THE HISTORICO-GENETIC PRINCIPLE AND THE HERMENEUTICAL METHODEAS THE THEORETICAL BACKGROUND OF USING HISTORY OF MATHEMATICS IN LESSON
수학사 도입의 이론적 근거－역사 발생 원리와 해석적 방법론

HAN, Kyeonghye

순천향대, 충청남도 아산시 순천향로 22, 대한민국
stern251@hanmail.net

ABSTRACT

본 논문에서는 수학 수업에서의 수학사 활용의 이론적 근거를 비판적으로 고찰하도록 한다. 우선 수학적 인식에 관한 개인적인 발달과 역사적 발달 사이의 관계를 토대로 수학사 활용의 교육적 유용성을 가장 강력하게 이론적으로 뒷받침하는 역사 발생 원리의 생성, 전개 과정 및 그 의의와 한계 등을 논한다. 또한 인간 정신의 소산을 정확히 이해하려는 기술론인 해석학적 방법이 수학사 활용과 관련하여 어떻게 적용되는지를 살펴보도록 한다. 그리고 실제로 많은 논의에도 불구하고 수학 수업에 수학사적 내용이 광범하게 도입되지 않는 현실적 이유를 위 두 이론이 지닌 현실적 한계와 관련하여 논의하도록 한다.

1 논의의 전개

수학사를 교육적 측면에서 고찰하여 이를 수업에 활용하고자 하는 경향이 강해진 것은 1970년대 중반부터 였는데 논의는 크게 세 가지 측면에서 진행되었다.

첫째, 학문 이론적 측면에서 보자면 수학교육의 근본적인 목표는 수학에 관한 균형 잡힌 상(像)에 도달하는 것이다. 기존의 수학 교육에서는 즉 공리, 결론, 증명 등으로 이루어진 형식적 체계와 동일시되는 순전히 형식적인 상을 그리도록 하게 되므로 이를 바로잡아 균형을 이루도록 해야 한다. 이를 위하여 수학을 이론의 발전이나 변화라는 인간 간의 관계를 토대로 한 역사적 현상으로 받아들여야 한다는 주장이 대두되었다. 이러한 학문 이론적 측면은 무엇보다도 교사들에게도 중요하다고 할 수 있다(Klein, 1924). 왜냐하면 수학에 대하여 적절한 상을 가지지 않은 상태에서 그것을 알린다는 것은 어려운 일이기 때문이다.

둘째로 교육 이론적 측면에서 보자면 우선 수학사에 대한 고찰은 수학뿐만이 아니라 문화적 배경에 대한 교육에도 일조한다고 볼 수 있다. Flegg는 "문화적인 배경은 왜 특정시대에 특정한 방향으로 수학적 개념이 발달했는지를 보여준다. 역으로 수학사에 대한 연구는 일반 역사가들이 통상 잊어버리는 문화적 배경이 되는 사실을 조명한다"(Flegg,1976, p.68) 면서 "수학은 우리 문화를 구성하는 데서 빠뜨릴 수 없는 부분이며 수학사를 가르치지 않으면 수학이 무엇인지에 대하여 부정확한 개념을 심어줄 수" 있으므로 "수학사는 정치사, 과학사, 예술사 등처럼 반드시 가르쳐야 한다" 고 주장하였다(Flegg, 1976 p.307).
그런 한편 수학사는 역사 수업의 긍정적 기능을 담당하게 될 수도 있다. Heymann에 따르면 "문화적 연관성/ 연속성"의 견지에서 역사적 지식을 얻게 된다고 한다(Heymann, 1996). 말하자면 수학과 "나머지 세상"과의 다양한 관계를 통찰할 수 있게 한다는 것이다. 이러한 점에서 수학사는 좋은 역사 수업과 비슷한

교육 목표를 따르기도 한다. 또한 수학은 우리 문화의 구성 요소이며, 역사적 고찰 없이는 파악할 수 없는 문화적 현상으로 Scriba는 다음과 같이 주장하였다.

> "수학사를 수학 수업－중등 혹은 고등 교육－을 위해 활용할 수 있는지를 묻는 것은 잘못되었다. 오히려 '수학사 없는 수학을 생각할 수 있는가'라고 질문을 던져야 한다. 모든 것은 다음의 대답에서 비롯된다. '역사 없는 수학은 결코 있을 수 없다.'" (Scriba, 1983, p.113)

셋째로 교수 학습 방법론적 측면에서 보자면 수업에 역사적 요소를 도입함으로써 여러 가지 긍정적인 효과를 거둘 수 있다. 무엇보다 역사적 고찰은 수학의 이해를 돕는 수단으로 작용한다. 말하자면 "보편화된 개념에 대해 구체적이고도 세세하게 그 역사적 과정을 추적하는 것은 일반화와 추상화의 본질과 역할을 이해하도록 가르치는 최선의 길" 이라 할 수 있다. (Jones, 1978, p.61) 그리고 통상적인 수업과는 달리 수학을 역동적 과정으로서 인식할 수 있게 한다. "전통적인 수학 교수는 역사적 과정이 끝나는 지점에서 시작되기 때문에 그 분야를 이해하는 게 어려워"지는 것이다(Riedl, 1980, p.306). Boyer는 Cicero를 인용하면서 "네가 태어나기 전에 어떤 일이 일어났는지를 알 수 없다는 것은 영원히 어린아이로 남아있음을 뜻한다"(Boyer, 1964, p.24)고 갈파하였다.

2 장애와 한계

수학사의 활용에 대하여 긍정적인 시각만 존재하지는 않는다. 우선 수학사 활용에 긍정적인 입장을 표명한 Freudenthal 역시 수학사에 대한 지식을 모든 학생들에게 요구할 수는 없다는 견해를 나타내어 하나의 선택 가능한 방안으로 간주했다.

이와는 약간 다른 맥락에서 Spalt는 우려를 표명했다. 수학의 역사를 다룬 다양한 출판물에서 제시된 목표는 어느 정도는 타당하지만 그로 인해서 수학의 역사를 과소평가하거나 왜곡 또는 학문적 의미에서 가볍게 다루게 되지 않을까 생각했던 것이다.(Spalt, 1987) 이러한 맥락에서 다음과 같은 주장이 제기되었다.

> "어떤 특정 분야에서 개인의 지적 발달은 이 분야의 역사적 전개과정과 비슷하게 진행된다는 전제 위에서 만들어지는 교육학적 개념을 설정하려는 시도는 좌초되었다고 간주해야 한다."(Richenhagen, 1990 p.174)

또 아래처럼 말한 학자도 있다.

> "역사적 발전 과정을 배우고 난 후에 학생들은 수학 자체에 더욱 소원해질 수 있다" (Nagaoka, 1989p, 176)

이밖에 이론적으로는 타당하다고 인정하면서도 그 실질적 적용가능성에 대해서는 다소 회의적인 시각도 존재한다. 전통적인 연역적 전개 양식은 우아하고 체계적이며 명확하고 경제적인 교재 구성 방식을 가지는데 반해 수학사를 활용한 전개 과정은 자칫 지루해지기 쉬우며, 정확성과 우아함이 결여되기 쉽고 일반적인 이론적 체계화에 이르기가 어려울 뿐만 아니라 교재구성이 곤란한 경우가 많다는 것이다.(우정호, 1998, p.66)

하지만 많은 교사들이 수학사 도입에 긍정적이면서도 실제 수업에 활용하지 않는 이유로는 무엇보다도 하나의 주제를 다루는데도 시간이 상당히 많이 소요된다는 사실이다. 또 다른 이유로 수학사를 수업에 통합하여 다룰 수 있을 정도로 배경 지식을 쌓기가 힘들다는 현실도 무시할 수 없다. 추가적인 수업 자료의 도입으로 시간을 허비할지도 모른다는 우려도 아울러 제기된다. 게다가 전통적인 수학 수업은 그 목표까지

포함하여 수학사와 간극이 너무 커서 내용을 수업에 적합한 형태로 조직할 수 있는 교사가 극히 적다는 난점도 존재한다.

그렇지만 Jahnke에 따르면 수학사야말로 연관이 없어 보이는 연산 더미에 의미를 불어넣어줄 수 있으므로 수업의 보조 자료에 그쳐서는 안 되며 오히려 중요한 수업 내용이 되어야 한다고 주장하였다. 즉 인류가 직면했던 문제에 대한 해결책으로서 개념과 기술이 생겨났던 당대의 의미를 되새겨줄 수 있다는 것이다. (Jahnke 1991, p.6)
한편 어떤 학자들은 오늘날의 수학 교재가 지나치게 문제 위주로 구성되어 있는 사실을 지적하기도 한다.

> "많은 수의 연습문제가 인위적 성격을 띤다. 이들은 오로지 교실에서만 쓰일 용도로 구성되고 고안되었다. 학문으로서의 수학이나 어떤 종류의 전문적 수학과도 유사성을 띠지 않는다."(Doerlfer, 1986, p.63)

수업 계획을 연산의 수준으로 작성하지 못하면 아예 고려 대상에서 제외해 버린다는 지적도 있다.

> "충분한 연습 기회를 줄 수 없는 주제는 학교 수학으로는 적합하지 않다. 심지어 다양한 연습 문제를 가지고 학교 수학을 분류할 수도 있다"(Doerlfer, 1986, p.63)

이러한 방향으로 진행되는 수업은 사실 수학을 세련된 계산술의 총화로 여기는 입장에 근거한 것이라 해도 과언이 아니다. 그 결과 학생들은 수학이란 개별적 과제 또는 문제를 모아놓은 것에 불과하다고 보게 되며, 수업 계획에 따른 단거리의 행보는 가능할지 모르나 수학 전체의 상을 그린다거나 그 가치를 인식하는 데는 도달하지 못하게 된다. (Kronfellner, 1998, p.18) 이에 대해 바겐샤인(Wagenschein)은 이의를 제기한다. (Wagenschein, 1962, p.67)

> "이렇게 수업 계획을 좌우하는 재고학문(언젠가 무엇을 위해선가 사용하게 되니 주의해 두어라!)으로서의 관점은 논리적으로 잘못되었다고 할 수 없으나 교육적으로 결코 옳다고 할 수 없다. 재고를 쌓기 위해서 늘 서두르게 되며 이는 학생들을 고무시키는 게 하니라 지루하다고 느끼게 만들 따름이다. 학생들은 얼마 지나지 않아 거의 대부분을 잊어버리고 만다."

한편 평가와 관련해서도 수학사 도입의 난점이 존재한다. 교사는 학생, 학부모 모두 쉽게 수긍하는, 될 수 있는 대로 공정한 평가 기준을 가지기를 원한다. 이는 점수를 매기고 그에 근거한 성적을 내야 하는 현실 때문에 불가피하다. 이로 인해 시험을 대비한 연습 문제를 될 수 있는 대로 많이 풀어봐야 한다고 생각하게 되며, 이들 문제는 시험 문제와 유사하면서도 지나치게 유사해서는 안 된다. 수업에서 수학사가 차지하는 비중이 높아지면 성취도 평가에도 포함시켜야 하지 않는가라는 문제가 자연스럽게 제기된다.

> "수학 수업이 목표가 어떤 방향으로 설정되는지 상관없이 시험이나 성취도 평가에 통합되어야 한다. 시험 문제들은 수업의 중심이 무엇이었는지를 반영한다."(Reichel, , H-Ch. : 1991, p.158)

수학사 관련 내용을 시험에 포함시키지 않는다는 전제 위에 수업에 도입한다면 여러 가지 문제가 발생한다. 특히 수학성적이 낮은 학생이나 그 부모들은 '중요한 것에서 벗어난다든지' '시험과 관련 있는 매우 중요한 문제 연습을 소홀히 한다든지' 하는 이유로 격렬하게 저항할 것이다.

이러한 상황이 수업에 수학사 도입을 꺼리도록 하는 주된 요인이다. 따라서 절충적 입장에서 교사나 일부 학자들 역시 수학사를 수업 분위기 형성이나 수업 내용을 좀 더 잘 받아들일 수 있도록 주의를 환기시키기 위한 방안 정도로 수학사를 수업에 도입하기를 원한다.

그렇다면 수학 수업이 역사적 지식을 습득하도록 하는 목표를 가져야 하는가? 이는 어떤 종류의 학교 유형에도 걸맞지 않는다. 실업계 학교에서는 오히려 역사와 무관한 수업 방식을 선호할 것이다. 하지만 이 학교에서도 수학을 수단시 하면서 일반 소양 교육 방향으로 갈 수 있는 기회를 전적으로 쓸모없다고 치부

하지는 않는다. 이는 수학의 다양한 측면 가운데 어떤 점을 중시하는가 또는 교사가 어떤 의도를 가지고 있는가에 따라 달라진다.(Kronfellner, 1998, p.19–20)
이러한 가운데 수학사 도입의 가장 강력한 이론적 근거로 자리잡아 온 것은 바로 역사 발생 원리이다.

3 역사 발생 원리

3.1 발생 원리의 생성과 발전

수학교육에서 발생적 원리란 발달의 개념을 수학교육학의 중심에 놓고 수학의 학습-지도의 문제를 다루는 것으로 생성 배경으로는 무엇보다도 Euclid 기하학의 종합적 연역적 방법에 대한 강력한 비판을 들 수 있다.

구체적으로 보자면 Arnauld의 <새 기하학원론>*Nouveaux elements de geometrie*(1667) 에서 구체물의 참조를 허용하고 초등기하의 개념과 정리의 순서를 자연스럽게 재조정한 새로운 접근법과 증명을 제시한 것이 그 원조라 할 수 있다. 즉 "스콜라적이고 형식적인 수업 방식이 아닌 자연스러운 수업 방법으로서" 제기되었던 것이다(Schubring, 1978, p.18). 그밖에 Ramus, Bacon, Descartes 등도 Euclid 기하학의 접근법을 강력히 비판, 대안적인 해석과 접근법으로 발생적 관점을 주장하기도 하였다(우정호, 1998).
그 후 조금 더 진전된 이론적 틀에 입각한 일반적인 교수학적 구상으로 '역사 발생 원리'가 등장한다. 즉 19세기에 이르러 Lindner는 "소재를 그 자연스러운 순서에 따라 다루어 간단한 것으로부터 합성된 것으로, 원인으로부터 결과에, 보다 작은 것으로부터 보다 큰 것으로, 쉬운 것에서 어려운 것으로 나아가되, 하나하나의 동인을 아주 주의해서 서로 결합하는 것"을 발생적 방법이라 정의하고 발생된 순서에 따라 수학을 제일 먼저 지도해야 한다고 주장하였다(Schubring, 1978, p.62).

이처럼 인식의 발달과정에 근거하여 제기된 발생 원리는 19세기 후반에 들어서 생물학적 발달이론과 결합하면서 변화를 일으키게 된다. 진화론을 주창한 Darwin의 영향을 받은 E. Haeckel이 형식화한 '재현의 법칙', 즉 모든 개체는 발달 과정에서 역사적 과정에서 보였던 계통 발생을 재현한다는 것을 인식의 발생 원리에도 적용하였으며, 이를 이른바 역사 발생 원리라 일컫게 된 것이다. 발생적 원리는 19세기 후반에 형성된 일반적인 교수학의 기본원리로서 널리 인정되기는 하였으나 실제로 당시 중등교육의 현장에서는 광범하게 채택되지 않았다. 그러다가 Felix Klein(1849–1925)이 주창한 수학 교육 개혁의 움직임과 더불어 새로운 자각이 일어나게 되었다. Klein은 역사 발생 원리에 근거하여 수학사 활용을 한층 더 강화된 형태로 요구하였다.

> "물론 우리는 수학교육학적 입장에서 아동에게 너무 일찍 그처럼 추상적이고 어려운 것을 제시한다는 인상을 주지 않도록 해야 한다. 이 점에 대한 나의 견해를 정확히 규정하기 위하여 생물학적 기본 법칙을 인용하고자 한다. 그에 따르면 개체는 종족의 전 발달 단계를 단축된 순서로 거치면서 발달한다. 이러한 생각은 오늘날 모든 사람들의 교양이 되어 있다. 나는 이 법칙은 모든 수업과 마찬가지로 수학 수업 역시 반드시 따라야 할 일반 법칙이라고 본다. 즉 전 인류가 원시적 상태에서 높은 인식 수준으로 비약하게 되는 것과 똑같이 수학 수업 역시 소년기의 자연스러운 요구에 부응하여 점차 더 높은 내용으로 나아가서 결국 추상적인 공식화에까지 이르도록 해야 하는 것이다."(Klein, 1924, p.289)

다시 또 다른 저명한 수학자 Poincaré 역시 역사 발생 원리를 지지하였다.

> "어떤 동물의 태아 발달은 지질학적 시대의 그의 선조의 전체 역사를 매우 짧은 기간 동안에 경과한다고 동물학자들은 주장했다. 인간의 정신 발달에서도 마찬가지인 듯하다. 교육자는 아동을 그의 선조가 통과한 모든 단계를 매우 빨리 그렇지만 어떤 단계도 소실되지 않게 인도해야 한다. 이러한 이유에서 학문의 역사는 우리의 으뜸가는 안내자이어야 한다."(우정호, 1998, p.280, 재인용)

역사발생 원리의 또 다른 주창자 Toeplitz 는 대학 강의에서도 역사 발생 원리를 적용하려고 시도하였다. Toeplitz 는 사후에 발간된 “미적분개론”의 서문에서도 다음과 같이 밝히고 있다.

> “오늘날 우리가 규범적인 필수 요목으로 간주하여 가르치고 있는 미적분 계산의 이 모든 기본적인 내용; […] 어디서도 다음과 같은 의문은 제기되지 않는다: 왜 그렇게 하는가? 어떻게 해서 그렇게 되었는가? 이 모든 규범이 한때는 절실한 탐구의 목표였으며 창안되던 당시에는 아주 흥미로운 취급 대상이었음에 틀림없다. 만일 우리가 이들 개념의 근원으로 다시 돌아간다면 시간이 흐르면서 쌓인 먼지가 사라지고 다시 생명력 넘치는 모습으로 우리 앞에 나타날 것이다.”(Toeplitz, 1963 p. v)

Klein과 Poincaré가 언급한 역사 발생 원리는 하나의 가설로 제기된 것이며 이를 실제로 수업에 적용하기 위해서는 구체적인 방법론에 대한 모색이 필요했다. 수학교육에 대하여 수학사 도입의 두 가지 방향에 대해서는 Toeplitz 가 다음과 같이 지적하였다.

> “학생들로 하여금 희곡화를 통하여 실연해봄으로써 문제설정, 개념 및 사실을 발견하게 하거나ㅡ나는 이것을 직접적인 발생적 방법이라 부른다ㅡ교사 자신이 역사적인 분석을 통하여 각 개념이 원래 의미와 실질적인 핵심이 무엇인지를 알아내고 그로부터 이 개념을 가르치기 위한 결론을 끌어내는 것이다. 이는 역사와 그 자체로 관계를 가지는 것은 아니며 간접적인 발생적 방법인 것이다.”(Toeplitz, 1927, p.92)

그렇지만 당시 생물학적 발생의 기본 원리를 개인의 학습과정에 직접 적용하는 데 대해서는 회의적인 반응 역시 적지 않았다. 실제로 학생으로 하여금 학문의 역사에서 보이는 모든 우회도로와 막힌 길을 답습해 보게 하는 것은 어리석어 보이기 때문이다.

3.2 역사 발생 원리의 적용

Klein과 Toeplitz가 역사 발생 원리의 적용을 그토록 강력하게 주장한 배경에 대한 의문이 제기된다. 사실상 중등교육과정의 기하 영역 중 많은 내용이 Euclid의 <원론> 을 고스란히 담고 있는데도 말이다. 여기서 역사적 원전 자체에 관한 연구와 발생 원리의 배경이 되는 생각의 차이를 발견할 수 있다. 곧 역사적 원전은 그 자체가 수학적 인식이 어떻게 성립했는지에 관한 통찰을 주지는 않는다는 점으로 Töplitz 역시 발생 원리의 적용을 다음과 같이 주장했다.

> “역사 자체가 중심이 아니라 문제, 사실, 증명의 발생 그리고 이러한 발생 과정에서 결정적인 전환점이 무엇인지가 중심인 것이다.” (Toeplitz, 1927, p.94)

Wagenschein은 Toeplitz에 찬동하여 “발생은 역사가 아니다!”라는 기치를 내걸고 역사 발생 원리가 수학사를 다루면서도 역사 자체를 위한 것이 아니라 수학적 문제, 개념, 이론의 성립에 관한 통찰을 말하는 것임을 분명히 하였다(Wagenschein, 1989). 이러한 성립 과정이 밝혀질 때 비로소 역사적 원전을 수업에 성공적으로 투입할 수 있다는 것이다.
즉 수학적 인식에 이르는 유사한 상황에 처해 있는 것으로 가정하여 수학적 개념 등을 찾아내는 시도를 하는 것으로 Alexis-Claude Clairaut는 교과서 <기하학 원론> 에서 그러한 생각을 가지고 있었음을 보여준다.

> “나는 이 학문 역시 다른 모든 분야와 마찬가지로 점차적으로 세워진 것이라 생각했다[…] 그리고 이러한 최초의 과정은 초보자의 이해가 없이는 불가능했을 것이다. 왜냐하면 그렇게 발전시킨 이 역시 초보자였으므로.”(Vohns, 2003, p.8, 재인용)

Clairaut는 발견자의 인식이 어떻게 변화하는지를 찾아내려고 했다. 역사가의 눈으로 보면 이러한 사변적인 추정의 과정이 반드시 믿을 만한 것은 아니지만 교육자의 관점에서는 발생적 특성을 특별히 강조할 수 있는 흥미로운 가능성을 열어주는 것이다.
발생적 수학 수업의 주요 주창자 중 한 사람인 Wittenberg는 자신의 저서 <교육과 수학>*Bildung und Mathematik*에서 자신의 방법을 기하학에서 구체화시켰다. 그는 공리적이고 연역적인 방법에 대하여 명백히 반대하는 입장을 설파하였다(Wittenberg, 1990).

> “기하학에서는 무엇을 다루는가? 자와 컴퍼스로 공책이나 칠판 위에 그릴 수 있는 도형과 우리 주위의 세상, 들판이나 건물, 사용하는 대상에서 발견할 수 있는 도형일 것이다. 주의해 보면 공리나 증명에 관한 것도 아니고 크기가 없는 점이거나 두께가 없는 선에 관한 것도 아닌 것이다. 이 둘은 모두 내적인 요구가 없이 학생들에게 강제할 수 있는 동기가 없을 뿐 아니라 적절하지도 않다.”(Vohns, 2003, p.9)

그의 제안에 따르면 역사적인 사실성을 고스란히 보여줌으로써 성과를 올릴 수 있는 것은 아니지만 흥미로운 방법을 찾을 수는 있다. 즉 그는 역사 발생 원리를 사실의 전개라는 측면보다 아동의 발달이라는 측면에서 구현하고자 했다는 것이 명백하다.

3.3 아동의 발달과 (역사적) 사실의 발달: 심리 발생 원리와의 통일

Klein의 동료인 Pringsheim은 1898년에 이미 역사 발생 원리의 고정된 한 측면에 대하여 의문을 제기하였다.

> “우리는 학문의 발달사에서 이전 세대가 범했던 결정적인 오류나 결함을 피하는 것을 배워야 한다 […] 더 나은 길이 보이지 않는 한 각자는 학문 자체의 발전과정과 근본적으로 같은 길을 거쳐야 한다. 그러나 더 나은 길이 있다면 그 길을 가리켜 줄 뿐만 아니라 그 길을 가도록 해야 하는 게 교사의 의무이자 과제이다.”(Vohns, 2003, p.12)

한편 많은 교육학자들도 역사 발생 원리에 대하여 회의적인 입장을 취하기도 했다. Lutz Führer는 역사발생 원리를 절대시해서는 안 된다며 그 이유로 첫째, 개인의 발달과 인류의 문화 단계의 전개 사이에 보이는 소위 평행성이라는 것은 단지 표면적인 관찰을 근거로 해서 유효한 것이며, 둘째, 역사적인 길은 그다지 정확히 알려져 있지 않을 뿐 아니라 도달하고자 하는 지식으로 가는 더 쉽고 짧고 분명한 다른 길이 있을 수도 있기 때문이라고 주장하였다(Fuehrer, 1986). 그래서 더욱 포괄적으로 이해되는 심리 발생 원리를 제기하였다.

역사 발생 원리가 자료의 발달을 중심에 놓고 제기된 것이라면 심리 발생 원리는 아동의 발달을 중심에 놓는 것이다. 이러한 관점에서 학생은 고유한 인식을 지어나가는 목수로 이해된다. 심리 발생 원리는 역사 발생 원리와 비슷하게 20세기 초반에 당시 주류를 이루던 Herbart학파의 주장에 따라 정해진 대로 진행되는 수업 방법에 반대하는 것을 기조로 한 수학교육 개혁의 커다란 흐름과 더불어 상승기류를 탔다. 교육개혁가인 Johannes Kühnel(1869–1928)은 심리 발생 원리에 기초한 수업방법을 다음과 같이 규정하였다.

> “가르치고 제시하고 전달하는 것은 […] 과거의 수업기술이며 오늘날에 와서는 그 가치가 적어졌다 […]. 학생들 역시 지식을 습득해야 하겠지만 […] 우리는 학생들에게 가르치지 않고 스스로 깨우치도록 해야 할 것이다.[…] 학생들의 활동은 더 이상 수용이 아니라 획득으로 이해해야 한다. 미래의 학습과정은 지도와 수용이 아니라 조직과 활동으로 특징지어져야 할 것이다.” (Vohns, 2003, p.13 재인용)

그런데 아동 중심의 수업과 교과 중심의 수업이 절충 가능할 것인가라는 문제에 대하여 교육가 John Dewey(1859–1952)는 확신을 가지고 긍정적인 답변을 하고 있다.

> "아동과 교과 내용은 하나의 과정을 정의하는 양 극이다. 두 점이 한 선분을 결정하듯이 당면한 아동의 발달 상태와 교과의 내용이 수업을 결정한다."(Vohns, 2003, p.13)

심리 발생적인 사고방식에서 중심적인 명제는 교사의 임무가 학습내용을 아동에게 전달해주는 데 있지 않고 학습내용과 아동 사이의 작용을 중재해 준다는 데 있다는 것이다.
이 두 가지 방향의 결합은 '새 수학'의 물결에 밀려 빛을 보지 못하다 다시 새 수학의 좌초 후에 새로이 부상해 왔다.

> "수학의 기본적 관점을 좀 더 명확하게 규정함으로써 여러 입장에 적합한 함수론을 통일적으로 표현할 수 있게 되었다. 이러한 표현을 기초로 역사적으로 함수개념과 결합되어 있는 다양한 직관적 표상에 적합한 개념을 규정할 수 있게 되었다. 그렇지만 역사적 설명은 종종 함수개념의 제대로 이해하는 것을 어렵게 한다. 이처럼 이해를 가로막는 것을 단호하게 막기 위해서 Bourbaki는 '함수'라는 용어를 자신들의 방대한 저서 "수학원론"에서 아예 사용하지 말 것인가를 심각하게 고민하기도 하였다. 오늘날에도 (대학이나 학교의) 해석학 교과서에서 여전히 헷갈리게 하는 어법과 함수 개념의 도입 방식이 얼마나 문제가 많은지를 확인할 수 있다."(Steiner, 1989, p.36)

이처럼 수학에 대한 정적인 관점과는 달리 발생 원리는 역동적인 관점을 요구한다.

> "수학 수업은 발생적 방법에 따라 조직되어야 한다."(Wittmann, 1975 p.120)

라는 강력한 주장도 한편에서 제기되었다. Wittmann은 수학이라는 분야를 발생적으로 재현하는 것을 다음과 같이 언급하였다.

> "· 수업이 수학의 생성과 응용의 과정에 관한 자연스러운 인식론적 과정일 때이다. 정밀과학의 이론도 원시적인 초기 형태를 정제시키면서 문제를 탐구하여 이론을 발전시킨다는 사실에 상응하여 발생적 재현은 다음의 표식을 통하여 발생적으로 특징지어진다.
> 학생의 사전 이해와 결부되도록 할 것.
> 수학 안팎의 더 넓은 통일적인 문제의 맥락에서 고찰하도록 할 것.
> 전후 맥락에서 개념들을 비공식적으로 도입하도록 할 것.
> 직관적이고 발견적인 전제에 대하여 엄밀하게 숙고해보도록 지도할 것.
> 끊임없는 동기유발과 일관성.
> 진행될수록 안목이 넓어짐으로써 그에 상응하여 관점의 변화가 일어남."(Wittmann, 1975, p.106)

한편 다음과 같은 견해가 강하게 제기되기도 하였다.

> "인간의 두뇌에서 전개되는 인식의 메커니즘은 역사를 관철하는 학문적 방법론의 발달로 표출되기 때문이다. ··· 인간 사고의 역사적 발달 단계는 어린이의 개체 발생의 정신적, 심리적 발달에서 재현된다."(Oeser, 1991, p.84)

요컨대 생물학적 발생의 법칙을 근거로 두 갈래로 뻗어나간 심리 발생 원리와 역사 발생 원리가 수학 수업을 위한 하나의 법칙으로 다시 통일 되어야 한다는 것이다.

4 해석학적 방법

4.1 해석학적 방법의 의미

해석학적 방법이란 인간 정신의 소산을 정확하게 이해하려는 기술론으로 무엇보다도 원전의 해석을 기본으로 한다. 이는 본래 역사학자들이 즐겨 사용하는 방법이다. 유클리드의 <원론> 이 교과서로 사용되던 시대에는 이 방법이야말로 전 과정이었다고 해도 과언이 아니다. 학생들은 교사의 도움으로 원전의 번역본이나 해설본을 가지고 공부를 했다.

이 방법의 주창자인 Jahnke는 한 편의 학생들의 관점이나 사고방식과 다른 한 편 수학사의 맥락에서 이를 다루는 학자들 간에 생활 조건이나 문화적 또는 전공 체계에 따른 거리가 분명히 존재한다는 점을 주목하였다. 하지만 이러한 상황이 수학사의 일화를 수업에 도입하는 게 장애로 작용하지는 않음을 분명히 했다. 오히려 목적의식적으로 이러한 방식의 수업을 진행하여 소기의 목적을 이룰 수 있다고 보았다.(Jahnke, 1995, p.30–31)

Jahnke는 해석학적 방법을 Toeplitz의 발생 원리로부터 강하게 선을 그었다. 그는 전문적 이론의 전개 과정에 학생들을 참여시킴으로써 학생들로 하여금 그 발생으로부터 수학적 기능이나 숙련도, 개념 등을 익힐 수 있을 것이라는 견해에 부정적이었다. 수학의 역사를 수업 과정에 공식적으로 도입하라는 요구는 전문적 어려움 때문에 충족되기가 쉽지 않을 것으로 보았다.(Glaubitz 2003, p.71) 그렇다고 수업에서 수학사를 배제하는 것이 결코 옳다고는 보지 않았다.

Jahnke는 발생 원리를 적용하여 새로운 개념을 도입할 때 역사적 요소를 개입시키는 수업 상황을 변화시켰다. 학생들이 어느 정도 학습 주제에 대한 지식을 가지고 있을 때는 역사를 도입할 수도 있다. 전문적인 어려움은 상당히 줄어들 것이다. Jahnke는 적절한 시점에서 역사를 도입하는 근거로서 발생 원리보다는 해석학적 방법이 더 유용함을 주장하였다. 이를 위해서 학생들은 역사적 자료를 해석하고 해당 저자가 처했던 개인적인 또는 문화적, 학술적 상황을 살펴볼 필요성에 직면하게 된다. 이러한 요구에서 비롯되는 기대는 각각의 수학적 대상만이 아니라 수학 전체에 대한 나름의 시각을 익히도록 한다. Jahnke는 이러한 의미에서 수학사 원전 강독이 흥미롭고도 의미 있는 학습 경험을 축적하도록 이끌어낸다고 보았다. 그밖에 이러한 분석 과정 중에 자연스럽게 요구가 충족되기도 한다고 보았다. 이렇게 해서 대다수는 개방적이면서도 소통 중심의 논쟁적 수학에 대한 관점을 가지게 된다는 것이다. 그래서 원전 강독의 이점 세 가지를 다음과 같이 들었다. 첫째, 순전히 연산만으로 특징지어지는 내용은 의미를 잃게 된다. 고성능 컴퓨터, 계산기 등이 광범하게 사용되기 때문이다. 둘째, 공동체 안에서 교환 가능하고 사회적인 능력이 더욱 중요해지는데 이는 수학적 표현 능력을 익힘으로써 축적된다. 셋째, 학문은 미래 지향적이지 절대적인 진리는 아니다. 이러한 관점은 당면한 수학 원전을 천착해 나감으로써 개선되어 간다. 사고방식, 표현방식, 연구 방식과 관련하여 획득된 강조점의 변화에 따라 많은 학생들은 자기 나름의 방식으로 표현하고 관찰해 나가면서 수학에 접근하는 새로운 길을 열어가게 된다고 Jahnke는 주장하였다. 그는 여타의 수학수업 역시 이로부터 이점을 취하게 된다고 본다.(Glaubitz, 2003, p.71–72)

학생 개개인이 지닌 언어 능력의 계발이라는 관점에서 언어와 수학의 상호관련성 역시 중요한 사항이다. 그런데 통상 원전의 강독에는 세 가지 언어가 필요하다. 우선 학술적 전문 언어와 일상 언어가 섞인 수업용 언어이다. 다음으로 자료에 사용된 역사적 언어가 요구되며, 수학을 대하는 개인 고유의 방식이 필요하다. 성공적인 수업에서는 이들 세 가지 언어가 상호 관계를 맺고 서로 뒤섞이면서 나타난다.(Glaubitz, 2003, p.72–73)

Jahnke를 비롯하여 해석학적 방법을 선호하는 여러 명의 학자들의 견해를 종합하자면 다음과 같다.

첫째, 학생들이 활동의 대상으로 삼을 수 있는 주제를 눈으로 볼 수 있게 나타낼 수 있다는 강점이 있다.

둘째, 원전을 다루는 것은 근본적으로 수업의 삽화적 성격에 적합하다. 많은 교과서에서 사료에 나오는 문제가 등장하지만 주로 이해를 돕거나 동기를 부여하기보다는 재미있게 다루려는 의도가 엿보인다.

셋째, 원전의 신뢰성에 따라 전혀 의도하지 않았던 요소가 수업 시간에 드러난다. 학생들은 원전을 강독

하면서 전혀 다른 사안을 연상하기도 한다.
Jahnke에 따르면 이러한 특성으로 인해 새로운 개념을 도입할 때 학생들이 응용하고 연습할 수 있는 역사적 원전을 투입하면 문제 상황의 적용에 따라 개념의 이해 정도가 달라질 것으로 보았다. 이들은 통상적으로 문제를 취급하는 방식과는 다르다. 각 사료의 맥락이나 저자의 전기적인 내용에 많은 비중이 할당된다. 각각의 원전은 고유의 역사적 특성을 지닌다. 무리하게 오늘날의 수학을 대입시켜 해석하는 것은 바람직하지 않다. 학생들은 해석 과정에서 자유로운 연상을 할 수 있으며, 논리적 입증이 목표는 아니다. 그러고 나서 역사적 원전에 들어있는 개념, 아이디어, 연산 기술과 오늘날의 이해 수준을 비교할 수 있다.

4.2 해석학적 방법의 적용

Rasfeld가 10단계 심화 과정의 확률론 수업에 해석학적 방법을 적용한 예를 소개하도록 한다. 일반적으로 1654년을 통계학 성립의 원년으로 간주한다. 이 해에 파스칼과 Fermat가 주고받은 편지에서 확률 문제를 다루었기 때문이다. 그 내용은 원래 Chevalier de Mere가 제기한 주사위 놀이의 기대값 문제를 해결을 구하는 것이었다.

> "도합 60점 10두카텐(Dukaten)이 걸려있다고 한다. 한 편이 50점, 다른 한 편은 20점을 땄을 때 사정이 생겨 게임을 중단하게 되었다면 각 편에 할당되어야 할 판돈의 몫은 얼마인가?" (Schneider, I.(ed.) 1988, p.11)

Pascal과 Fermat 이전에 이러한 문제에 대한 합리적인 해결책을 제시한 이는 없었다. 오늘날 대부분의 교과서에는 이와 유사한 분배 문제가 실려 있다. 하지만 역사적인 진행과정을 염두에 두지 않은 채 다루어진다. 그리고 토막토막 나뉜 채 배우게 되므로 어떠한 교육학적 가능성도 실현되지 않는 것으로 보인다.

이 지점에서 해석학적 방법으로, 즉 역사적 자료나 편지를 다양하게 해석하거나 학생들의 시각에 맞게 맞닥뜨려져야 한다는 주장이 제기된다. 이처럼 다양한 출발점에서 나아가면 찬성이나 반대와는 다른 맥락에서 여러 가지 해석이 공존하게 될 여지가 남게 된다. 그리고 르네상스 시대 이탈리아 수학자들의 초기 해법도 살펴 볼 수 있다. 이로부터 분명히 알 수 있는 사실은 수학자들 역시 이들 문제를 어려워했으며 단일한 해결책을 유도해 내지는 못했다는 사실이다. 그러고 나서 페르마와 파스칼의 편지로부터 오늘날 수용되는 해법을 배울 수 있게 된다. 이는 확률론적 기초 지식을 전제로 하며, 이러한 기초 지식에는 라플라스의 확률론과 간단한 확률 계산에 흔히 사용되는 수형도 등이 포함된다. 역사적 자료를 다룰 때 유명한 통계적 개념이 적용되어야 함은 분명하다. 학생들이 이미 가지고 있는 지식이 문제 해결에도 사용되며 한층 심화 확장되어야 하는 것이다. 이항계수의 적용과 같은 새로운 지식의 습득도 물론 가능하다.

Rasfeld의 예에서는 오래 걸리는 계산을 할 때 컴퓨터를 사용하게 하였다. 뿐만 아니라 부분 과제로서 각 시대에 활동했던 수학자나 그들의 업적을 인터넷을 활용하여 조사할 수 있도록 하였다. 이러한 과정을 거쳐 역사적 자료를 온전히 이해할 수 있게 된다. (Rasfeld, 2007,p.263–266)
이와 관련한 일련의 수업 과정은 모두 13차시로 이루어진다.(Rasfeld, 2007, p.267)

차시	내용
1 차시	문제 제기와 학생들의 최초 해법
2, 3, 4 차시	이탈리아 학자들의 초기 해법
5, 6, 7 차시	학생들의 새로운 해법과 파스칼의 해법
8, 9 차시	페르마의 해법
10, 11 차시	파스칼의 삼각형을 사용한 해법
12 차시	해의 공식 유도와 일반화
13 차시	검토와 무기명 질문

학생들은 처음에 다음 과제를 마주하게 된다.

> "알렉스와 베른트는 동전던지기 놀이를 하면서 전차를 기다리고 있다. 각자 60센트씩 걸고 먼저 4번을 이기는 사람이 건 돈을 모두 가지기로 하였다. 2:1로 알렉스가 이긴 상황에서 전차가 진입하였다. 그래서 놀이를 중단하고 건 돈을 공평하게 나누어 가지기로 하였다."(Rasfeld, 2007, p.267)

학생들은 해법을 각자 내놓아야 한다. 수학수업에서 확률론이 차지하는 비중은 여전히 작다. 사실 현상을 수학화하는 과정에서 대수적 모형을 구축하는 일은 확률론에 대해서 분명히 우위를 점한다. 그러므로 학생들이 승률을 간과하게 되어 똑같은 분배 비율 1:1을 제안하게 되기도 한다. 학생들이 토론 과정을 거치는 게 무리도 아니다. 이러한 보기는 기상 사정으로 중단된 테니스 경기에도 적용된다.
교사는 이 지점에서 아주 오래된 문제를 다룰 수 있음을 제안한다. 즉 학생들로 하여금 문제해결에 대한 동기를 부여하게 된다. Rasfeld는 여기서 이탈리아 수학자 Pacioloi의 해법을 제시하는데 이는 학생들이 내놓은 첫 번째 풀이법과 유사하다. 게임 참가자 A, B가 각각 도달 점수 n에서 a, b를 땄다고 한다면 ($b \leq a < n$이며 각 판에서 승률이 같다고 가정한다) 풀이는 $a : b$ 이다. 이는 중세 후기 도시 간의 통상적인 거래에 참가한 쪽의 승패의 비에 따른 분배와 같다. 학생들은 1:0의 상황에서 100번의 게임을 협상하는 것은 옳지 않다고 비판하였다.(Rasfeld, 2007, p.268–269)
Cadano는 1939년 그의 저서 <수학과 측량의 실제>*practica Arithmeticae et Mensurandi Singularis*에서 Pacioli의 해법을 비판하였다. 학생들은 이제 이긴 게임의 수보다 이겨야 할 게임의 수에 주목하게 된다. 이 해법은 $(n-b) : (n-a)$ 라는 식으로 반영된다. 학생들 $n = 5$ 인 경우를 엑셀 표에서 시행해본다. 그러면 파촐리 해법보다 낫긴 하지만 여전히 그 결과에 흡족하게 되지는 않는다. 비로소 승률을 고려해야 한다는 인식에 도달하게 된다. 카르다노의 저서에서는 다음과 같은 식으로 제시되어 있다.(Rasfeld, 2007, p.269)

$$(1 + 2 + \cdots + (n - b)) : (1 + 2 + \cdots + (n - a))$$

Cardano의 합의 식은 설명이 제대로 되어있질 않아서 학생들이 느끼기에 만족스럽지 않다. 인터넷 검색을 통해서 학생들은 Cardano의 맞수 Tartaglia의 저서 <수(數)와 계측(計測)에 대한 일반론>*General trattato di numeri e misure*(1550)에 아래와 같은 비례식 설명으로 제시되어 있음을 발견한다.(Rasfeld, 2007, p.269–270)

$$(n + a - b) : (n + b - a)$$

Pacioli, Cardano, Tartaglia의 해법은 학생들에게 바로 받아들여졌다. 학생은 결정적인 사고 과정의 변화를 겪은 후에 위 수학자들과 마찬가지로 승률을 고려하기 시작했다. 경로 법칙을 고려하여 계산한 결과 알렉스에 대해서는 11/16, 베른트에 대해서는 5/16의 승률을 산출한다. 그리하여 게임이 중단된 상황에서 11:5의 비율로 판돈을 배분할 수 있다. 이로써 학생들은 그 결과에 만족하게 된다. 하지만 게임수가 커지면 수형도가 상당히 복잡해진다는 인식에 도달하면서 학생들은 불만스러워 하게 된다. 여기서 문제의 수학적 일반화가 시작된다. 학생의 입장에서 해결의 실마리가 떠오르지 않는다면 다시 역사에 등장하는 문제들을 다루도록 한다. 즉 수업 중에 Pascal이 Fermat에게 보내는 편지를 인용할 수 있다.

> "두 명의 게임 참가자가 예컨대 세 번의 승부를 가르는 게임을 벌였으며 각자는 32피스톨(pistol)을 걸었다고 한다.
> 첫 참가자가 두 판을 이기고 두 번째 참가자가 한 판 이겼다고 가정하면 결과는 다음과 같다. 첫 참가자가 이긴다면 모든 게임에서 이기게 되는 것이고 따라서 64피스톨을 가지게 된다. 다른 편이 이긴다면 이 대 이가 되므로 헤어질 때 각자 건 돈만큼 즉 32피스톨씩 가지게 된다. 근데 여기서 첫 번째 참가자가 이기면 64피스톨 지면 32피스톨을 가지게 된다. 그래서 더 이상 게임을 하지 않고 헤어지려 할 경우에 첫 번 째 참가자는 이렇게 주장하게 될 것이다. '32 피스톨은 명백하게 내가 가져야 한다. 내가 지더라도 가지게 되므로. 나머지 32피스톨은 내가 딸 수도 당신이 딸 수도 있으므로 그 가능성은 똑같다고 본다. 따라서 이 32피스톨을 이등분하여 나에게 더 주어야 할 것이다.' 이렇게 해서 그는 48피스톨을 가지게 되고 다른 참가자는 16피스톨을 가지게 된다.[⋯]"(Scheneider, 1988, 재인용)

자료에서는 이전과 마찬가지로 수형도로 나타내기가 용이하지 않아서 엑셀표 작성을 중단하게 되고 마는 두 가지의 게임 상황과 승률이 더 제시된다. 이로써 도표의 각 란을 채울 수 있게 된다.
다음 차시에 학생들은 Fermat의 답장을 접하게 된다. Fermas는 파스칼의 삼각형을 써서 조합론적인 방법으로 문제를 해결하고 결국 일반적인 공식으로 다음을 유도하게 된다.

$$\left[\binom{r}{n-a}+\binom{r}{n-a+1}+\cdots+\binom{r}{r}\right]:\left[\binom{r}{0}+\binom{r}{1}+\cdots+\binom{r}{n-a-1}\right]$$

학생들로 하여금 익명으로 자신의 의견을 나타내도록 하였더니 인터넷 검색이나 자료 강독 등이 긍정적이었다고 평가되었다. 컴퓨터 프로그램을 이용한 해법은 오히려 성가신 것으로 받아들였다. Rasfeld는 왜 학생들이 이러한 표 계산을 꺼려하는지를 해명하지는 않았다. (Rasfeld, 2007, p.282–283) 아마도 미리 연습을 하지 못해서 수업시간에 컴퓨터로 작업하는 것이 싫증이 나서 그럴 수도 있을 것이다.
Rasfeld는 자신이 제안한 일련의 수업 과정을 단축시킬 수도 있을 것이라고 강조한다. 학생들은 반응은 다음과 같았다고 한다.

> "나는 선생님께서 우리들 각자가 그 문제를 해결할 수 있는지를 물어 보신 것이 좋았다. 그리고 각 명제에 관한 토론은 아주 흥미로웠다. 마찬가지로 먼저 인터넷을 통하여 카르다노와 타르탈리아라는 인물이 어떠한지를 알아보는 일도 재미있었다. 하지만 카르다노와 타르탈리아의 해법을 PC에서 번역해놓은 것은 아주 무미건조했을 뿐만 아니라 길고도 지루했다."
> "똑같은 문제를 여러 수학자들이 서로 다르게 해결했다는 것이 아주 흥미로웠다. 주제는 오래 지속해서 다루기에 좀 지루했다. 파스칼과 페르마 사이에 주고받은 내용은 좋았다. 수형도를 이용한 확률 계산은 좋았다."(Rasfeld, 2007, p.284)

5 결어

수학사 도입의 타당성을 아무리 역설해도 역시 결국 남는 문제는 "수학사를 수학 수업에 성공적으로 도입할 수 있을까" 이다. 많은 이들이 Jahnke의 한 제자가 다음과 같이 피력한 데 동감을 표한다.

> "수학사에 관하여 얘기하는 것은 과도하다고 생각한다. 일반적으로 우리는 무엇인가를 배우거나 현재 상황을 개선시키기 위하여 역사를 탐구한다. 그러나 모든 수학의 기본 정리나 발견은 결코 잊힌 적이 없으며, 실질적인 유용성도 알려져 있다. 아마도 내가 알지 못하는 예외가 있다면 그다지 중요하지 않거나 별로 사용되지 않는 발견일 것이다. 따라서 이러한 내용을 학교 수학에 도입하는 것은 과도하다.
> 원래 주제가 흥미로울지는 모르나 수학의 역사 안에서 헤매 다니느라 미래로 나아가지 못하고 과거로 돌아가는 대신, 오래된 발견에 기초해서 수학을 발전시켜야 한다."(Jahnke, 1998, p.3)

수학에 정리나 계산술 말고는 알아야 할 것이 더 이상 없다고 가정한다면 위 인용문도 옳은 말이다. 그렇다면 사실상 수학은 죽은 학문에 불과하다. 그러나 사실과 대상 사이의 관계를 파악한다든지 인물과 동기를 이해한다든지 문화와 철학 및 전공 분야와의 관계, 즉 수학과 수학자 또는 이용자 또는 단순한 관찰자 가운데 어떠한 관계를 설정할 수 있는지는 밝히는 등 당면한 상황을 제대로 이해하기 위해서는 역사가 중요하다. (Jahnke 1998, p.3)
그렇지만 수학사를 수업에 도입하는 것이 필요한지에 관한 결론을 내리기 위해서는 실제 수업을 대상을 한 비교 연구가 필요하다. 지금까지 이루어진 약간의 비교 연구 결과를 참고할 수 있다. Glaubitz는 2007년 해석적 방법을 도입한 수업이 기존의 수업에 비해 평가 결과 등이 성공적이었음을 확인하는 연구 결과를 제시했다. 설문 결과에 따르면 이전에 해석적 방법에 가장 비판적이었던 학급에서 그 성과가 가장 컸다고

한다. 그리고 파지 효과도 실험 학급에서 훨씬 높았다고 한다.(Glaubitz 2007, p.262–263)
하지만 홍콩의 Lit/Siu/Wnog팀이 수행한 연구에 따르면 심지어 더 좋지 않은 결과를 산출하기도 했다.

> “결과에 따르면 실험 그룹이 전후 모두 통제 그룹보다 낮았으며, 그 차이는 테스트2와 3에서 통계적으로 유의하다. 통제 그룹의 점수가 3.22 오른 반면 실험 그룹의 점수는 4.56점 낮아졌다.”(Lit, 2001, p.23)

이탈리아의 Bagni도 부정적인 결과를 제시하였다. 복소수 계산을 주제로 Rafael Bombeli의 자료를 도입한 실험 그룹의 점수가 통제 그룹과 비교해서 테스트 결과가 더 낮았다고 한다.(Bagni 2000, p.9)
이들 적은 양의 결과만으로 수학사를 도입한 수업의 질이 더욱 개선되었다거나 학생들의 능력이 향상되었다고 쉽게 결론내릴 수는 없다. 하지만 일련의 수업 말미에 기록한 학생들의 의견을 기초로 삼는다면 대체로 긍정적이다. 이러한 수업을 통해서 전혀 알지 못했던 가능성을 발견한 교사들에게서도 이러한 긍정적인 답변을 얻게 된다. 수업 자료를 연구하는 교육학자들 역시 긍정적인 입장이다.
수학사를 도입한 수학 수업은 원칙적으로 대부분 긍정적이라 할 수 있다. 하지만 구체적으로 어떤 주제의 수업에 어떤 방법을 적용하는 게 바람직한지에 관해서는 한가지로 답하기가 어렵다.
앞서 언급한 방법들(해석적, 역사 발생적, 역사적 확정) 가운데 한 가지를 선택하기로 결정하든지 아니면 이를 참조하여 독창적인 방법을 고안해내어 적용할 지는 전적으로 교사 자신의 몫이다. 이들 세 가지 방법을 이상적인 것으로 간주한다면 이 셋을 혼합한 방법을 생각해 볼 수 있다. 개별적인 경우마다 목표와 방법과 수단을 감안하여 결정해야 할 것이다. 물론 수학사 도입과 관련하여 제기되는 언어 문제의 해결 등도 몹시 중요하다. 총론적 관점에서 수학사 도입의 당위성에 관한 논의를 넘어서 더욱 진전된 적용의 결과를 토대로 다양하고 창의적인 수업이 이루어질 수 있도록 해야 할 것이다.

REFERENCES

- Bangi, Gorcio T., 2000, “The Role of the Hiswtory of Mathematics in Mathematics Education”, in *Proceedings of CERME-1*, *Schwank*, I.(Ed), Osnabrueg, 2000, p.220–231
- Boyer, Carl B., 1968, *A History of Mathematics*. John Wiley & Sons. New York 1968
- Doerlfer, 1986, “Mathematik as a school subject”, in *Perspectives in Mathematics Education*, B. Christiansen (Edit.), Dordrecht 198, P.49–97
- Fermat, Pierre de. *Abhandlungen über Maxima und Minima* (1629). Leipzig : Akad. Verlagsges., 1934
- Flegg, H. G., 1976, “The Philosophiy and Materials related to the history of Mathmatics Open University Course”, in: Athen, H., Kunle, H.(ed.): *Proceedings of Third International Congress on Mathematical Education*, Karlsruhe 1976, p.306
- Führer, L., 1986, “Anwendnungsorientierung der Mathematik aus geschichtlicher Sicht”, mathematik lehren, Heft 19, Dezember 1986, p.42–48
- Glaubitz, Michael R.u.a, 2003, “Die Bestimmung des Umfangs der Erde als Thema einer mathematikhistorischen Unterrichtsreihe”, in: *Journal fuer Mathematik-Didaktik* 24 (2), Teubner(Ed), Wiesbaden 2003, p.71–95
- Glaubitz, Michael R., 2007, “Historische Quellen im Mathematikunterricht”, in: Beitraege zum Mathematikunterricht 41, Franzbecker(Ed.), Berlin 2007, p.260–263
- Heymann, H.W., 1996 *Allgemeinbildung und Mathematik*, Weinheim und Basel
- Jahnke, Hans Niels, 1991, “Mathematik Historische verstehen”, in *Mathemaitik lehren* 47, cf. Friedrich(Ed.), Seelzs/Velber 1991, p.6–12

- Jahnke, Hans Niels, 1995, "Historische Reflexion im Unterricht", in *Mathematica Didaktica* 18(2), cf, Franzbecker(Ed), Berlin 1995
- Jahnke, Hans Niels, 1998, "Editorial" in *Mathematik lehren* 91, cf. Friedrich (ed.) Seelzs/Velber 1998, p.3
- Jones, P. S., 1978, "The History of Mathematics as a Teaching Tool", *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 1978, Heft 2, p.57–63
- Klein, F., 1924, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus*. 3Vols. Bd1. Springer, Berlin, Goettingen, Heidelberg
- Kronfellner, Manfred, 1998, *Historische Aspekte im Mathematikunterricht*, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, 1998
- Lit, Chi-Kai, 2001, "The Use of History in the Teaching of Mathematics", in *Education Journal* 29(1), Chinese University, Hong Kong, 2001
- Nagaoka, R., 1989, "On the Roll that History of Mathematics play in Mathematics Education. Why Should We teach Mathematics Also to Those Who Do Not Like It?" *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik* Heft 5, p.176–179
- Oeser, E., 1991, *Theoriendynamik und Wissenschaftsevolution Mitteilungen der Oesterreichschen Gesellschaft fuer Geschichte der Naturwissenschaften*, Jg. 11, Heft 3–4, p.80–85
- Rasfeld, Peter, 2004, "Das Teilungsproblem", in *Beitraege zum Mathematikunterricht* 38, Franzbecker(Ed), Berlin, p.445–448
- Rasfeld, Peter, 2007, "Das Teilungsproblem", in *Journal fuer Mathematik-Didaktik* 28(3/4), Teubner(Ed.), Wiesbaden, p.263–285
- Reichel, H.-Ch., 1991, "Sprachshculung und Spracheinsatz im Mathematikunterricht", in *Mathematik Lehren und Lernen*, H. Postel u.a.(Ed.), Hannover 1991, p.156–170
- Richenhagen, G., 1990 "*Mathematikgeschichte und Mathematikdidaktik- Ueberlegungen am Beispiel des Funktionsbegriffs.*" in: Steiner 1990, p.174–186
- Riedl, R., 1980, *Biologie der Erkenntnis*, Verlag Paul Parey, Berlin, Hamburg
- Scriba, C. J., 1983, "Die Rolle der Geschichte der Mathematik in der Ausbildung von Schuelern und Lehrern", *Jahresbericht der Deutschen*
- Schubring, G., 1978, *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik*, Klett-Cotta Typoscript, 1978
- Spalt, D., 1987, "*Die Bedrohung der Mathematikgeschichte durch die Didaktik*" Manuskript einies Vortrages, gehalten auf der 21.Bundestagung für Didaktik der Mathematik in Wppertal, (Kurzfassung: *Beitraege zum Mathhematikunterricht* 1987, p.311–314)
- Steiner, H.G., 1989, "Relations between historico-epistemological studies and research in mathematics education", In Bazzini/Steiner 1989, p.25–35
- Toeplitz, O., 1927, "Das Problem dr Universitaesvorlesungen ueber Infinitesimalrech- nung und ihrer Abgenzung gegenueber der Infinitesimalrechnung an den hoeheren Schulen," *Jahresbericht der DMV* 36 Vieweg/Teubner(Ed), Berlin, p.90–100.
- Toeplitz, O, 1963, Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung, 2. impr. 1963
- Vohns, Andreas, 2003, *Mathematikgeschichte und Mathematikunterricht*, Referat im Rahmen des Seminars "Geschichte der Algebra"
- Wagenschein, Martin, 1962, "Paedagigische Aufsaetze zu mathematischen Unterricht", in *Der Mathematikunterricht* 8(4), E. Loeffler(Ed.), Seelze/Velber 1962

- Wagenschein, M., 1989, *Verstehen lehren*, Weinheim, 1989
- Wittenberg, Alexander, Israel, 1990, *Bildung und Mathematik*. Klett (Stuttgart)
- Wittmann, E., 1975, *Grundfragen des Mathematikunterrichts*, Vieweg, Braunschweig (3.Auflage)
- 우정호, 1998, 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부, 1998.