ANALYSIS ON LINES AND CIRCLES IN SECONDARY SCHOOL MATHEMATICS TEXTBOOKS ACCORDING TO THE TYPES OF CONCEPT

H. K. PAK * T. W. KIM**

* 대구한의대학교 IT의료산업학과
hkpak@dhu.ac.kr
** 대구한의대학교 기초과학연구소
twkim@mail.ulsan.ac.kr

ABSTRACT

This paper treats how to teach mathematical concepts. We focus to a balanced, unified achievement for two patterns of concepts, intuitive concepts and logical concepts. Mathematical thinking is simply a combination of intuition and logic. In this paper we analyze certain textbook in secondary school mathematics from the viewpoint of patterns of concepts. We provide a concrete and practical investigation with basic geometrical concepts, that is line and circle and their position relation.

수학적 사고는 단적으로 직관과 논리의 결합이다. 본 논문에서는 효과적인 개념 학습을 위하여 직관적 개념과 논리적 개념으로 구분하여 중고등학교 교과서를 분석하였다. 구체적인 분석은 직관적 개념이 잘 반영되는 기하학 개념인 직선, 원, 직선과 원의 위치 관계를 대상으로 적용하였다.

1 서론

인류가 도구를 사용하면서부터 셈은 시작되었고 문명의 발전과 더불어 셈은 수의 개념으로 발전했으며 더 나아가서 수의 학문으로 자리했다. 이처럼 수학은 인류 문명의 발전과 함께 해왔다. 복잡하고 다양한 문명으로 발전한 오늘날의 수학은 무엇이며 수학을 어떻게 배우고 가르칠까는 단지 수학자나 수학교육자만의 고민은 아니다. 우리나라 중등 수학에서는 특히 대학입시라는 현실적인 상황에서 볼 때 더욱더 큰 관심사가 된다.

효과적인 개념학습을 위하여 박홍경 등은 수학적 개념을 직관적 개념과 논리적 개념, 형식적 개념으로 나누었다 [P-K-L]. 본 논문에서는 중등수학을 대상으로 하기 때문에 형식적 개념은 거의 나타나지 않는다. 이러한 의미에서 여기서는 형식적 개념을 논리적 개념으로 포함시킴으로써 수학적 개념을 직관적 개념과 논리적 개념으로 나누어 다루어도 충분하다.

*First Author

입시중심의 학교현장에서는 개념학습보다는 문제해결학습이 치중되고 있음은 부인할 수 없다. 그러한 문제해결도 계산위주의 시험문제해결이 강조됨으로써 개념학습의 측면에서 볼 때 논리적 개념에 편중되어 있다고 할 수 있다. 그로 인해 직관적 개념이 소홀하게 되어 균형적이고 통합적인 개념학습이 이루어지지 않게 되고 이것은 효과적인 개념형성을 어렵게 만든다.

한편 수학의 지도 순서에 대하여 김용운은 3가지 유형, 즉 역사적 순서, 이론적 체계 및 그 양자의 결합으로서 강의적 체계 순서를 제안하였다 [K 1986]. 이러한 강의적 체계순서를 수립하는 구체적인 사례연구로서 박홍경 등은 문제해결학습 측면에서는 각의 강의적 체계순서 [P-K-J, 2005] 를 다루었고 개념학습 측면에서는 벡터나 이를 포함한 선형대수학의 주된 개념 또는 연속성을 대상으로 강의적 체계순서를 연구하였다 [P-K-N, 2006], [P-K-L, 2007], [P-K, 2007].

수학적 사고는 단적으로 직관과 논리로 대별된다. 이에 대응하여 수학적 개념을 직관적 개념과 논리적 개념으로 구분하는 것은 자연스러운 발상이다. 이러한 개념유형의 구분은 양자의 통합적이고 균형적인 개념학습을 통하여 효과적인 개념형성을 도와준다. 따라서 효과적인 개념학습의 일환으로 수학적 개념을 직관적 개념과 논리적 개념으로 분석하는 것이 필요하다. 본 논문에서는 중등학교 현장에서 사용되고 있는 수학교과서를 대상으로 분석을 시도한다. 특히 구체적이고 실제적인 분석을 위하여 직관적 개념이 잘 반영되는 기하학적 개념을 대상으로 적용한다. 이러한 시도는 앞서 언급한 입시수학으로 인한 개념학습의 문제점을 해결하려는 하나의 출발점으로 볼 수 있다.

분석의 대상이 되는 수학 교과서는 중학교 약 16종, 고등학교 약 42종이 있다. 그 중 본 논문의 분석 대상인 직선과 원의 개념은 중고등학교에 걸쳐 있기 때문에 내용 분석의 일관성을 고려하여 저자가 동일한 교과서중 한 종을 임의로 선정하였다. 선정한 교과서를 중심으로 직선의 개념, 원의 개념, 직선과 원의 위치관계를 직관적 개념과 논리적 개념으로 분석하고자 한다.

본 연구와 관련하여 동일한 분석을 다른 교과서에 적용하여 비교하는 것은 흥미롭다. 그것은 직관적 개념과 논리적 개념 사이의 균형성을 고찰하는 자료로 활용할 수 있기 때문이다. 또한 기하학적 개념만이 아니라 다른 수학적 개념으로 확대하는 것도 흥미로울 것으로 보인다. 이를 통해 수학 전반에 있어서 통합적이고 균형적인 개념학습의 방안이 될 수 있을 것이다.

2 수학적 개념의 유형

이절에서는 [P-K-L] 에 의거하여 수학적 개념의 유형에 대해 살펴본다. 박홍경 등은 효과적인 개념학습을 달성하기 위해서 수학적 개념을 직관적 개념, 논리적 개념, 형식적 개념의 3가지 유형으로 분류하고 이들은 각각 3가지 수리철학인 직관주의, 논리주의, 형식주의에 의거한다고 주장하였다 ([P-K-L]). 본 논문은 중등수학을 대상으로 삼기 때문에 중고등학교에서 나타나는 형식적 개념은 논리적 개념에 포함시킴으로써 직관적 개념과 논리적 개념으로 나누어 분석하고자 한다.

직관적 개념은 감각적, 정서적, 신체적 활동이나 사고와 분명한 연계성을 가진다. 그 연계성이 기원에서든 응용에서든. 공간의 입장에서는 볼 때 감각적 공간과 수학적 공간 사이에 유클리드 공간이 있다. 따라서 이러한 연계성은 특히 2차원, 3차원 유클리드공간에서 고려되어질 때 자연스럽게 형성된다. 표현기법에 있어서는 감각을 통해 개념을 이해하는 방식으로서 다이어그램이나 함수의 그래프 등 다양한 그림으로 표현된다.

논리적 개념은 직관적 개념이 갖는 불확실성이나 오류가능성을 제거하기 위하여 다루고자 하는 대상과 그들 사이의 관계를 명백하게 논리적으로 기술하는 것이다. 그러기 위해서는 대상이 명확히 기호화되어야 한다. 이러한 논리적 개념은 통상 고차원 공간에서 구체적인 성분표시로 주어진다. 실제 현대수학의

기초인 집합론은 공리적 체계에 입각하여 수리논리에 의해 전개된다. 표현기법에 있어서 논리적 개념은 대상을 기호화함으로써 수식, 논리식, 도형의 방정식 등으로 표현된다. 이를 정리하면 <표 1> 와 같다.

<표 1> 2가지 유형의 개념 비교

유형	직관적 개념	논리적 개념
기본 철학	직관주의	논리주의
활동과 사고 측면	감각적 활동, 사고 →수학적 활동, 사고 연결	수학적 활동, 사고에서 직관의 불확실성, 오류가능성 제거
공간	저차원 공간	고차원 공간
표현기법	다양한 그림 함수(방정식)의 그래프	수식, 논리식 도형의 방정식(함수)

이러한 개념 유형은 개념이해, 계산기능, 응용의 개념학습의 3가지 요소와 다음과 같이 관계한다. 직관적 개념은 개념이해에 있어서 동기를 부여한다. 동기부여는 역사적으로나 현재시점이거나, 보편적이거나 개인적이거나, 학술적이거나 생활상이거나, 다양한 방식이 가능하다. 계산 기능에는 의미를 부여한다. 그래서 계산이 단지 기계적으로 행해지지 않고 의미를 통하여 개념이해를 돕는다. 또한 응용에 대한 다양한 아이디어를 제공한다. 이것은 동기부여로 환원하거나 실제적 필요성에 따라 새롭게 제기되기도 한다.

논리적 개념은 직관적 개념과 더불어 개념이해를 더욱 명확히 해준다. 직관적 이해만으로는 개념이 불완전하며 오류를 범할 위험성이 항상 내재한다. 이를 상보적으로 보완하는 것이 논리적 개념이다. 계산기능에 실제적인 힘을 부여한다. 훈련과 연습은 이러한 기능을 더욱 강화시킨다. 응용에 있어서는 이론적 객관적 근거를 제공한다. 이를 정리하면 <표 2> 와 같다.

<표 2> 개념의 유형과 요소 사이의 관계

요소	직관적 개념	논리적 개념
개념이해	동기 부여	명확화
계산기능	의미 부여	실제적 힘 부여
응용	새로운 아이디어 제공	이론적 근거 제공

3 Euclid 기하학과 해석 기하학

본 논문의 분석대상은 기본적인 기하학적 개념인 직선과 원이다. 또한 분석방법은 직관적 개념과 논리적 개념의 구분이다. 기하학의 입장에서 볼 때 직관적 개념은 유클리드기하학에 논리적 개념은 해석기하학에 밀접하다. 이러한 이유로 다루고자 하는 내용과 관련하여 유클리드기하학과 해석기하학의 역사적 순서를 고찰하는 것은 자연스럽다. 주된 내용은 [P-K-J]를 참조한다.

유클리드기하학은 그리스 고전적 논리주의에 기인한다. 인간과 자연을 대립적으로 간주하고 객관적 존재인 자연의 통일성, 공통성에 주목하여 로고스로부터 출발하는 논리적 연역을 중시하는 입장이다. 주된 연구대상은 점, 직선, 평면을 구성요소로 한 직선도형과 원, 구를 추가하여 구성할 수 있는 특수한 곡선도형이다. 가령 두 점을 지나는 직선은 단하나 존재한다는 결정조건에 의해 직선을 규정하거나, 원은 한 점으로부터 거리가 일정한 점들의 모임으로 규정한다. 이러한 대상에 대해 직관에 의해 직접적인 방법으로 길이(거리), 각, 면적, 체적 등의 기하학적 계량을 주로 고찰한다.

반면 해석기하학은 유클리드기하학의 초등기하학적 방법의 개선에서 나온 것으로 대수적 고찰을 통하여 기하학을 연구하는 것이라 할 수 있다. 이러한 고찰방법의 전환은 좌표에 의한 수와 점의 동일시에 의거한다. 가령, 직선 위에 좌표를 도입하여 점과 실수를 동일시함으로써 직선은 1차방정식과 동일시된다. 또한 유클리드평면은 좌표계를 도입함으로써 순서쌍 전체의 집합 과 동일시할 수 있다. 이로 인해 기하학은 대수적 방법에 의해 직관에 의한 도형의 연구에서 범하기 쉬운 방법적 오류를 피할 수 있고 대수학은 기하학적 해석을 통해 대수 연산에 의미를 부여할 수 있게 되었다.

유클리드기하학에서 해석기하학으로의 전환은 기하학의 연구 대상인 도형과 대수학의 연구 대상인 방정식이 동일한 대상의 다른 표현임을 깨닫게 해 주는 전기를 마련해 주었다. 즉 방정식은 도형의 대수적 표현으로 볼 수 있으며 도형은 방정식의 그래프로 본다.

4 직선과 원, 직선과 원의 관계에 관한 개념

이제 여기서는 II절에서 언급한 개념유형에 따라 직선의 개념, 원의 개념, 직선과 원의 위치관계를 직관적 개념과 논리적 개념으로 분석하고자 한다. 1절에서 밝힌 바와 같이 연구대상의 교과서는 동일한 저자를 가진 교과서 중의 하나를 임의로 선정하였다. 그 교과서를 [Le]로 표기한다.

4.1 직선의 직관적 개념과 논리적 개념

[Le]를 대상으로 <표 1>에서 정의한 직관적 개념과 논리적 개념에 입각하여 중학교 과정과 고등학교 과정에서 다루어지는 직선 개념을 살펴본다. 이로부터 직선의 개념은 직관적 개념에서 논리적 개념으로 이행하고 있음을 관찰할 수 있다.

1) 감각적 활동에서 수학적 활동으로의 연결

직선의 직관적 개념을 도입하기 위하여 [Le]에서는 먼저 감각적 활동에서 수학적 활동으로 연결로서 다음과 같은 내용을 소개하고 있다.

> 종이 위에 연필을 세워 놓고 누르면 점이 찍히고, 연필을 누른 상태에서 움직이면 선이 된다. 이와 같이 점이 움직인 자리는 선이 된다. 선이 움직인 자리는 면이 되고 면은 곡면과 평면으로 나눌 수 있으며 평면과 평면이 만나면 직선이 된다."
>
> (중학수학 1학년, p179)

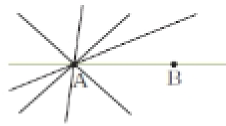
활동과 사고의 측면에서 볼 때 인용문에서 종이, 연필, 세워놓고 누른다, 움직인다 등은 감각적 활동이며, 점, 선, 만난다 등은 수학적 활동이다. 이러한 점에서 이 문단은 감각적 활동에서 수학적 활동으로의 연결로 볼 수 있다.

이러한 연결은 수학적 경험의 입장에서 볼 때 Davis와 Hersh가 말한 사고실험에 해당한다 [D]. 사실 수학적 경험은 감각적 활동에서 수학적 활동으로의 연결을 통해 시작되며 사고실험에 의해 경험을 쌓아 가기 때문이다.

2) 유클리드기하학적 직관적 정의

수학적 활동이나 사고의 대상이 된 직선의 개념은 3절에서 다룬 유클리드기하학의 입장에서 평면에서 직선의 정의를 도입하고 있다. 이는 다음 문장에서 찾을 수 있다.

> "오른쪽 그림과 같이 한 점 A를 지나는 직선은 무수히 많지만, 두 점 A, B를 지나는 직선은 오직 하나뿐이다."
> (중학수학 1학년, p. 181)



이는 2차원 공간인 평면에서 그림을 통하여 직선의 결정조건을 설명하고 있어서 직관적 정의라 할 수 있다. 다만 [Le]에서는 이를 적선의 정의로 명확히 밝히지는 않고 있다.

3) 해석기하학적 직관적 정의

이와 같은 직선의 직관적 정의는 좌표계를 도입하여 다시 고려한다. 즉 해석기하학의 입장에서도형의 대수적 표현으로서 직선의 개념을 설명한다. 먼저 일차함수를 배운 뒤 일차함수의 그래프가 직선이 됨을 소개한다.

> "서로 다른 두 점을 지나는 직선은 오직 하나뿐이다. 이와 같이 좌표평면 위에 두 점의 좌표가 주어지면 이들 두 점을 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구할 수 있다."
> (중학수학 2학년, p. 130)

이 인용문에서 먼저 2)에서 언급한 유클리드기하학적 직관적 정의를 토대로 일차함수의 그래프가 직선임을 말한다. 다만 이것만으로는 수직선과 같은 직선을 표현할 수 없다는 점에서 직선의 정의에 해당하지는 않는다. 이에 대해 직선의 정의는 일차방정식의 그래프임을 아래와 같이 소개하고 있다. 일차함수에서 일차방정식을 통해 직선의 (직관적) 개념을 소개하는 것은 함수의 개념이 방정식보다 늦다는 점에서 역사적으로는 반대이다 하지만 간단한 것에서 복잡한 것으로, 쉬운 것에서 어려운 것으로 나아가는 이론적 체계에서 볼 때에는 부합하는 순서라 할 수 있다.

> "일반적으로 x, y가 수 전체의 집합의 원소일때, 일차방정식의 해는 무수히 많고, 이들 해를 좌표평면 위에 나타내면 직선이 된다. 또 이 직선 위의 모든 점의 좌표는 일차방정식의 해이다.
> (중학수학 2학년, p133)

4) 논리적 개념

3)에서 살펴본 해석기하학적 직관적 정의에 의해 이제 직선의 논리적 개념이 명확히 주어진다. 사실 일차함수의 일반형이나 일차방정식의 일반형이 바로 직선의 논리적 개념이 된다. [Le]에서는 3)에서 인용한 문장들에 각각 아래 문장들이 이어서 등장하고 있다.

> "일차함수 $y = ax + b(a \neq 0)$의 그래프는 직선이다"
> (중학수학 2학년, p. 114)

"일차 방정식 $ax+by+c=0$(a, b, c는 상수, $a\neq 0$ 또는 $b\neq 0$)을 직선의 방정식이라고 한다"
(중학수학 2학년, p133)

3) 에서 언급한 바와 같이 전자는 일차함수의 그래프가 직선이 된다는 것을 말한다. 하지만 모든 직선을 표현하지는 못한다. 후자는 해집합으로서 일차방정식의 그래프는 정확히 직선을 정의하는 것을 말한다.

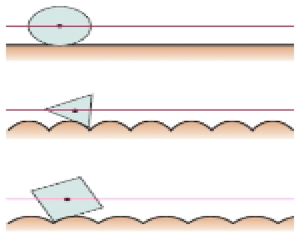
이처럼 [Le] 에서는 중학교 2학년 과정에서 직선의 직관적 개념과 논리적 개념이 모두 소개되어진다. 한편 고등학교 과정에서는 직선에 대한 논의가 논리적 개념으로 다루어진다. 이는 중학교에서 이미 직관적 개념과 논리적 개념 모두를 학습한 것으로 보기 때문이다. 따라서 고등학교 과정에서 직선의 직관적 개념을 상기시키는 일은 통합적이고 균형적인 개념학습을 위해 중요하다.

4.2 원의 직관적 개념과 논리적 개념

기본적인 직선도형의 하나인 직선과 마찬가지로 기본적인 곡선도형의 하나인 원에 대하여 개념 유형을 분석하자. 그러면 [Le]에서는 직선과 마찬가지로 직관적 개념에서 논리적 개념으로 이행하고 있음을 관찰할 수 있다.

1) 감각적 활동에서 수학적 활동으로의 연결

> “우리는 자동차 바퀴가 삼각형이나 사각형이 아닌 원 모양인 것을 당연하게 생각한다. 그런데 바퀴는 왜 원 모양일까? 그것은 효율성과 안정성 때문이다. 바퀴는 일정한 힘을 가해 굴릴 수 있어야 하고 덜컹거리지 않게 물건을 운반할 수 있어야 하는데, 이것은 원 모양일 때만 가능하다. 즉, 바퀴의 축과 가장자리 사이의 거리가 항상 일정하기 때문에 길만 평평하게 잘 닦여 있다면 중심이 직선으로 움직여 덜컹거릴 일이 없다.” (중학수학 1학년, p. 229)



자동차 바퀴, 굴린다, 평평하다 등은 감각적 활동이며 삼각형, 사각형, 원 등은 수학적 활동이다. 이러한 표현에서 감각적 활동에서 수학적 활동으로의 연결을 주는 것으로 볼 수 있다.

2) 직관적 개념

직선의 경우와 마찬가지로 원의 정의도 먼저 유클리드기하학의 입장에서 주어진다. 하지만 직선과 달리 정의로서 설명하고 있다.

> **“평면 위의 한 점 O로부터 일정한 거리에 있는 모든 점의 집합을 원이라 하고, 이것을 원 O로 나타낸다. 이때, 원의 중심 O와 원 위의 한 점 A를 이은 선분 OA를 원의 반지름이라고 한다.”**
>
> **(중학수학 1학년, p. 232)**

3) 논리적 개념

직관적 개념에 이어 좌표를 도입함으로써 해석기하학의 입장에서 도형의 방정식으로서 원의 개념을 소개한다. 이것은 원의 논리적 정의에 해당한다.

> “좌표평면에서 중심이 $C(a,b)$이고 반지름의 길이가 r인 원 위의 임의의 점을 $P(x,y)$라고 하면 $|CP|=r$이므로
>
> $$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$
>
> 양변을 제곱하면
>
> $$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$
>
> 과 같은 원을 나타내는 방정식을 원의 방정식이라고 한다.”
>
> (고등수학, p. 215)

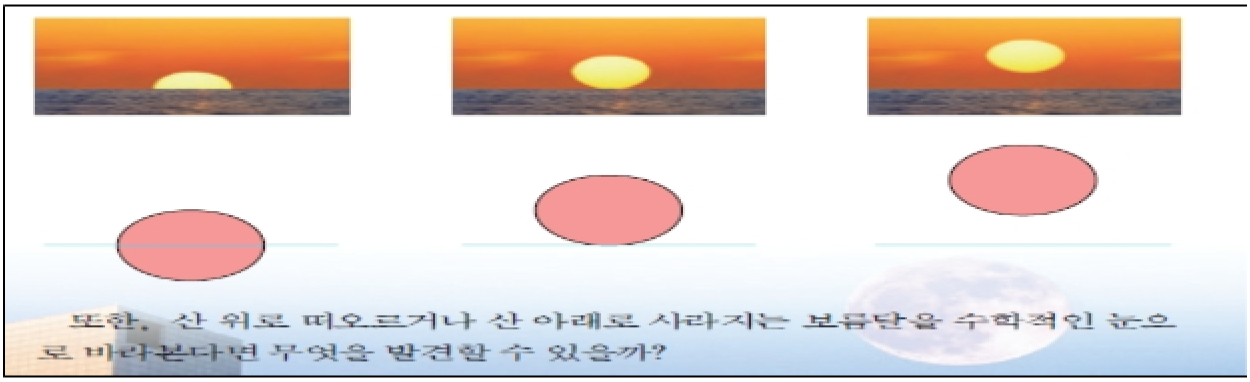
4) 2차 곡선으로서 원의 논리적 개념

원은 원추곡선의 하나이다. 이러한 측면에서 원의 논리적 개념은 아래와 같이 2차 곡선의 특수한 형태로서 표현된다.

> "$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$을 원의 방정식의 표준형이라 하고, 방정식
> $$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$
> 을 원의 방정식의 일반형이라고 한다"
>
> (고등수학, p. 215)

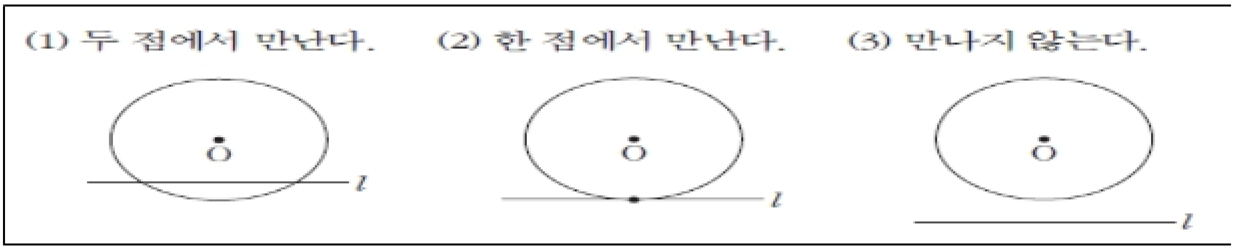
4.3 원과 직선의 위치관계에 대한 직관적 개념과 논리적 개념

앞에서 직선과 원의 직관적 개념과 논리적 개념을 살펴보았다. 이것의 활용으로서 이들의 위치관계를 살펴보자. [Le]에서는 직선과 원의 경우와 마찬가지로 직관적 개념에서 논리적 개념으로 이행하고 있다.
1) 감각적 활동에서 수학적 활동으로의 연결



(고등수학, p.214)

수평선을 직선으로 태양을 원으로 보는 것을 통하여 이들 사이의 위치관계에 대한 개념이 감각적 활동에서 수학적 활동으로 자연스럽게 연결된다. 또한 산과 달을 통해서도 마찬가지 연결을 꾀하고 있다.
2) 직관적 개념



(중학수학 1학년, p. 239)

유클리드기하학의 입장에서 볼 때 먼저 직선과 원의 직관적 개념을 사용하여야 한다. 이 때 직선과 원의 위치관계는 위에서와 같이 이들의 교차성을 통해 쉽게 설명할 수 있다. 만나거나 만나지 않거나. 만나는 경우를 한 점이거나 두 점이거나에 따라 다시 나누면 모두 3가지 경우를 고려할 수 있게 된다.
3) 논리적 개념

2)에서 살펴본 위치관계에 대한 직관적 개념은 좌표를 도입하여 해석기하학의 입장에서 고려할 수 있다. 그러면 직선과 원의 논리적 개념을 사용하면 이들의 교차성은 그들 도형의 방정식의 교차성에 해당한다. [Le]에서는 아래와 같이 일차함수와 원의 방정식의 교차성을 소개하고 있다.

원 $x^2+y^2=r^2$과 직선 $y=mx+n$의 교점의 개수는 두 도형의 방정식에서 y항을 소거하여 만든 x에 대한 이차방정식 $x^2+(mx+n)^2=r^2$의 실근의 개수와 같다.

(고등수학, p.219)

우리의 논의를 따르면 일차방정식과 원의 방정식의 교차성을 다루는 것이 보다 일반적이다. [Le]에서는 소개하고 있지는 않지만.

나아가 이러한 위치관계는 원만이 아니라 원추곡선의 경우로 확장할 수 있음을 쉽게 이해할 수 있다. 이 경우 논리적 개념으로는 원 대신에 2차 곡선이 사용된다.

5 제언

지금까지 논리적 개념 치중의 문제해결학습의 문제점을 해결하고 효과적인 개념학습을 위하여 중고등학교 교과서를 대상으로 개념유형의 측면에서 직관적 개념과 논리적 개념으로 나누어 분석하였다. 구체적이고 실제적인 분석이 될 수 있도록 적용대상은 직관적 개념이 잘 반영되는 기하학적 개념 중에서 가장 기본이 되는 직선과 원의 개념을 선정하였다.

우리의 분석으로부터 몇가지 결과를 도출할 수 있다. 우선 [Le]에서는 직선의 원의 개념 모두 직관적 개념에서 논리적 개념으로 이행함을 관찰할 수 있었다. 또한 직관적 개념은 감각적 활동에서 수학적 활동으로의 연결을 통하여 자연스럽게 도입하고 있었다. 이는 기하학의 역사적 순서에 부합할 뿐만 아니라 이론적 체계에 있어서도 감각적이고 직관적인 내용에서 추상적이고 논리적인 내용으로 나아간다는 점에서 동기부여나 흥미유발을 일으킨다고 할 수 있다.

다음으로 개념형성에 있어서 정의는 명확해야 한다. 이러한 점에서 직관적 개념과 논리적 개념이 명확히 구별되기 위해서는 무엇보다 직관적 정의가 명확해야 한다. [Le]에서는 원과는 달리 직선의 경우는 정의로서 명확히 언급하고 있지 못한 것은 아쉬운 부분이라 할 수 있다.

서론에서 제안한 바와 같이 본 연구와 관련하여 동일한 분석을 다른 교과서에 적용하여 비교하는 것은 흥미롭다. 그것은 직관적 개념과 논리적 개념 사이의 균형성을 고찰하는 자료로 활용할 수 있기 때문이다. 또한 기하학적 개념만이 아니라 다른 수학적 개념으로 확대하는 것도 흥미로울 것으로 보인다. 이를 통해 수학 전반에 있어서 통합적이고 균형적인 개념학습의 방안이 될 수 있을 것이다. 게다가 이러한 개념학습은 계산기능만이 아니라 개념이해와 응용력을 향상시킴으로써 문제해결학습에도 더욱 효과적임은 자명하다.

REFERENCES

[Le1] 이강섭 외 4 , 중학수학 1학년, 2011, 지학사.

[Le2] 이강섭 외 4 , 중학수학 2학년, 2011, 지학사.

[Le3] 이강섭 외 4 , 중학수학 3학년, 2011, 지학사.

[Le4] 이강섭 외 3 , 고등수학 , 2008, 지학사.

[D-H] P. J. Davis and R. Hersh, 수학적 경험 (상), 경문사, 1996.

[P-K-J] 박홍경, 김태완, 정인철, 수학교육에 있어서 각의 개념지도 방안, 한국수학사학회지 18(2005), 85–100.

[P-K-N] 박홍경, 김태완, 남영만, 벡터개념의 강의적 체계순서에 관하여, 한국수학사학회지 20(2007), 59–72.

[P-K-L] 박홍경, 김태완, 이우동, 수학적 개념의 유형과 효과적인 개념학습, 한국수학사학회지 20(2007), 105–126.

[P-K] 박홍경, 김태완, 미적분학에서 연속함수의 개념 지도, 한국데이터정보과학회지 18(2007), 859–868.

[K] 김용운, 수학사학과 수학교육, 한국수학사학회지 3(1986), 21–33.

[H] 한병호, 수학이란 무엇인가, 진리세계사, 1984.