시간에 대한 거리를 대수적 연산으로는 푸는 것이 불가능 하지만, 적분을 통해서는 가능한 것이다. 즉, A, B, C의 물체가 통과하는 면을 고정시키면, 이 물체들이 지나는 A주위를 도는 B와 C의 궤도식을 세우게 된다; 라그랑즈가 증명한 바는 이 고정된 모든 면 들 중 처음의 두 물체가 그리는 가장 단순한 면을 찾아서, 물체 B와 C가 그리는 궤도상의 서로의 위치를 나타내는 공식을 결정할 수 있게 된 것이다.

클레로, 달랑베르, 오일러, 라그랑즈, 라플라스에 대한 천체운동론은 따통(R. Taton)과 윌슨(C. Wilson)이 중심이 되어 요약되어 상세한 내용은 여기서 생략한다.[2] 자코비는 1843년 '삼체문제의 교점소거'라는 논문에서

[2](1) R. Taton and C. Wilson, The General History of Astronomy, (Cambridge University press, 1989)Vol. II. -(2)C. Wilson, The dynamic of Solar System, Companion Encyclopedia of the Theory and Philosophy of the Mathematical Sciences(Routledge, Newyork, 1994)vol2, pp. 1044–1053. C Wilson, The three-body problem; Companion Encyclopedia of the Theory and Philosophy of the Mathematical Sciences(Routledge, Newyork, 1994)vol2, pp. 1059–1061.

일반삼체문제를 태양중심의 두개의 가상의 물체의 운동으로 환원하였다. 두 가상의 물체의 질량, 위치, 속도를 좌표중심과 원점이 일치 하도록 하여 힘 함수로부터 가속도를 얻도록 하였다. 운동에너지가 보존되고 면적이 보존되도록하여, 라그랑지안 형식을 얻었다.[3]

$$\mu_1 x_{1i} = \partial U/\partial x_{1i} \quad \mu_2 x_{2i} = \partial U/\partial x_{2i} \quad i = 1, 2, 3$$

여기서 가상질량 μ_1과 μ_2는 임의의 상수에 의존하고, 이 값이 행성의 질량과 좌표와 거의 동일하도록 하였다. 이를 바탕으로 하여 베트랑 (J. Bertrand) 은 1852년 첫 번째 가상질량을 m_1과 m_2의 질량중심에 위치하도록 하여, $m_1m_2/(m_1+m_2)$와 같도록 하였다. 두 번째 질량은 m_3의 원래위치에 놓아서 $m_3(m_1+m_2)/(m_1+m_2+m_3)$와 같도록하였다. 자코비처럼 베트랑도 계를 6차로 줄였다. 이 뿌리는 라그랑지안이고, 1808년 라그랑즈는 섭동함수의 궤도매개변수에 대한 편미분이 이 매개변수에 대한 시간의 미분과 선형함수임을 발견하였다.

$$\partial H/\partial a_j = \sum_{j \neq i} [a_i, a_j](da_j/dt)$$

H는 섭동함수이고, 괄호안에 있는 항은 시간에 무관한 함수로 라그랑즈 괄호라고 하는 것이다. 라그랑즈는 궤도매개함수의 선택에 따라서 단일 시간 도함수가 됨을 보였다. 이에 대한 역관계를 1809년 포아송이 유도하였다.

$$da_j/dt = \sum_{j \neq i} [a_i, a_j](\partial H/\partial a_i)$$

괄호안에 있는 항은 시간과 무관한 함수로 포아송 괄호라고 하는 것이다. 하밀톤은 1834년과 1835년에 발표한 두 논문에서 이 형식을 확장하여, 이 전에는 힘 함수를 좌표만의 항으로 정의하였는데, 운동량 P_i와 일반화된 좌표 Q_i를 임의의 함수 H로부터 편미분하였다. 이 함수는 시간에 무관하고, 최소작용원리를 적용하여, n쌍의 1계의 편미분방정식에서 n개의 자유도를 갖는 운동방정식을 유도하였다.

$$\dot{P}_i = -\partial H/\partial Q_i \quad \dot{Q}_i = -\partial H/\partial P_i$$

자코비는 이것을 정준운동방정식으로 불렀고, 하밀톤은 이 함수의 적분이 주 함수 S라고 불리는 편미분으로 나타낼 수 있음을 보였다. 드로네이 (Charles Delaunay) 는 20년의 노력 끝에 하밀톤니안을 급수전개하여, 하밀토니안 함수에서 주기항을 소거하여 적분한 끝에 달의 경도, 위도, 시차를 무한급수로 표현한 바, 시간 t가 주기항의 편각으로 만 나타나게 하였다. 드로네이의 결과는 1초의 정밀도를 보였고, 급수의 느린 수렴으로 제한되었다. 그러나 영년항이 주기항의 편각밖에 t가 나타나는 것을 피 할 수 있었다. 1874년 뉴콤브 (Simon Newcomb) 는 삼체문제가 주기항으로만 이루어진 무한급수에 의해서 풀릴 수 있음을 증명하였다. 1883년 린드스테드 (A. Lindstedt) 는 라그랑즈 방정식으로부터 삼체문제에 대한 급수해를 구할 수 있음을 보였다. 그러나 이 급수들이 수렴하지 않는 비 주기적임을 보여 프엥카레의 카오스론에 영향을 주었다.[4] 앞서 언급한대로 프엥카레는 1882–1884년에 함수가 임의 큰 값을 갖게 되면 급수가 균일하게 수렴하지 않을 수 있음을 증명하였다. 1884년 뷔른스는 급수가 장주기항에서 수렴과 발산사이를 진동하면, 상수는 시간에 따르는 계수가 매우 작은 값에서도 변할 수 있음을 증명하였다. 이어서 1887년 뷔른스는 삼체문제문제의 대수함수가 보존되지 않는 양일 수 있음을 보였다.[5]

힐 (George William Hill) 은 처음으로 달 이론에서 무한 행렬식을 도입했다. 힐은 제한 삼체문제와 회합좌표계를 이용하여, 태양, 지구 질량을 무시한 달의 주기해를 구하였다. 프엥카레는 힐의 주기해에 대한 아이디어를 정리한바, 이는 크로네커정리를 삼체문제에 응용한 것이고, 무한수의 주기해의 존재를 밝힌 것이었다.

개략적으로 이러한 천체역학자들이 프엥카레의 '천체역학의 신이론' 이 출간되기 이전의 삼체문제의 중요이론을 냈다고 볼 수 있다. 구체적으로 프엥카레의 천체역학이 출간된 맥락을 살펴보면 다음과 같다. 프엥카레의 천체역학의 신 이론이라는 저서가 나온 시기는 상대론과 양자론이 나오기 직전의 시기였다. 프엥카레는

[3] C Wilson, The three-body problem; Companion Encyclopedia of the Theory and Philosophy of the Mathematical Sciences(Routledge, Newyork, 1994)vol2, pp. 1059–1061.

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Anders_Lindstedt.

[5] http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Bruns.html.

스웨덴의 왕 오스카 II세의 60세 생일기념으로 낸 삼체문제의 공개적인 현상응모에서 1887년 수상했다. 심사위원은 당대의 수학의 대가인 바이어스트라스, 에르미트 그리고 Acta Mathematica의 창간자인 미타그-레플러로 구성이 되었다. 삼체문제와 관련된 제반의 수학적 문제들을 J. B. Green 박사가 엄밀하게 분석하여 본 논문에서 상당부분 참고하였다.[6]

1902년 미국천문학자 물톤(F. R. Moulton)은 프엥카레의 1890년 Acta Mathematica에 발표한 삼체문제에 대한 이논문에 대해서 다음과 같이 평하고 있다: "프엥카레가 사용한 방법은 천체역학에서 이전에 나온 어떠한 논문보다도 강력하고 비교할 수 없을 정도로 심오하고, 과학발전에 신기원을 이루었다".

1925년 미국수학자인 벌코프(George Birkhoff)는 "프엥카레는 삼체문제에서 동역학에서 처음으로 적분불가능 문제를 다루었다" 고 하였다.

필립 호르메스(Philip Holmes)는 프엥카레의 논문이 동역학계의 최초의 질적인 이론이라고 하였다'.

프엥카레의 천체역학의 신이론(I권 1892년간, II권1893년간, III권 1899년간)은 1282쪽에 달하는 바, 여기서 동력학계의 카오스적 거동을 수학적으로 다루고 있다. 오스카 수상논문의 오류가 발견돼 큰 물의를 일으킨바 있지만, 1890년 수상논문의 오류를 수정해서 Acta에서 발표했고, 천체역학의 신 이론에서 카오스적 궤도라고 불리는 호모크리닉 점(이중점근해)에 관해서 다루었다. 호모크리닉점의 발견은 오늘날 카오스 이론의 창시자로서 프엥카레의 업적을 높이고 있다. 프엥카레는 19세기말 힐의 연구에 영향을 받았고, 점근해에서 급수의 수렴에 대한 오류에서 일련의 물의를 일으켰다. 핀란드의 질덴(Hugo Gylden)같은 천문학자는 이에 대해서 이의 주장했지만, 대부분의 수학자나 천문학자들은 프엥카레의 업적을 인정하고 찬사를 보내는 입장이었다. 당시 저명수학자 바이어스트라스나 에르미트까지도 이를 신중하게 여길 정도였다.

프엥카레의 천체역학 신 이론은 위의 관련 인물 이외에도, 리아프노프, 아다마르, 펭르베, 다윈, 레비 시비타, 순드만, 모르스, 멜니코프등에 영향을 주었고, 해밀톤계에 준주기해에도 영향을 끼친 KAM(Kolmogrorov, Arnold, Moser)이론이 그 이후에 나왔다.[7]

영국의 화이테커는 1899년 삼체문제의 해에 대한 발전의 보고서라는 제목으로 요약 정리하였고, 이후 1904년 교과서적 저서인 '입자와 강체의 동역학적 해석[8]'에서 약술하였다. 프엥카레의 삼체이론은 현대의 삼체문제의 시작이었다는 점에서 의의가 깊다.

2 프엥카레의 이론과 20세기 전후의 삼체문제

수학사가 벨이 마지막 만능의 수학자라고 평했던 앙리 프엥카레(Henri Poincare; 1854-1912)는 삼체문제의 주기해를 주장하면서, 궤적의 안정성을 엄밀히 논하였다. 앞서 소개한대로 주기해, 적분불변, 점근해는 프엥카레 천체역학의 주요형식이다. 예외적 궤도의 주장은 아다마르의 견해대로 우연에 의한 확률적 궤도의 존재를 말하는 것이다. 아인쉬타인은 "신은 주사위 놀이를 하지 않는다" 고 하였다. 프엥카레는 최고의 수학자에게 있어서 확률이란 있을 수 없다고 하였다.[9]우선 벨이 평하는 프엥카레의 강력한 무기는 다음과 같다.

> 뉴턴과 뉴턴의 후계자 이래로 천문학은 수학자들이 해결해 낼 수 있는 것보다 많은 문제를 제공해 주었다. 19세기 후반까지 천문학을 공격하기 위한 수학자의 무기는 뉴턴, 오일러, 라그랑즈 와 라플라스 같은 수학자들이 발견한 것의 변형에 지나지 않았다. 그러나 19세기를 지나면서, 특히 코시가 복소변수의 함수론과 무한급수의 수렴연구 등을 발전시키면서 아직까지 사용되지 않은 무기로 쌓인 거대한 병기고가 순수 수학자의 노력에 의해서 이루어 지게 되었다. 프엥카레와 같은 해석학이 자연적 사고로부터 발생하는 사람에게는, 이 거대한 사용되지 않은 수학의 이 거대한 파일(pile)이 천체역학이나 행성진화의 중대한 문제에 새로운 공격에 사용될 것처럼 보인다. 그는 산더미로부터 뽑아내 선택하고 개량하여, 100년동안

[6](1) June Barrow Green, Poincaré and the Three Body Problem(American Mathematical Society, Providence, 1997); (2) Barrow-Green, June (2010). The dramatic episode of Sundman. Historia Mathematica, 37(2), pp. 164-–203; (3) Barrow-Green, June (2005). Henri Poincare, memoir on the threebody problem (1890). In: Grattan-Guinness, I. ed. Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940. Amsterdam: Elsevier, pp. 627-–638.

[7]앞의 문헌, 6-(1), chap. 1.

[8]E. T. Whittaker, A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies(Reprinted, Cambridge University Press, 1970).

[9]일리야 프리고진, 이자벨 스텐저스(신국조 옮김), 혼돈으로부터의 질서(고려원 미디어, 1993) 360쪽.

> 공격에 사용되지 않은 자신의 새로운 무기를 발명하여 이론천문학을 공격하여 큰 인기를 끌게 될 것이다. 그의 현대식 공격은 전역(campaign)에서 참으로 천체역학의 대부분의 전문가들에게는 초현대식이므로, 프엥카레의 공격이후 40년이 지난 오늘날 까지도 프엥카레의 무기에 정통한 사람이 없다는 것이고, 어떤 수학자는 실질적 공격에 무력함을 암시하고 있다.[10]

오늘날 우리는 동력학계들이 하나의 매개화(parametrized)된 족이 구조적으로 불안정한 지역을 통과할 때 분지(bifurcation)가 발생한다고 한다. 직관적으로 말해서, 분지가 발생하는 곳은 서로 다른 거동을 보이는 동역학계의 집합이 분리되는 곳에서 발생이 되고 있다. 프엥카레는 1885년 분지라는 용어를 도입하였는데, 회전하는 유체의 각운동량이 변하는 모형의 천이를 기술하기 위함이었다. 아다마르는 주기해의 수의 변화나 선형적 안정성의 변화를 설명하기위해서 분지라는 용어를 사용하였다. 이것은 현재 국소적 분지론으로 불리고 있다. 프엥카레는 천체역학의 핵심주제는 삼체문제라고 하였고, 삼체문제의 연구는 뉴턴력으로만 천체운동의 설명이 가능한지를 확인하는데 있다고 하였다. 여기서 이 문제에 대한 프엥카레의 결론은 먼저 살펴보면 보면 다음과 같다.

> 연구자들이 가장 큰 관심을 가진 문제 중의 하나는 태양계의 안정성에 관한 것이다. 진솔하게 말한다면 이 문제는 물리학의 문제라기보다 수학적인 문제 인 것이다. 비록, 우리가 일반적이고 엄밀한 증명을 발견한다고 할 지 라도, 우리는 태양계가 영원하리라고는 결론을 내릴 수 없을 것이다. 사실 뉴턴력 이외의 다른 힘들에 의해서 지배를 받을는지 모르는 것이다.[11]

프엥카레(Henri Poincare; 1854-1912)의 중력장에서의 삼체문제의 일반해의 증명에서는 닫힌 수학적 해를 갖지 못하는 것으로, 단지 해의 일 단계에 해당된다고 볼 수 있다. 프엥카레에게 실제로 중요했던 것은 해석적인 해가 존재하질 않더라도 계의 운동을 어떻게 기술하느냐에 있었다. 위상공간을 사용함으로서 프엥카레는 서로 다른 질량비와 초기조건 하에서 삼체문제의 다루는 방법을 고안했다. 미분방정식으로 일정한 초기조건을 갖는 삼체문제는 주기적인 운동을 수행한다. 그렇지만 초기조건을 조금 변경하면 삼체의 궤도는 전혀 달라진다. 새로운 초기 조건하에서 삼체의 궤도가 미분방정식에 의해서 예상되기도 하지만, 때때로 원래의 방정식에서 예상 할 수 없는 혼돈(chaotic)이 일어난다. 그래서 프엥카레는 중력장내 에서의 삼체가 뉴턴식의 결정론적인 궤도와 예측할 수 없는 비뉴턴적 궤도로 나타남을 발견하였다. 이것은 사고실험으로 쉽게 설명할 수 있는데, 베아링에 강체봉을 달고 어떻게 미느냐에 다라서 강체봉은 회전 할 수도 있고 좌우로 진동 할 수 있는 것 과 같다.

프엥카레의 삼체문제 연구 이후로 많은 사람들이 주어진 문제의 파라메터 공간상을 설정하여 잘 정의된 닫힌 해가 존재하느냐의 여부를 연구하였다. 그래서 삼체문제의 혼돈해(chaotic solutions)가 존재함을 발견되었는데, 삼체중 일체가 충분한 속도를 얻으면 이체를 탈출한다는 것이다. 일체(一體)의 탈출은 삼체계(三體界)가 음의 에너지 값을 가질 때 일어난다. 프엥카레도 이 사실을 일고 있었고 혼돈해를 태양계의 안정성과 관련시키려 했다. 삼체계가 음의 에너지를 가짐으로서 일체가 탈출하는 것은 불안정한 상태를 의미하는 것이었다. 그래서 프엥카레는 삼체문제를 태양의 안정성과 관련시켜서 다시 검토 작업에 착수하였다.[12]

19세기 초 라플라스(P. S. Laplace; 1749–1827)가 태양계의 안정성 여부를 판정하기 위하여 섭동론을 이용하였다. 라플라스는 다체문제로서 태양계를 다루었고, 태양의 영향력뿐 만 이아니라 행성들의 상호간 영향력을 다루었다. 라플라스의 목적은 이러한 행성간의 섭동이 영년 발산(secular divergences=행성의 탈출)에 영향을 미치지 못한다는 것을 증명하는 일 이었다. 라플라스는 프리에 급수 전개를 이용하여, 행성 상호간의 섭동은 주기적으로 발생하므로, 태양계는 안정하다고 증명하였다.[13] 라플라스는 1차 근사에 의하여, 태양계의 안전성을 증명하였고, 프와송은 2차 근사에 의하여 태양계의 안정성을 증명하였다. [14] 여기서 필자는 2008년

[10] E. T. Bell, Men of Mathematics, (Victor Gollancz, London, 1939)pp. 599–600.

[11] Henri Poincaré, Henri Poincaré, Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste; 영역본, New Methods of Celestial Mechanics, Edited and Introduced by Daniel L. Goroff, I 80.

[12] Victor G. Szebehely, Hans Mark; Adventure in Celestial Mechanics, John wiley & son, 1998, 1장과 13장.

[13] P. S. Laplace, Mécanique céleste, vol I-V.

[14] Jacques Hadamard, L'oeuvre mathématique de Poincaré; The Mathematical Heritage of Henri Poincaré, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics(American Mathematical Society, usa, 1983)volume 39 part 2, p. 422.

8월의 수학사 학회지에서 이미 라플라스가 물분자력(입자력)의 세기가 중력에 비해서 대단히 큼에 놀란 바 있다고 기술하였다.

프엥카레는 한 점의 궤도가 안정하다함을 그 점이 원래의 임의의 위치근방에 무한하게 자주 되돌아오는 것이라 하였고 프와송으로 부터 기인한다고 하였다. 라플라스나 프와송의 이같은 추론은 영구적 추론이 아닌 일시적 추론인 바, 프엥카레는 라플라스의 연구를 다시 검토하였다. 그래서 태양계가 절대적으로 안정한 것이 아니라고 추론 하였다. 이런 맥락에서 천체역학의 신이론이 출간되기 직전인 1890년에 Acta 에 출간되고, 1887년에 오스카 II세의 60세 생일 기념으로 프엥카레가 수상한 삼체문제를 보자. 1885년 Nature지에는 다음의 광고기사가 났다. 오스카 II세 전하의 1889년1월21일 생일 기념으로 다음문제의 해를 상금으로 내걸었다. 수리과학의 진보를 위한 폐하의 지대한 관심으로 다음문제의 명쾌한 증명을 기대하면서... 심사위원회는 다음 문제를 공모한다.

> 뉴턴의 법칙을 따라서 상호간에 인력이 작용되는 임의의 다체계가 주어졌을 때, 두 개의 입자가 전혀 충돌하지 않는 다는 가정하에서 각각의 점을 좌표로 나타내고, 시간에 대한 기지의 함수에 일치해서 진행되는 급수를 전개하고, 시공간상에서 균등하게 수렴하는 것을 찾아라.[15]

바이어스트스의 이 수상논문의 코멘트에서와 같이 프엥카레의 해가 완전하게 끝을 보지는 못하였지만 천체역학의 새로운 시대를 열었다고 논평하였다. 1912년 순드만이 출제된 문제를 $n = 3$인 삼체상에서는 해결했다고 볼 수 있고, 수학적으로는 $n > 3$인 n체에 대해서는 1990년대에 왕기동에 의해서 해결(특수하게) 되었다고 볼 수 있다.

벡터장이 사라지는 점을 평형점 또는 특이점이라고 한다. 라그랑즈점, 말 안정점등과 같은 특이점의 존재는 초기조건에 따름을 프엥카레는 강조하였다. 동일미분방정식에 대한 서로 다른해에 대한 커브의 관계를 분석하면서, 특이점근방에서의 이들 커브에 대한 거동을 검토하고 국부적(local)분석을 시작하였다. 특이점에 대해서 네 개의 서로 다른 타입이 있을 수 있음을 보였다; 무한수의 해곡선이 통과하는 노드. 단지 두 개의 해곡선이 통과하는 말 안장점으로서 두 곡선은 이웃 해곡선에 대해서 점근선처럼 작용한다. 셋째로 로가리즘한 나선형태로 해곡선에 접근하는 초점으로서 이고, 넷째로 중심으로서 폐해곡선이 서로서로를 둘러싸고 있는 것이다. 이러한 특이점의 분포를 $N + F - C = 2 - 2p$로 주어진다고 하였다. N은 노드수이고, F는 초점수, C는 말안장수이고, p는 곡면 S상에서 제너스(genus)수 이다.[16] 라그랑즈와 라플라스의 결정론적 궤도론이 프엥카레가 카오스적임을 제기하여 확률적인 수리물리적 궤도론을 제기한 바는 의의가 깊다고 하겠다.[17]

2.1 특성지수(고유값)와 주기해

본 논문에서는 주기 해를 중심으로 프엥카레의 천체역학을 살펴보기로 한다. 1889년 프엥카레는 제한삼체문제에서는 쟈코비안 이외에는 적분이 존재하지 않는다고 하였다. 그 후 제한 삼체문제의 주기 해에 관심을 기울였다. 1890년 수상한 에세이에서 처음으로 회귀정리를 증명하였다. 즉, 상공간의 임의의 지점 r_o가 매우 작다고 할지라도, 이 지점을 통과하는 궤적이 무한수로 존재한다는 것이다. 더구나 r_o에서 이 궤적들이 나타나지 않는 점들은 r_o보다 무한히 작은 부피를 갖게 되는 것이다. 그래서 프엥카레는 주어진 주기해로부터 다소 다른 해를 고려하게 되었다. 프엥카레는 섭동질량 혹은 섭동질량에 비례하는 인자인 파라메터μ로 전개한 하밀토니안을 가정하였다.[18]

$$F = F_o + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \cdots$$

$\mu = 0$이면, 즉, 섭동을 무시하면 해 $x_i = \phi_i(t)$, $y_i = \psi_i(t)$는 주기함수가 된다. 여기서 프엥카레는 오늘날 자주 쓰는 하밀토니안기호 H 대신에 F를 썼다. 이 해는 알려져 있는 바, 케플러의 법칙에 따라서 타원궤도를 돌게 되는 것이다. 이것은 서로 간에 통약 가능함을 말한다. 하다마르는 이런 무한해가 쟈코비안이 영이 되는 난점을

[15] 앞의 문헌, 6-(1), p. 229.
[16] 앞의 문헌, 6-(1), pp. 31-32.
[17] 앞의 문헌, 3
[18] 위와 같은 문헌.

유발한다고 해석하였다. 따라서 음함수에 대한 심화연구가 요구되는 것이다. 기하학적으로 말해서, 구한 해를 정의하는 초기좌표들에서 μ값에 이 초공간의 점을 연결하면, 해가 주기로 나타나는 방정식은, $\mu = 0$인 영역에 위치한 연속된 어떤 부분인 다양체를 정의하게 되는 것이다. 그래서 μ가 변하는 방정식의 해는 연속인 급수를 얻을 수 없게 된다. μ의 해석에 따라서 초공간의 커브를 문제에 해당되는 다양체로서 얻게 되는 것이고, $\mu = 0$인 정의역을 절단지점에서 이 다양체의 중복점이 결과로 나타나는 것이다.[19] 프엥카레는 μ가 작은 값을 갖게 되면, 주기 해에서 항이 다음과 같이 추가된다.

$$x_i = \Phi_i(t) + \zeta_i, \quad y_i = \Psi(t) + \eta_i$$

여기서 $\zeta_i = S_i exp(\alpha_k t), \quad \eta_i = T_i exp(\alpha_k t)$가 되고, S_i와 T_i는 t의 주기함수이다. $\alpha\alpha_k$를 특성지수라고 하는 것으로, 대수방정식의 근이며, 안정하기위한 해로는 허수이어야만 한다. μ가 작거나 정수의 제곱에 따라서 전개될 때 해결책으로 고안한 것이 바로 분지형식 또는 안정성의 계수인 것이다. 이는 무한의 다양체성에 대응하기 위한 것이다. 분지형식은 이들 다양체의 이중점에 해당하고, 결과적으로 구축하려는 핵심요소를 구성해주는 것이다. 안정성의 요소들은 바로 특성지수들의 제곱 값인 것이다. 이는 임의의 주기 해에 대한 리아프노프 안정성에 달려있는 것이다. 행성의 모습에 대한 이론에서와 마찬가지로, 분지형식에 나타날 때마다 매번 일종의 안정성의 교환이 나타나는 것이다. 게다가 동일한 차원에서 발생하는 분지의 관점에서 반대가 되는 경우라도, 즉, μ가 변화하는 중인 경우라면 주기 해는 사라지게 되는 것이다. 주기해의 소멸은 대수방정식에서 실근들의 짝으로 쌍을 이루는 것과 같은 것이고, 같이 사라지는 해는 다른 안정성을 갖게 되는 것이다. 초공간상을 그리는 곡선의 호에서 동일한 방향으로 μ가 계속 변한다면, 안정성의 교환정리에서는 반대로 역 과정을 받아들이는 것이다. 즉, 분지에 의해 진행되는 안정성의 변화만 나타나게 되는 것이다. 이에 프엥카레는 특성지수 역할에 또 다른 예로서 제2 장르(second genre)의 주기 해를 들어 적용하고 있다. 이는 결정된 주기 T 근방에 k 회전 후에 생긴 주기 kT를 말한다. 이것은 첫 번째 주기에 새로운 주기를 접합하는 것을 말하고, 더 큰 이중점을 말한다. 이것은 최소작용과 관련된 것으로 극대극소의 연구에서 난점을 적분불변으로 해결하게 된 것이다. 이 경우의 특성지수는 $2\pi i/kT$의 배수가 되는 것이다. $k =$정수이므로 $2\pi i/kT$의 배수는 원하는 만큼 서로 서로 근접시킬 수 있다. μ에 따라서 특성지수가 계속 변함으로, 매우 작은 간격에서도 분지들은 얻게 되고, 원래의 주기 T와는 다소 멀어지는 것이다.[20]

프엥카레에 있어서 적분불변이란 동역학적인 의미에서 임의의 시간 T에서 차지하는 부피 V가 일정함을 말하는 것으로, 시간변화에 따른 부피가 일정함을 의미한다.

프엥카레의 점근 해란 기본형의 적분이 불가능함으로 해서 만든 것이다. 점근해란 무한으로 주기 해에 접근하거나 주기 해에 무한으로 멀어지는 것을 말한다. 이 중점근해란, $t = -\infty$에서 주기 해에 무한히 근접함을 말하고, 멀어졌다가 다시 근접하여 $t = +\infty$서 주기 해에 근접하는 것으로 말한다. 프엥카레의 삼체문제는 결정론적인 행성궤도론에 확률을 도입하여, 분지라는 용어를 도입하여 카오스론의 수학적, 동역학적인 시초을 마련하였다는 점에서 의의를 찾을 수 있고, 이후 '천체역학의 신이론' 은 주기적 궤도에 대한 이후의 천체역학자들이 후속연구를 유발하였다.

1901년 레비 시비타(Tullio Levi-Civita)는 제한삼체문제에 있어서 질량없는 질점과 다른2체의 평균운동이 통약가능하면, 그 운동은 불안정하다고 하였다. 다윈(George Darwin), 물톤(Forest Ray Moulton), 브라운(E. W. Brown), 스트롱그렌(Elis Stromgren)등이 제한삼체문제에 대한 여러족을 연구하였다. 1912년 버코프(George David Birkhoff)는 제한삼체문제에 있어서 모든 안정한 궤도는 어느 정도의 회귀적 성질이 있다고 하였고, 이러한 성질에 따라서 점근적으로 접근했다가 멀어지는 것이라고 하였다. 버코프는 프엥카레의 연구를 이론 동역학적으로 깊이 연구하였다. 아다마르(Jacque Hadamard)는 1901년의 논문에서 측지적 궤적의 거동은 적분상수의 산술적 불연속성에 의존할지 모른다고 하였다. 아다마르는 태양계의 안정성을 논하는 것은 천체역학에서 좋은 질문이 아니라고 하였다. 태양계의 안정성에 대한 연구를 음의 곡률을 갖는 측지적 곡면과 관련된 유사한 질문으로 대체한다면, 안정한 궤도일지라도 초기조건의 미세한 변화에 의해서, 닫힌 측지선의 점근적 궤적과 같은 완전히 불안정한 궤도나 더 일반적인 임의 궤적으로 바뀌게 될 것이라고 하였다. 천문학에

[19] 문헌 13번, p. 416.
[20] 문헌 10, Chapitre XXX-XXXII

서 초기조건이란 물리적으로만 알려져 있는 것이고, 관측에 의한 오류는 줄일 수 있지만, 오류를 없앨 수는 없는 것이다. 관측상의 작은 오류일지라도 결과에서는 전부이자 절대적인 것이다. 1912년 순드만(Karl Sundmann)은 삼체문제는 풀릴 수 있는 것이지만, 급수가 천천히 수렴하여 실제로 사용하기엔 어렵다고 하였다. 순드만은 일반삼체문제에 있어서, 운동이 단일 평면에 구속되지 않는다면 삼체의 상호간 거리는 일정한 양(positive)값을 항상 초과할 것이라고 하였다. 순드만의 이론이 나온 후 40년 후, 차지(Z. Chazy)는 다음과 같이 분석하고 있다.

> 순드만의 해는 이미 삼체간의 충돌과 근접에 대한연구를 촉발하였다. 그리고 삼체간의 궤적에 대한 무한의 분지에 대한 연구를 유발하였다. 이미, 특이궤적의 결정은 삼체의 설명과 분포에서 주목할 만한 결과를 이끌어 내었다. 특이점의 연구로서 해석함수의 연구의 고려가 필요하게 되었다. 삼체문제에 의해 제기된 질적인 문제가 해결되지 않았더라도, 순드만의 해는 이문제의 발전에 있어서 긴요한 것이다. 프엥카레의 업적과 마찬가지로 순드만의 업적에 대한 질문은 열려있는 것이다.[21]

1960년경 수학자 콜모고로프(A. N. Kolmogorof), 아놀드(V. I. Arnold) 그리고 모세(J. Moser)는 프엥카레의 직관과 반대로 어떤 초기조건에서는 급수가 수렴할 수 있고, 따라서 준주기해를 제안하였다. KAM 이론은 전통적인 섭동론이 실패 했을 때 해당되며, 무한시간에 대한 계의 안정성을 증며해 준다. KAM 이론의 단점은 섭동매개변수가 극도로 작아야한다는 데 있다.

2.2 적분불변

앞서 소개한 대로 적분불변, 주기해, 고유값은 상호연관되어있다. 1890년 Acta에서 프엥카레가 전개한 정의-정리-증명(definition-theorem-proof)단계는 천체역학의 신이론에서 근간이 되어 응용되었기에 소개를 하면 다음과 같다. 프엥카레는 제한삼체문제의 해에서 안정성(태양의 안정성)과 관련해서 다음과 같이 정의를 내리고 있다. 프엥카레는 정성적인 증명을 시도하고 있다.

> 안정성의 정의 : 점 P의 운동은 그 점이 원래의 위치의 임의적 근방에 무한하게 되돌아 올 때 안정하다고 정의 한다.

이에 대한 정의를 회귀정리 라고 하고 주어진 계에서 자유도가 3일 때 부피는 보존이 되어 무한수의 해가 존재한다는 것이 안정성이라는 것이다. 그러나 9년 후인 1899년에 출간한 천체역학 제3권에서는 안정성의 정의를 3가지로 정의하여, 위에 기술한 것에 추가하고 있다:

> 1. 점간의 거리는 무한히 클 수가 없다. 2. 점간의 거리는 일정거리 이하로 작아 질 수 없다. 3. 계는 원래의 위치에 무한히 자주 임의적으로 가까이 돌아온다.[22]

> 정리 **I(**회귀정리**)** : 공간상 유한한 한 점 P의 좌표 x_1, x_2, x_3를 가정하게 되면 적분불변 $\iiint dx_1\, dx_2\, dx_3$가 존재 한다; 공간상의 임의의 영역 r_o가 아주 작다고 할 지라도, 여기를 통과하게 되는 궤적이 무한히 자주 존재하게 된다. 즉, 미래의 시간에는 원래의 위치에 임의로 가깝게 그 계는 되돌아 올 것이고, 무한히 자주 되돌아오게 될 것이다.

이에 대한 프엥카레의 증명은 단순하다.

> 증명 : 점 P가 있는 곳의 부피 V와 영역 R을 고려하자. 그러면 t시간에 무한수로 움직이는 점들로 구성된 부피 를 가진 영역 r_o를 R에서 고려할 수 있다. 이들 점들은 영역 r_1을 τ시간 동안 채울 것이고, 영역 r_2를 2τ 시간 동안 채우는 식으로 해서, r_n 영역을 $n\tau$시간동안 채우게 될 것이다. 여기서 r_1과 r_2는 공통되는 점이 없고, r_n는 r_o가 n번째 까지 반복되는 것이다. 부피가 보존됨으로 영역 $r_o \cdots r_n$는 같은 부피 V를

[21] 문헌 6-(1), p. 191.
[22] 문헌 6-(1), p. 160; Henri Poincaré, Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste, Vol III, 1899, p343.

갖게 될 것이다. 만일 $n > V/v$이라면, 적어도 두 영역은 공통부분을 갖게 되는 것이다. 그래서 공통영역의 연속적인 반복을 고려한다면, 다른 영역을 확장 할 수 있는 r_o에 동시에 속하는 점들을 모을 수 있음을 보일 수 있고, 이 점들의 모음(집합) 자체는 하나의 지역(region) σ를 형성하게 해준다. 이 지역 σ의 정의로부터, 한 점으로부터 시작하는 모든 궤적은 영역 r_o를 무한히 자주 통과 하게 되는 것이다.[23]

프엥카레가 의미하는 예외적 궤도는 확률을 말하는 것이고, 영역을 통과하는 궤적이 k번보다 작으면 영(zero)를 의미하는 것이다. 비록 k값이 매우 크고, 영역가 매우 작아도 적용이되는 것이고, 보조정리와 보조정리의 증명은 1890년 acta에서 추가된 것이다. 이에 대한 보조 정리(corollary)는 다음과 같다.

보조정리 : 위로부터 따른다면, 무한수의 궤적이 영역 r_o를 무한히 통과할 것이고; 유한한 시간동안에만 통과하는 다른궤적이 있을 수 있다. 이 후자의 궤적들은 예외적 궤도로 간주 될 수 있는 것이다.

이 예외적 궤도는 근사예외적 궤도로 불리는 것으로 앞서 언급한 바와 같이 안정한 궤도가 압도적으로 불안정한 궤도 보다 수적인 우세를 보이는 바 그 확률이 극도로 작을지라도 이는 무시할 수 없다는 것이다.

3 결론

수학적으로 삼체문제의 해답은 무한급수의 전개문제이지만 급수가 천천히 수렴함으로 사용하기 힘들다. 현실적으로 수치적분이 비교적 정확하여, 초기위치, 초기속도, 그 주어진 순간의 힘의 세기를 앎으로서 다음순간의 위치가 계산된다.[24] 그러나 본 논문은 프엥카레와 그 주변인물의 삼체문제에 대한 해의 상세하게 요약하지 못하였고, 그 이유는 미분방정식이 초기조건과 경계조건에 의해서 무한히 많은 해가 존재하기 때문이고 많은 지면을 요하기 때문이다. 최근 발렌토넨과 칼투넨은 뉴턴 이래의 전통적인 방식과 통계적인 방식으로 삼체문제를 다루었다.[25] 프엥카레의 삼체문제가 자연에 존재하는 카오스의 대표적인 한 예라고 하면서, 삼체문제는 통계적 접근의 이용에 대한 새로운 가능성을 열어놓았다고 하였다. 한국에서는 최규홍이 삼체문제을 중심으로 미국과 구 소련의 연구자들의 내역을 요약한 바 있다.[26] 1960대말과 1970년대 초 이래로, 영국의 Aarseth, 독일의 Wielen, 미국의 Szebehely등이 250체 문제이상을 컴퓨터에 의해서 수치적으로 풀기에 이르렀다. 이 이론은 항성역학, 성단의 역학적 진화에 응용되고 있다.

오늘날 탄도학이나 행성간 탐사선, 위성궤도론에서 삼체문제의 실용성은 극히 중요하고 핵심적인 역할을 한다. 천체역학에서 이처럼 핵심적인 역할을 하는 문제임에도 불구하고, 한국의 초중고의 교육에서는 삼체문제가 언급이 되지 않고 있다. 따라서 우주로의 여행뿐만 이아니라 근본적인 자연의 이해라는 관점에서 대학이나 고등학교에서 삼체문제에 대한 소개는 필요하다고 판단된다. 대학수준의 공업수학이나 수학물리에서는 고유치나 특이점문제에 대해서 프엥카레와 같은 20세기초의 대수리물리학자들보다 더 간단명료하게 미분방정식이나 선형대수학에서 설명해놓고 있다. 그러나 역사적인 맥락에서의 삼체문제연구는 실증적 차원이 아니더라도 자연현상의 수학적 이해 뿐 만이 아니라, 고전역학과 현대의 물리학의 근간을 이루는 양자역학의 수학적 배경을 어느 정도 지니는 흥미있는 주제로 판단된다: 수학교육학적인 측면에서 삼체문제는 고전역학과 양자역학이 막 분리되려고 하던 시점에서 나온 문제이기 때문에 현재에도 전문 수학자와 수리물리학자에게 중요한 관심대상이 되고 있는 것이다.

[23] 문헌 6-(1), p. 86.
[24] Hans-Heinrich Voigt, Outline of Astronomy I, II; 유경로외 5인 공역, 천문학강요(일신사, 1992) 50–51쪽.
[25] Mauri Valtonen and Hannu Karttunen, The Three-Body Problem(Cambridge University Press, 2006)
[26] 최규홍, 천체역학(민음사, 1997).