THEORETICAL FRAMEWORK CONCERNING DRAWING METHOD IN MATHEMATICS EDUCATION

Toshimitsu MIYAMOTO, Ph.D.

Fukuyama City University, Fukuyama city, Japan
t-miyamoto@fcu.ac.jp

ABSTRACT

本稿においては，西洋数学及び日本の和算における正五角形の作図法に関しての考察とそれが作図可能であることについてのガロア理論に基づく証明及びそれに基づく作図のアルゴリズムについて述べる．具体的には，西洋数学としてトレミーによる作図法，日本の和算として平野喜房，藤田貞資及び安島直円による作図を示す．さらに，正五角形の作図可能性の証明については，円分体の手法による証明を与える．

1 はじめに

定規は線分を描きとコンパスは円を画くことのみに制限した作図は，古代ギリシャにおいて既に考えらえていたが，いくつかの作図不可能な問題について，事実として実際に作図不可能であることが分からなかったために難問とされた問題がいくつかある．その中で有名なものとしては，一般角の三等分の作図と円周率の作図及び 2 の作図の 3 つである．一方，作図可能なものについても古い時代から色々知られていた．例えば，角の 2 等分線の作図や線分の垂直 2 等分線の作図及び与えられた長方形と同じ面積を持つ正方形の作図があげられる．これ以外にも，正五角形の作図があげられる．角の 2 等分線が作図可能なために，正$2^n\times3$ 角形，正$2^n\times5$ 角形，正2^n 角形の作図も当時から分かっていた．学校数学においても色々な作図の指導がなされ，その中でも正五角形の作図は興味深いものがある．

実際に，子どもたちの中にはすべての正多角形が作図可能なのであろうかと興味を持つ子どもたちもいる．ギリシャ時代には，上で示した以外の正多角形の作図はできにと思われていたと思われる．実際，ガウスは，その時代にガロア理論は出来ていなかったために，1 の原始 p 乗根のみたす相反方程式の根の様子を調べてその結論を得ている．現在では，ガロア理論に基づいて，正多角形の作図可能性の証明が可能となっている．そこで，本稿においては，正五角形の作図可能性の証明をすることとする．

2 和算に対する評価

和算を現在の日本の学校の数学の授業で扱うことは，決して，不可能なことではない．ただ，それほど単純で簡単なものでもない．和算について，一度でも学習した学校教員であれば，その量の多さと質の高さに驚くのが普通である．学校数学においては，小学校の算数から高等学校の数学まで，どの単元であっても論理的には，利用可能である．当然のことではあるが，現在の日本の学校教員の多くは，明治時代と違って，残念ながら和算家ではない．したがって，和算の中のほんの一部の知識しか知らないために，現在の学校数学に和算を導入する際に必要以上に多くの苦労をせざるを得ない．それでも日本の小学校の算数科のすべての教科書会社の教科書に，和算の内容が一部取り入れられている．実際に，和算が流行した江戸時代には，数学嫌いの子どもは本当に少なかったと言われているこ

とは誰でもが知っている．現在の日本の子どもたちの数学嫌いと比較しても和算には，圧倒的な魅力を感じる．和算を現在の子どもたちのために，編集し直して，改めて現在を生きる子どもたちのための本をつくることができれば，和算は現在の日本の学校数学においても，有効であると評価することが可能であると思われる．

3 西洋数学と日本の和算家による正五角形の作図

本稿においては，正五角形の作図方法に関して，西洋の数学による方法としてトレミーによる作図法と日本の和算家によるその作図法として平野喜房と藤田貞資及び安島直円によるものを紹介する．また，正五角形が作図可能であることの証明として，現代数学による手法であるガロア理論に基づいた証明方法を紹介する．具体的には，円分体を利用した証明である．これは，幾何学の問題を代数学の手法によって証明したことにおいても意味がある．また，この証明方法に基づいた正五角形の証明は，数学としては珍しく計算そのものが興味深いと言う数学的意味もある．そこで，歴史的に古いが興味深い西洋及び日本の江戸時代に発達した和算による正五角形の作図法を示すとともに，その証明を幾何学の手法ではなくて代数学であり現代数学であるガロア理論を用いて証明した．

4 西洋数学による正五角形の作図の実際

4.1 トレミーによる正五角形の作図法

トレミーによる作図法は，「アルマゲスト」の中で「原論」第XIII巻命題10を引用して説明している．

以下，トレミーによる正五角形の作図法について述べる．

図1の様に，線分AB，線分CDは，円Oの直径である．また，線分ABと線分CDは，その円の中心Oで，互いに直行しているとする．さらに，円Oの半径CDの中点をEとする．線分EAを半径とする円と円Oの半径ODとの交点をFとする．この時，線分AFは，この円Oに内接する正五角形の辺の長さになる．実際，図2において，中心Aで半径AFの円がもとの円Oとの交点を点G，点Hとする．次に，点Gを中心とし半径GAの円が円Oと点Jで交わるとする．さらに，点Hを中心とし半径HAの円と円Oとの交点を点Kとする．5つの点，点A，点G，点J，点K，点Hを図3の様に結ぶと正五角形が得られる．

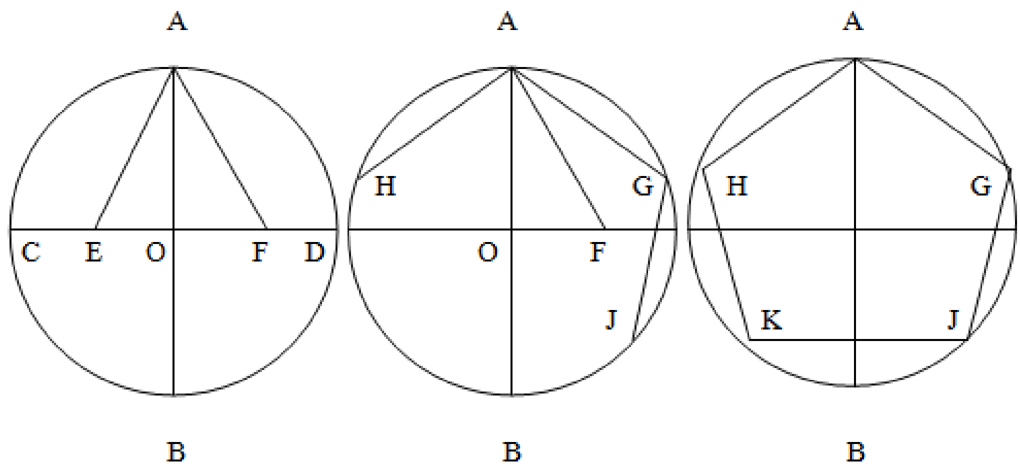

図1　図2　図3

4.2 「原論」の正五角形の作図法

「原論」第Ⅳ巻命題 11 は，「与えられた円に正五角形を内接させること」という作図命題である．命題 10 は，「底辺における角の双方が残りの角の 2 倍である二等辺三角形をつくること」となっていて，正五角形の作図命題の準備となっている．命題 11 は，命題 10 の作図を行うようになっていて，正五角形の対角線と辺でつくられる三角形は，頂角が 36° の二等辺三角形になるので，これと相似な三角形を円に内接するように作図するとそれを基に正五角形を内接させることが可能であるという内容である．

正五角形は，辺と対角線で決まる．したがって，円がなくても辺と対角線があれば作図可能である．正五角形の辺a と対角線b との間には，$b(b-a)=a^2$ という式が成り立つので，これをb の 2 次方程式として解くと，
$b=\frac{\sqrt{5}}{2}a+\frac{1}{2}a$ となる．
したがって，与えられた辺a に対して，2 等分の線分$c=\frac{1}{2}a$ の$\sqrt{5}$ 倍の線分$\sqrt{5}c=\frac{\sqrt{5}}{2}a$ を作図すれば，対角線$\sqrt{5}+c$ の長さが求められるので，正五角形の作図が可能となる．

5 日本の和算家による正五角形の作図法の実際

本章においては，日本の 3 人の和算家平野喜房，藤田貞資，安島直円による正五角形の作図法について紹介する．

5.1 日本の和算家平野喜房による正五角形の作図法

平野喜房による正五角形の作図法は，次の通りである．

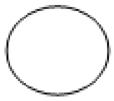

図 4

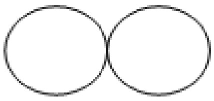

図 5

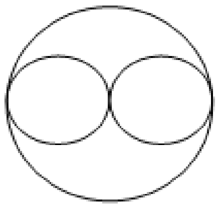

図 6

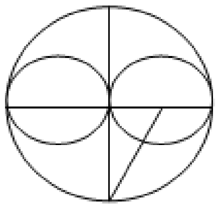

図 7

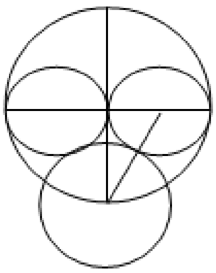

図 8

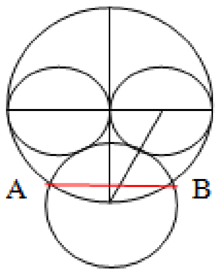

図 9

① 図 4 の様に，任意の大きさの円を画く．

② 図 5 の様に，図 1 で描いた円と合同なもう 1 つ円を画く．
この時，2 つの合同な円は，外接する様に描く．

③ 図 6 の様に，大きな円を画く．
この時に，図 2 で画いた 2 つの外接する円に外接する様に描く．

④ 図 7 の様に，3 つの円の直径となる様な線分を画く．
さらに，2 つの合同な円の共通外接線を大きい円の直径となる様に線分を画く
さらに，合同な 2 つの円の一方の中心と 2 つの合同な円の共通外接線と大きな円との交点を線分で結ぶ．

⑤ 図 8 の様に，もう一つ円を画く．
この時，外接している 2 つの合同な円の共通外接円となる様に画く．

⑥ 図 9 の様に，線分 AB を引く．
この時，図 5 で画いた円と外接している 2 つの合同な円の共通外接円との 2 つの交点を結ぶ線分になっている．そして，2 つの交点を A，B とし，画いた線分を線分 AB とする．そうすると，線分 AB が正五角形の 1 辺となっている．この様にして，正五角形を作図することができる．

ここで，以下にこの平野喜房による正五角形の作図法が正しいことを証明する．
証明
図 10 における$\angle$DBA が 18° となることを示せば良い．図 10 にける最も大きい円の半径を 1 としても一般性を失わない．
そうすると，$\mathrm{DC} = \sqrt{5}/2$，$\mathrm{DB} = \mathrm{DC} - 1/2 = (-1 + \sqrt{5})/2$

$$\sin(\angle \mathrm{DEB}) = \mathrm{DB}/\mathrm{DE} = (-1 + \sqrt{5})/4$$

よって，$\angle \mathrm{DEB} = 18°$

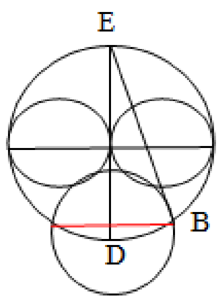

図 10

5.2 日本の和算家安島直円による正五角形の作図法

安島直円による正五角形の作図法は，次の図 11 の通りである．

① 2 本の線分をお互い垂直になる様に画き，その交点を A とする．
② 交点 A を中心として，半径が AB となる様な円を画き，①で横に引いた線分との交点の一方を点 C とする．
③ 点 B を中心にして，半径 BA の円を画く．
円 B と縦の線との交点を点 D とする．
④ 点 D を中心にして，半径 DC の円を画く．
円 D と縦の線との交点を点 E とする．
⑤ 点 B を中心にして，半径 BE の円を画く．
⑥ 円 B と横の線との交点を点 F，点 G とする．

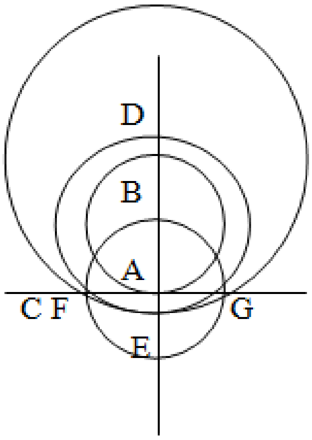

図 11

6 円分体による正五角形の作図可能性の証明

本章においては，ガロア理論に基づいて正五角形の作図可能性に関して証明する．
正五角形の作図と円周の 5 等分の問題は同値なので，円周の 5 等分が作図可能であることを証明する．

$360° \div 5 = 72°$ より，$\omega = \cos 72° + i \sin 72°$ とおく．
また，拡大体を L=K(ω) とおく．
ここで，ω の最小多項式を $f(x) = x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ となる．
この時， L は，$f(x)$ の最小分解体となる．
ここで， L を K 上のベクトル空間とすると，
$\{\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$ は，ベクトル空間の基底となる．
L 上の任意の要素を b とすると，$b = a_1\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + a_4\zeta^4$ となる．
ただし，$a_i \in$ K.
1 の n 乗根の性質より，$\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = -1$ となる．
拡大次数は，$[\mathrm{L} : \mathrm{K}] = 4$ となるので，ガロアの位数は 4 となり，
$\{\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$ を置換する要素から構成される．
ここで，$\sigma(\omega) = \omega^2$ と置くと，
$\mathrm{G(L/K)} = \{1, \omega, \omega^2, \omega^3\}$ と表現され巡回群となる．

G(L/K) は，正規部分群$\{1,\sigma^2\}$ を持ち，正規真部分群は，これしか存在しない．
ただし，自明な部分群は除く．
ガロアの基本定理より，K と L に中間体が存在する．
それを M と置くと，中間体 M は，群 H の固定体となる．
そこで，係数の条件を以下の通り求める．

$$\begin{aligned}\sigma^2(b) &= \sigma^2(a_1\omega + a_2\omega^2 + a_3\omega^3 + a_4\omega^4)\\ &= a_1\sigma^2(\omega) + a_2\sigma 2(\omega^2) + a_3\sigma^2(\omega^3) + a_4\sigma^2(\omega^4)\\ &= a_1\sigma(\omega^2) + a_2\sigma(\omega 4) + a_3\sigma(\omega^6) + a_4\sigma(\omega^8)\\ &= a_1(\omega^4) + a_2(\omega^8) + a_3(\omega^{12}) + a_4(\omega^{16})\\ &= a_1\omega^4 + a_2\omega^3 + a_3\omega^2 + a_4\omega\end{aligned}$$

したがって，$\sigma(b) = b$ となるのは，$a_1 = a_4$ の時である．
また，ω の指数が 5 より大きい時，$\mod 5$ で$\{1,\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4\}$ にもどる．
よって，中間体 M の要素 α は，$a_1 = a_4 = b_1$，$a_2 = a_3 = b_2$ とおくと，以下の通りに書ける．
$b = b_1(\omega+\omega^4) + b_2(\omega^2+\omega^3)$ とおく．さらに，$\omega+\omega^4 = \alpha$，$\omega^2+\omega^3 = \beta$ とおくと，

$$\begin{aligned}\alpha+\beta &= \omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4\\ &= -1\\ \alpha\beta &= (\omega+\omega^4)(\omega^2+\omega^3)\\ &= \omega^3+\omega^4+\omega+\omega^2\\ &= \omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4\\ &= -1\end{aligned}$$

ここで，2 次方程式の解と係数の関係より，α とβ は，2 次方程式$x^2+x-1=0$ の解となる．したがって，

$$\alpha = \frac{(-1+\sqrt{5})}{2},\quad \beta = \frac{(-1-\sqrt{5})}{2}$$

となる．ただし，α とβ の符号は，下の図 12 の様に，$\{\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4\}$ の関係から決定する．
以上のことから，M = K(5) となる．
したがって，M 上の代数方程式を考えると，ω,ω^4 は，方程式$x^2-\alpha x+1=0$ の解となり，
ω^2,ω^3 は，方程式$x^2-\beta x-1=0$ の解となる．α が作図できると，円の中心 O とα との中点から垂線を引くと，頂点ω,ω^4 が求められるので，円周を 5 等分することができる．

7 まとめ

本稿においては，正五角形の作図方法と現代数学に基づいたその証明の可能性について述べてきた．
西洋の数学としては，ユークリッド原論やトレミーによる正五角形の作図方法について述べてきた．
また，日本の 3 人の和算家平野喜房，藤田貞資，安島直円による正五角形の作図法について述べてきた．日本の和算家による，正五角形の作図方法は，その正当性を証明するとなると西洋数学には無い独自の文化によって形成されてきたものであるために，西洋数学の様な証明はなされてこなかった．
しかし，その作図方法は，独創性があり見事と言うべきものであることが分かった．
最後に，現代数学の手法として，ガロア理論とりわけ円分体の理論に基づいて正五角形の作図可能性について考察してきた．通常は，この様な計算そのものは，興味の持たれないものではあるが，正五角形の作図可能性の証明に限っては，計算そのものが興味深い珍しい例であることが分かった

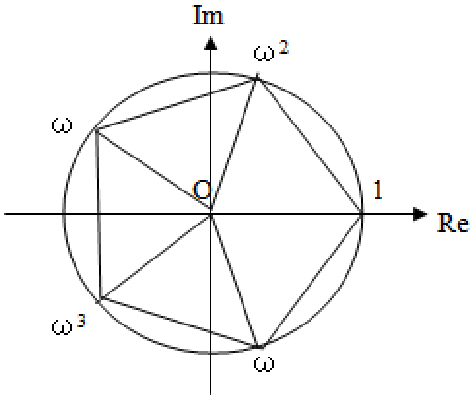

図 12

学校数学といえども，最終的には，どうしても数学プロパーが効いてくる．たとえば，図形の対称性を指導するには，どうしても，指導者には群論の素養が必要である．また，今回証明で利用したガロア理論は，方程式を指導する時には，当然必要な素養である．もちろん，子どもたちにそれを直接指導するということではない．現役の学校教員や教員を目指す大学生や大学院生には，少なくともこの様な数学そのものの素養が必要である．特に，学校数学と直接結びつきそうな教材に対応した数学プロパーの素養を身に付けることは必要であると思われる．質の高い授業実践を展開するためには，数学プロパーの素養を現役の教師にも学生にもできるだけ身に付けることが必要であると確信する．

REFERENCES

– B,L,van der Werden, 1937, *MODERNE ALBEBRA*, Berlin: Verlag von Julius Springer.

– Garret, Birkhoff & Saunder,MacLane,1965, *A Survey of Modern Algebra*, U.S.A: The MACMILLAN COMPANY.

– Ricard,Courant & Herbert Robbins,1941,*What is Mathematics?*, Oxford University Press.

– Stephen,F.,Barker,1964, *Philosophy of Mathematics*, New Jersey: Prentice-Hall,Inc.

– 吉田光由，1627，塵劫記

– 龍谷大学所蔵，1600 頃，算用記

– 榎並和澄，1653，参両録，京都大学所蔵

– 初坂重春，1657，円方四巻記

– 柴村盛之，1657，格致算書

– 山田正重，1659，改算記

– 磯村吉徳，1661，算法開疑抄

– 今村知商，1640，因帰算歌

– 今村知商，1639，竪亥録

– 程大位，1593，算法統宗

– 坂部広胖，1815，算法点鼠指南録

– 村松茂清，1663，算俎

– 毛利重能，1622，割算書

– 朱世傑，1299，算学啓蒙

– 建部賢弘，1690，算学啓蒙諺解大成

– 藤原徳風，1850，弘用算法大全

– 山田安山子，1848，増補　算法図解大全

– 平山諦，1965，和算史上の人々，富士短大出版部