

DIMENSIONS : UNE PROMENADE MATHÉMATIQUE

Aurélien ALVAREZ*

Résumé – Dimensions est un film tout public, en particulier destiné aux collégiens, lycéens et étudiants, constitué de 9 chapitres de 13 minutes chacun et de difficulté croissante. Ce film est accompagné d'un site internet qui contient beaucoup d'informations complémentaires pour aller plus loin. Certains professeurs de lycée n'hésitent pas à utiliser Dimensions comme complément de leur cours, en particulier les deux chapitres autour des nombres complexes.

Mots-clefs : film, dimensions, tout public

Abstract – Dimensions is a film of all age groups, particularly aimed at high school and students, consisting of 9 chapters of 13 minutes each and increasing difficulty. This film comes with a website containing a lot of information for those who want to go further. Some teachers in high school do not hesitate to use part of this movie to illustrate their course, particularly the two chapters dealing with complex numbers.

Keywords: film, dimensions, all age groups

Dimensions est une promenade mathématique de 2 heures autour de la dimension 4. C'est un film tout public, en particulier destiné aux collégiens, lycéens et étudiants, constitué de neuf chapitres de 13 minutes chacun et de difficulté croissante. La projection stéréographique, expliquée dès les premières minutes, est le fil conducteur du film qui s'intéresse notamment aux solides platoniciens, aux polyèdres réguliers de l'espace de dimension 4, aux nombres complexes et enfin à la fibration de Hopf.

Ce film (Alvarez, Ghys et Leys 2008) a été réalisé entre janvier 2007 et juillet 2008, sous l'impulsion de trois enthousiastes : Jos Leys, amateur passionné de graphismes (voir son site <http://www.josleys.com>), Étienne Ghys, mathématicien, et moi-même alors doctorant en mathématiques. Outre le soutien de l'Unité de Mathématiques Pures et Appliquées de l'École Normale Supérieure de Lyon, ce projet a bénéficié de l'aide bénévole de nombreuses personnes puisque ce film est aujourd'hui disponible gratuitement sur internet dans 9 langues et 21 sous-titrages, ainsi qu'en DVD accompagné d'un livret explicatif.

I. COMMENT TOUT A COMMENCE

En mars 2006, alors qu'il préparait une conférence dans le cadre du cycle « Un *texte, un mathématicien* » organisé par la Société Mathématique de France à la Bibliothèque nationale de France (Ghys 2006), Étienne Ghys a eu l'occasion de rencontrer Jos Leys, via internet, pour lui demander l'autorisation d'utiliser quelques-unes de ses images numériques illustrant certains groupes fuchsien. Après ce premier échange, Étienne et Jos ont commencé à travailler ensemble et le résultat, qui devait illustrer certains points de la prochaine conférence que préparait Étienne, fut très apprécié lors du Congrès International des Mathématiciens de Madrid en 2006 (lire par exemple ce qu'en dit Terence Tao, médaillé Fields cette même année, sur son blog (Tao 2007)). De retour de vacances, l'idée fit son chemin de produire un vrai film de maths et ce fut le point de départ d'une collaboration à trois assez étonnante. Nous avons échangé plus de 5 000 mails en l'espace d'un an ! Et nous aimons à dire que nous nous sommes tous les trois occupés d'un peu tout... Outre la programmation des images bien sûr, il a fallu enregistrer les commentaires, monter la bande son, mixer la musique, insérer des sous-titres (en arabe, de droite à gauche !), bref, tous ces petits détails... De nombreux amis ou collègues nous ont aidés pour les traductions des sous-titres, pour nous conseiller pour les

* Université d'Orléans – France – aurelien.alvarez@univ-orleans.fr

calculs (effectués sur les ordinateurs du PSMN de l'ÉNS Lyon). Florent Ghys, musicien et neveu d'Étienne, a offert une bonne partie de la musique. Pour plus de détails sur toutes ces contributions, on pourra consulter le livret du DVD ou le site internet de *Dimensions*.

<http://www.dimensions-math.org>

II. BUTS DU FILM

L'idée générale du film est de prendre le spectateur par la main et de le guider vers la quatrième dimension. Le premier chapitre est très élémentaire et peut être compris par un élève du collège. Le niveau requis monte peu à peu et les chapitres les plus élaborés sont destinés à un élève de terminale motivé ou à un élève de classe préparatoire. Les chapitres ne sont pas complètement indépendants mais nous avons fait en sorte qu'un professeur puisse utiliser certains chapitres de manière autonome (par exemple deux chapitres d'introduction aux nombres complexes peuvent facilement être exploités en complément du cours du professeur). Par ailleurs, nous pensons que le film montre de belles images et il est également conçu pour qu'on puisse le regarder et l'apprécier sans nécessairement tout comprendre. Le public principal auquel nous avons pensé est celui des jeunes lycéens mais nous espérons qu'il pourra intéresser les professeurs du secondaire, les étudiants des premiers cycles universitaires mais aussi quelques collègues ! Nous espérons aussi intéresser « l'honnête homme » qui est disposé à voir quelques belles choses... En résumé, si notre film pouvait faire rêver quelques jeunes et leur donner envie de faire de la science, eh bien nous serions satisfaits !

1. Comment utiliser le film ?

Le film est conçu pour que tous les publics (qui le désirent !) puissent l'apprécier, à condition de bien choisir les chapitres. Comme nous l'avons déjà dit, le film est constitué de neuf chapitres qui durent chacun treize minutes. On peut bien sûr s'asseoir devant une télévision ou un ordinateur et regarder l'ensemble des 117 minutes d'une seule traite ! Mais il y aura peut-être des passages qui paraîtront trop rapides, ou au contraire trop élémentaires ; cela dépend des thèmes d'intérêt et/ou des connaissances préalables de celui qui le regarde. On peut aussi se contenter de certains chapitres bien choisis mais il est souvent préférable d'avoir vu un chapitre avant de passer au suivant.

Le chapitre 1, *la dimension 2*, est très élémentaire. Il devrait pouvoir être apprécié par des élèves du collège mais nous pensons que même si on sait déjà ce que sont les méridiens et les parallèles, le public aura peut-être plaisir à voir le spectacle de la Terre qui roule comme une balle !



Figure 1 – Chap. 1 : Comment dessiner la Terre ?



Figure 2 – Chap. 1 : Méridiens et parallèles

Le chapitre 2, la dimension 3, reste élémentaire mais demande un peu d'imagination. On peut très bien le regarder comme un spectacle, qui incite un peu à la philosophie... Il contient même des exercices, pour bien vérifier que l'on a compris. L'idée est la suivante : supposons que le spectateur habite dans un pays en deux dimensions, comment pourrait-il appréhender la dimension 3 ? Le but de ce chapitre est en fait de familiariser le spectateur à des outils qu'il ne connaît pas nécessairement dans un contexte connu : la dimension 3. Ces mêmes outils seront utilisés ensuite pour avoir un aperçu de la dimension 4.

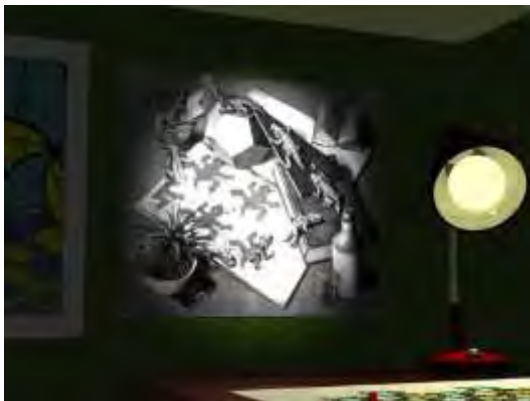


Figure 3 – Chap. 2 : Les reptiles d'Escher

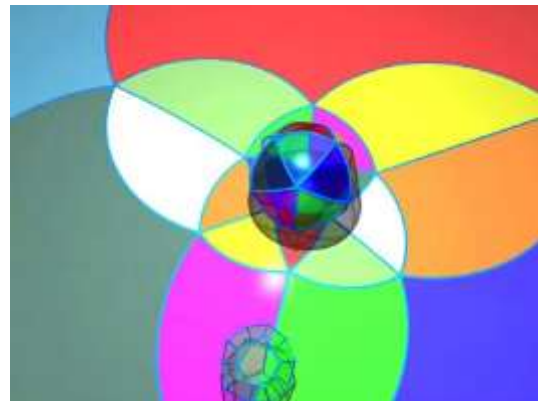


Figure 4 – Chap. 2 : L'icosaèdre vu par les reptiles

Les chapitres 3 et 4 présentent la quatrième dimension. C'est bien sûr plus difficile et on peut être pris de vertiges ! Ces chapitres présentent les polyèdres de Schläfli, l'équivalent en dimension 4 des polyèdres réguliers de Platon. Les images les plus spectaculaires sont sans doute les projections orthogonale et stéréographique du polyèdre 600 (voir **Figure 5** et **Figure 6**). Ces deux projections sont deux manières possibles pour se familiariser avec la quatrième dimension ; elles ont été présentées dans le chapitre 2.

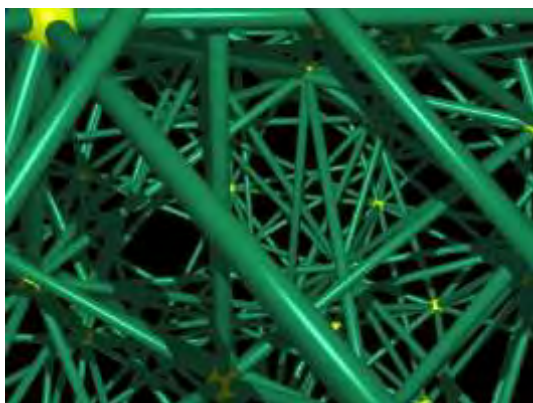


Figure 5 – Chap. 3 : Le 600 en projection orthogonale

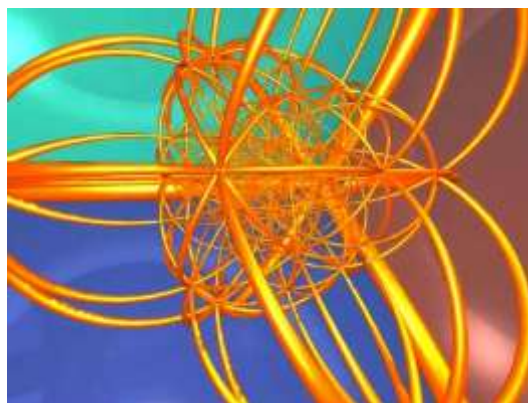


Figure 6 – Chap. 4 : Le 600 en projection stéréographique

Les chapitres 5 et 6, *nombres complexes*, proposent une introduction aux nombres complexes, qu'on apprend dans les classes terminales en France. Il ne s'agit pas de se substituer à un cours classique, mais nous pensons que ces chapitres pourraient en être d'agréables compléments. Ces chapitres sont les plus « scolaires » du film.

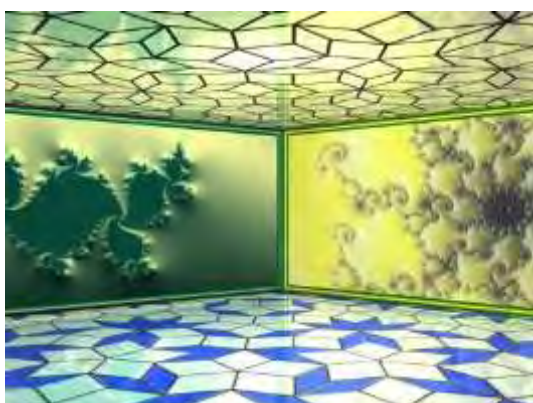


Figure 7 – Chap. 5 : Nombres complexes

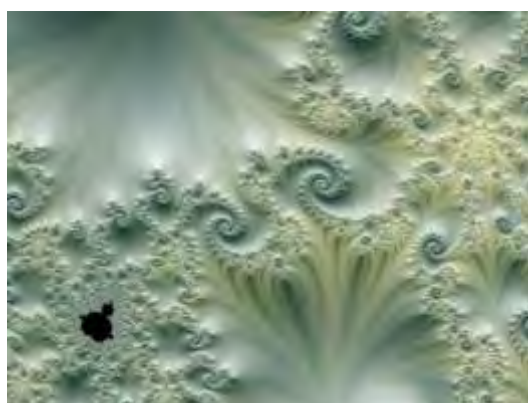


Figure 8 – Chap. 6 : L'ensemble de Mandelbrot

Les chapitres 7 et 8 contiennent une introduction à *la fibration de Hopf*, qui n'est pas discutée au lycée, ni même dans les premiers cycles universitaires. Il est donc clair qu'il n'est pas destiné à de vrais débutants. Mais c'est bien joli et cela mérite donc quelques efforts. En principe, tout est expliqué même si, bien sûr, les choses vont parfois un peu vite. Les [références](#) données sur le site internet pourront être utiles en cas de difficultés.

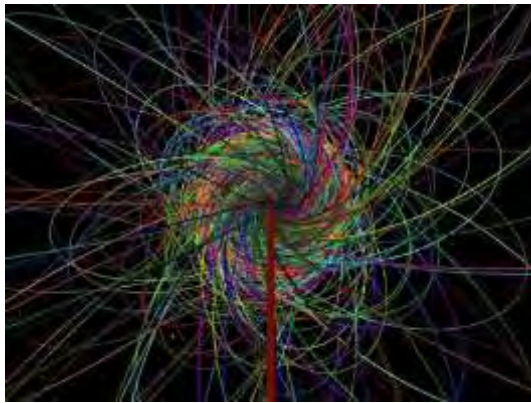


Figure 9 – Chap. 7 : Fibration

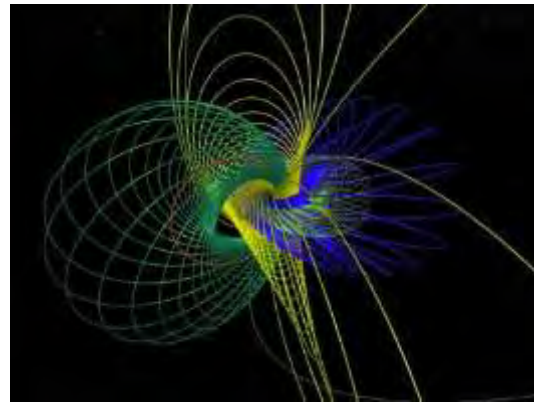


Figure 10 – Chap. 8 : Cercles de Hopf

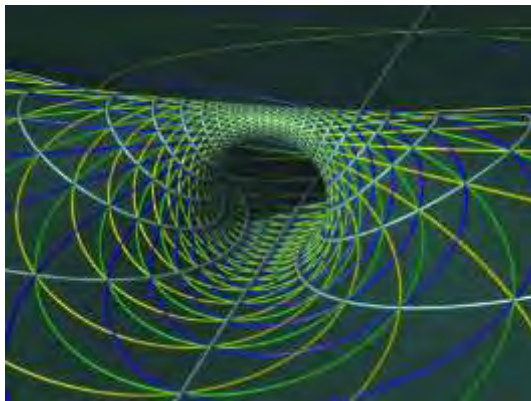


Figure 11 – Chap. 8 : Cyclides de Dupin d'un côté...

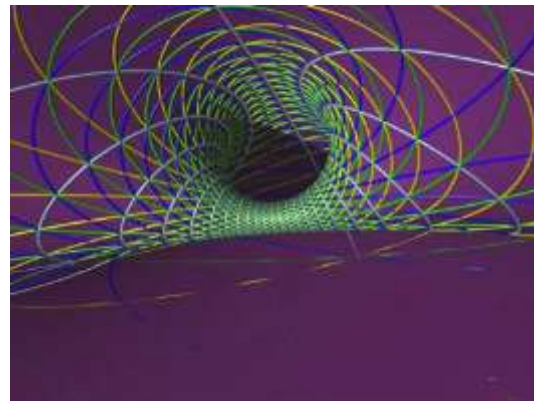


Figure 12 – ... et de l'autre côté.

Enfin, **le chapitre 9** a un statut particulier. Il propose *une preuve d'un théorème de géométrie*. Cette démonstration est en principe compréhensible par un collégien et ce chapitre aurait pu être placé après le chapitre 1. Les mathématiques n'existeraient pas si les théorèmes n'étaient pas démontrés. Nous avons voulu exprimer cela clairement à la fin du film dont l'essentiel est de montrer des objets mathématiques.

Voici quelques parcours possibles :

Collégien : 1 ou 1-2 ou 1-2-9

Lycéen : 1-2-(3-4)-9

Lycéen scientifique 5-6

Etudiant de premier cycle scientifique : 2-3-4-5-6 ou 5-6-(7-8-9)

Second cycle scientifique : 7-8-(9)

Public général : 1-2-3-4-(9)

III. QUELQUES EXPÉRIENCES

Il est possible à partir du site internet de déposer un commentaire. Trois ans après la sortie de Dimensions, nous continuons tous les jours de recevoir des messages, toujours très agréables à lire. Régulièrement, certains professeurs de lycée nous racontent qu'ils n'hésitent pas à montrer des extraits du film comme complément de leurs cours. Ces exemples concernent surtout les chapitres 5 et 6 autour des nombres complexes que de nombreux professeurs de classes terminales apprécient particulièrement.

Plus rarement, quelques professeurs de collège montrent à leurs élèves le dernier chapitre, une belle occasion de démontrer une propriété fondamentale de la projection stéréographique avec les théorèmes de Thalès et de Pythagore. Il est vrai que ce chapitre est beaucoup moins spectaculaire que les autres au niveau des images mais nous pensons qu'il constitue un excellent outil pédagogique.

Certains collègues universitaires encouragent vivement leurs étudiants à étudier les chapitres 7 et 8 autour de la fibration de Hopf. Les images que nous montrons sont un beau complément à un cours de topologie en basse dimension, d'autant plus que la fibration de Hopf a joué un rôle essentiel dans le développement de la topologie et de la topologie algébrique dans la première moitié du XX^e siècle.

Enfin, nous recevons énormément de messages d'amateurs de mathématiques qui nous font part du plaisir qu'ils ont pris avec ce film et de leur admiration. Presque tous ces messages se terminent par la même question : quand sortira Dimensions II ?

IV. UN SITE INTERNET POUR ACCOMPAGNER LE FILM

Le site internet du projet¹ contient beaucoup d'informations complémentaires. Nous y avons inclus une description précise du scénario du film en y ajoutant des références internet qui permettent d'approfondir le sujet. C'est grâce à la gentillesse de nombreux collègues et d'anonymes sur internet que le site de *Dimensions* est aujourd'hui accessible dans 9 langues. Pour la distribution, nous avons choisi une licence « *Creative Commons* » qui autorise de reproduire, distribuer, et communiquer gratuitement à condition de citer les auteurs, de ne pas modifier le contenu, et de ne pas l'utiliser à des fins commerciales². Concrètement, nous mettons à disposition les fichiers du film sur notre site pour téléchargement gratuit. Il nous semble en effet que notre public est pour l'essentiel constitué de grands utilisateurs d'internet. Par ailleurs, certaines personnes seront probablement intéressées par l'acquisition d'un DVD ou ne voudront pas télécharger le film. Ils pourront le commander directement sur le même site au prix de 10 euros, frais de port compris indépendamment du pays. Les bénéfices sur chaque DVD vendu nous permettent de distribuer gratuitement des DVD, comme ce fut par exemple le cas pour le congrès de l'APMEP en 2008 à La Rochelle (800 exemplaires offerts), aux participants des Olympiades Internationales de Mathématiques en 2008 à Madrid (500 exemplaires), au CIMPA (500 exemplaires), etc. Des collègues japonais ont traduit en japonais le livret explicatif et ont distribué 2 000 exemplaires du DVD à des enseignants du secondaire.

En plus de notre site www.dimensions-math.org hébergé à Lyon, *Dimensions* peut être téléchargé à partir de quatre autres sites miroirs situés au Brésil, en Chine, au Japon, au Mexique et aux États-Unis. Le serveur lyonnais reçoit lui seul environ 1 000 visites quotidiennement et, d'après Google Analytics, chacun des 209 pays du monde référencés est venu nous visiter ! Nous avons également le plaisir de recevoir de nombreux commentaires venus du monde entier, presque toujours très enthousiastes, certains d'entre eux étant même émouvants. Beaucoup nous félicitent aussi pour avoir choisi une diffusion « *Creative Commons* » et il nous semble clair que nous avons en effet fait le bon choix avec ce type de copyright. Dans la mesure où nous n'avons aucune ambition financière, ce type de distribution est le meilleur et il a sans aucun doute augmenté le nombre de ventes de DVD.

En 2010, nous avons reçu le *Prix d'Alembert* de la Société Mathématique de France. Cette belle récompense est certainement pour nous un encouragement vers d'autres aventures...

¹ www.dimensions-math.org

² voir <http://creativecommons.org>

RÉFÉRENCES

- Alvarez A., Ghys E., Leys J. (2008) *Dimensions*.
<http://www.dimensions-math.org>
- Ghys E. (2006) *Henri Poincaré et le monde non euclidien*.
http://smf.emath.fr/cycle_texte_mathematiciens
- Tao T. (2007) *Étienne Ghys, Knots and dynamics*.
<http://terrytao.wordpress.com/2007/08/03/2006-icm-etienne-ghys-knots-and-dynamics/>