UN MÉTA-LANGAGE POUR AIDER À LA TRANSITION SECONDAIRE-UNIVERSITÉ

Martine DE VLEESCHOUWER*

Résumé – Cette contribution concerne l'enseignement et l'apprentissage de la dualité en algèbre linéaire. Combinant une perspective institutionnelle et le concept de contrat didactique, nous soutenons que certaines difficultés des étudiants novices peuvent résulter de caractéristiques spécifiques au contrat en vigueur à l'université, à différents niveaux. Nous illustrons cette thèse dans le cas de la dualité, pour lequel nous concevons un enseignement expérimental utilisant entre autres un méta-langage et visant à aider les étudiants à entrer dans le nouveau contrat à différents niveaux. Par l'analyse de productions des étudiants, nous observons qu'ils développent des compétences spécifiques au nouveau contrat en vigueur.

Mots-clefs : transition secondaire-université, algèbre linéaire, contrat didactique, institutions, niveaux micro et macro

Abstract – This contribution concerns the teaching and learning of duality in linear algebra. Combining an institutional perspective and the concept of didactic contract, we argue that some of the novice students' difficulties can result from specific features of the university contract, at different levels. We illustrate this thesis in the case of duality, for which we designed an experimental teaching, using among other things a meta-language aimed at supporting students' adherence to the new contract, at different levels. Analyzing students' productions, we observe that they developed abilities specific to the new contract.

Keywords: secondary-tertiary transition, linear algebra, didactic contract, institutions, micro and macro levels

La dualité en algèbre linéaire, qui est enseignée en première année à l'Université de Namur à des étudiants se destinant à un master en mathématique ou en physique, est reconnue comme une matière difficile pour ces étudiants débutants. L'objectif principal de notre travail est de comprendre les difficultés qu'ils rencontrent, et de proposer un enseignement de la dualité susceptible de surmonter ces difficultés.

La dualité peut être considérée comme un contenu spécifique aux mathématiques universitaires, éloignées de l'école secondaire. Cela nous a conduit à positionner notre étude dans le cadre de la transition secondaire-université. Dans un travail précédent (De Vleeschouwer 2010a), nous avons analysé les difficultés des étudiants confrontés à la dualité et nous avons catégorisé les difficultés observées en adoptant un point de vue institutionnel. Le travail que nous présentons ici correspond à deux nouvelles orientations de recherche. D'un point de vue théorique, nous proposons d'envisager le changement de contrat didactique entre l'école secondaire et l'université sous une perspective institutionnelle. D'un point de vue empirique, nous avons conçu et testé un enseignement expérimental ayant pour but d'aider les étudiants à entrer dans le nouveau contrat didactique. Nous en examinerons l'impact sur des productions d'étudiants.

Dans la première partie, nous décrivons nos propositions théoriques, articulant le contrat didactique et la perspective institutionnelle. Dans la deuxième partie, nous appliquons notre analyse au contexte d'algèbre linéaire et plus particulièrement à la dualité en algèbre linéaire. Nous présentons l'enseignement expérimental dans la troisième partie ; nous analysons son impact dans la quatrième partie, en nous basant sur des réponses d'étudiants à un questionnaire.

* Unité de didactique des mathématiques, Université de Namur – Belgique – mdv@math.fundp.ac.be

© De Vleeschouwer M. (2012) Un méta-langage pour aider à la transition secondaire-université. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT7, pp. 975–986). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

I. CONTRAT DIDACTIQUE, INSTITUTIONS ET TRANSITION SECONDAIRE-UNIVERSITÉ

La notion de contrat didactique a été introduite par Brousseau (1986), pour décrire un système de règles, souvent implicites, impliquant les étudiants et l'enseignant, à propos d'un objet de savoir particulier. Une autre interprétation du contrat, pertinente dans notre étude, est formulée en termes de partage de responsabilités, par rapport à la connaissance, entre les étudiants et l'enseignant :

> Alors se noue une relation qui détermine — explicitement pour une part, mais surtout implicitement — ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'enseigné, a la responsabilité de gérer et dont il sera d'une manière ou d'une autre, responsable devant l'autre. Ce qui nous intéresse ici est le contrat didactique, c'est-à-dire la part de ce contrat qui est spécifique au « contenu » : la connaissance mathématique visée. (Brousseau 1998, p. 61)

Sous cet angle, on peut affirmer, comme Artigue (1999), que quand un étudiant entre à l'université, « le contrat didactique n'est plus le même ». Plusieurs auteurs adoptent ce point de vue pour étudier les difficultés des étudiants débutants (Bloch 2005 ; Grønbæk, Misfeldt et Winsløw 2009). Cependant, les caractéristiques du contrat identifiées sont souvent très générales : les étudiants doivent montrer une plus grande autonomie, ils doivent être en mesure de développer des raisonnements impliquant des cadres différents (Douady 1987), etc. Ces caractéristiques concernent des attentes institutionnelles générales et non un contenu mathématique particulier.

Les travaux de Chevallard (2007) peuvent nous aider à éclairer ce dernier point. Selon cet auteur, un sujet, dans une institution, rencontre une certaine connaissance mathématique. L'institution façonne cette connaissance en une organisation mathématique, ou praxéologie, qui se compose de quatre composantes : un type de tâches, une technique pour accomplir ce type de tâches, une technologie qui est un discours justifiant la technique, et une théorie. Les organisations mathématiques existent à différents niveaux, du plus particulier au plus général. Nous y reviendrons par la suite en faisant référence à l'échelle de niveaux de co-détermination didactique (Chevallard 2007).

Dans cette perspective, nous sommes amenée à distinguer plusieurs niveaux de contrat dans une institution donnée :

- Un contrat général, indépendant de toute connaissance ; Sarrazy (2005) l'appelle le contrat pédagogique. Par exemple, à l'université, dans certains pays, la présence au cours n'est pas obligatoire ; la prise de notes est sous la responsabilité des étudiants, etc.

- Un contrat didactique concernant la discipline mathématique (en général) dans l'institution. Par exemple, à l'université, un langage formel est utilisé en mathématique, des preuves rigoureuses sont présentées, etc.

- Un contrat didactique concernant un contenu particulier, concernant des notions mathématiques spécifiques.

Ces distinctions étant établies, nous sommes maintenant en mesure de préciser la question principale sur laquelle nous nous pencherons dans cet article : est-il possible d'aider les étudiants à entrer dans le nouveau contrat aux différents niveaux, et comment ? Nous étudierons plus particulièrement cette question dans le contexte de la dualité en algèbre linéaire.

Nous identifions tout d'abord les caractéristiques du contrat didactique à l'université, correspondant aux différents niveaux identifiés, pour l'enseignement de la dualité.

II. CONTRAT DIDACTIQUE INSTITUTIONNEL ET DUALITÉ EN ALGÈBRE LINÉAIRE

Nous ne considérons pas ici le contrat au niveau général, mais nous commençons par le niveau du contrat didactique spécifique à la discipline mathématique. En examinant différents travaux de recherche concernant la transition (Praslon 2000 ; Bloch 2005 ; Bosch et al. 2004 ; Winsløw 2008), nous identifions les difficultés suivantes des étudiants, comme correspondant à des changements de contrat didactique au niveau de la discipline mathématique, entre l'institution « enseignement secondaire » et l'institution « université » :

- des difficultés à construire des exemples ;
- des difficultés à travailler dans des cadres différents, en passant d'une représentation à une autre ;
- des difficultés liées à l'utilisation d'un langage formel et symbolique : ce que Dorier, Robert, Robinet et Rogalski (1997) nomment « l'obstacle du formalisme » ;
- des difficultés à travailler au niveau technologico-théorique (Chevallard 2007) ; en particulier, des difficultés à produire un discours justifiant une technique.

Selon les auteurs mentionnés ci-dessus, à l'université, l'étudiant a généralement la charge de ces questions qui étaient sous la responsabilité de l'enseignant à l'école secondaire.

A un niveau plus spécifique, concernant l'algèbre linéaire et la dualité, nous déduisons les règles du contrat didactique par le biais de l'analyse de manuels (De Vleeschouwer 2010b). On a ainsi pu constater une modification importante : plusieurs concepts, en algèbre linéaire, peuvent changer de statut, selon le contexte. Par exemple, une matrice peut être considérée comme représentant une application linéaire dans des bases données ; elle peut aussi être considérée comme un élément d'un espace vectoriel. Une fonction peut être vue à la fois comme un processus agissant sur des objets donnés, et à la fois comme un élément d'un espace vectoriel. Ce dernier exemple est crucial en dualité, où les étudiants auront à déterminer le dual d'un espace vectoriel donné : un ensemble de formes linéaires. En Belgique, où notre étude a lieu, les étudiants rencontrent les matrices et les fonctions à l'école secondaire. Mais dans cette institution, les matrices et les fonctions ne sont pas considérées comme des éléments d'un ensemble. À l'université, l'étudiant doit être capable de basculer entre les deux statuts qui ne sont par ailleurs pas explicitement présentés.

En 2008-2009, nous avons élaboré et testé un enseignement de la dualité en tenant compte de ces caractéristiques du contrat, tant au niveau de la discipline mathématique qu'au niveau du contenu spécifique qu'est la dualité.

III. AIDER LES ÉTUDIANTS À ENTRER DANS UN NOUVEAU CONTRAT : UNE EXPÉRIENCE À NAMUR

Nous présentons ici les principaux choix que nous avons faits pour l'enseignement expérimental élaboré. Ce dernier est centré sur la dualité, mais met aussi l'accent sur quelques prérequis (tel un répertoire minimal d'espaces vectoriels). Nous voulons tout d'abord en situer le contexte, tant en ce qui concerne les étudiants concernés qu'en ce qui concerne l'organisation.

L'université de Namur a mis en place un dispositif, baptisé « opération tremplin », ayant pour but d'aider les étudiants de première année dans leur entrée à l'université (De Vleeschouwer 2008). Ce dispositif consiste à proposer des séances de remédiation aux étudiants, en réponse à une demande de leur part, résultant d'une difficulté rencontrée. Ces séances, appelées aussi séances tremplin, sont proposées à raison de deux à quatre heures par semaine selon les sections concernées. En tant qu'enseignante, nous avons participé à l'opération tremplin proposée aux étudiants de première année se destinant à obtenir un Master en mathématiques à l'Université de Namur (26 étudiants étaient inscrits en première année en 2008-2009). Les séances tremplin ont principalement servi de niche au dispositif expérimental que nous avons conçu (seule la variété d'espaces vectoriels a été développée dans un travail de groupe, en dehors de l'opération tremplin). Ce choix est le résultat de contraintes institutionnelles : la mise en place de l'enseignement expérimental dans le cours « normal » (cours théorique et travaux dirigés associés) aurait été refusée par les responsables de cet enseignement. Généralement, une partie seulement des étudiants assistent aux séances tremplin. Pour l'enseignement expérimental, tous les étudiants ont été invités à participer ; 20 d'entre eux ont finalement suivi les séances. Notre analyse concerne donc ces 20 étudiants.

Avant l'enseignement de la dualité, les étudiants avaient déjà vu, au cours théorique et aux travaux dirigés (exercices) d'algèbre linéaire, les espaces vectoriels (structures algébriques, dépendance linéaire et dimension, sous-espaces vectoriels), les applications linéaires et les matrices associées.

Le dispositif expérimental que nous avons conçu commence avant l'enseignement de la dualité par un travail de groupe (obligatoire) visant à fournir aux étudiants un répertoire minimum d'espaces vectoriels. La dualité en elle-même a été abordée un mois après le début de l'année académique, en octobre 2008, et l'enseignement correspondant a duré cinq semaines :

- au cours de la semaine 1, les étudiants suivent un cours théorique (1,5 h) portant sur les formes linéaires et l'espace dual. Une majorité d'entre eux participent ensuite, en séance tremplin, à une activité dont le but est de sensibiliser aux différents statuts que peut revêtir une matrice en algèbre linéaire : élément d'un groupe, d'un anneau, d'un espace vectoriel ou représentant une application linéaire ;
- au cours de la semaine 2, nous proposons aux étudiants, en séance tremplin, une activité, intitulée « formes linéaires et dual », décrite ci-après (1h). De plus, les étudiants suivent un cours théorique (1,5 h) où leur sont présentés l'espace bidual, le théorème de réflexivité et la transformation transposée ;
- durant la semaine 3, des illustrations d'espaces duaux et biduaux sont présentés en séance tremplin (1h) ;
- enfin, au cours des semaines 4 et 5, les étudiants assistent à des séances de travaux dirigés (exercices) sur la dualité (2×2h).

Nous nous concentrons dans cet article sur l'activité « formes linéaires et dual », issue de ce dispositif expérimental. Nous la présentons ici, avec les choix associés (décrits en détails dans De Vleeschouwer 2010b).

Nous avons déjà mis en évidence que, dans l'institution université, une fonction, et donc en particulier une forme linéaire, peut changer de statut selon le contexte considéré. Dans le contexte de la dualité algébrique, différents statuts d'une forme linéaire peuvent être présents dans une même tâche. En effet, lorsqu'on considère une forme linéaire φ_i issue d'une base duale X' d'une base X dans un espace vectoriel E, elle combine deux statuts :

- le statut de processus opérant sur des éléments de l'espace vectoriel E. Ce statut apparaît dans la relation liant une base $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de l'espace vectoriel E à sa base duale $X' = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$: $\forall \mathrm{i}, \mathrm{j} \in \{1, \ldots, n\}$, $\varphi_\mathrm{i}(x_\mathrm{j}) = \delta_\mathrm{ij}$, où δ_ij représente le symbole de Kronecker ;

- le statut d'élément d'un espace vectoriel, à savoir le dual de E (noté E'), élément en tant que vecteur faisant partie d'une base de l'espace vectoriel E'.

Cette pluralité de statuts peut être considérée comme un aspect du contrat didactique institutionnel, au niveau d'un contenu particulier. « Une forme linéaire est un processus, et un élément d'un espace vectoriel, et les étudiants doivent être capables de passer d'un statut à l'autre » est une règle de ce contrat. Ceci est certainement en relation avec la dialectique « process/object » (Dubinsky 1991), mais nous n'examinons pas ici l'aspect cognitif : nous considérons la manière dont l'institution façonne le contenu. Cette règle reste implicite, et ce changement de statuts engendre des difficultés pour les étudiants. Dans le dispositif expérimental que nous avons conçu, nous avons choisi de rendre cette règle explicite pour les étudiants.

À cette fin, nous introduisons un vocabulaire spécifique, présenté aux étudiants lors de l'enseignement proposé durant les sessions tremplin. Ce vocabulaire n'est donc pas un outil d'analyse pour notre recherche ; il peut être considéré comme un méta-langage proposé aux étudiants (Robert et Robinet 1996). Du point de vue du chercheur, il est en relation directe avec les niveaux introduits par Chevallard (2007) dans son échelle des niveaux de co-détermination didactique[1]. Nous développerons ce point après avoir présenté le vocabulaire spécifique que constituent les niveaux *micro* et *macro*.

Nous disons qu'une forme linéaire φ est considérée au *niveau micro* lorsqu'elle est considérée en tant que processus opérant sur des éléments d'un espace vectoriel E (construit sur le champ[2] K). Nous expliquons aux étudiants que ce choix de vocabulaire est une métaphore, indiquant que φ est perçue « en détail », ce qui permet d'observer par exemple la transformation qu'elle opère sur les différents vecteurs de l'espace vectoriel E de départ. À ce niveau, on peut en considérer le noyau, l'image, le rang, etc. On peut en avoir une représentation imagée, présentée à la Figure 1.

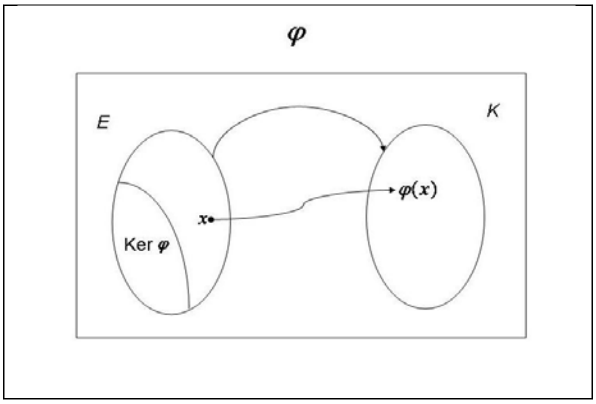


Figure 1 *– Exemple du niveau micro d'une forme linéaire* φ

Nous disons qu'une forme linéaire φ est considérée au *niveau macro* lorsqu'elle est considérée comme un élément d'un espace vectoriel (fonctionnel). Si l'on considère de la sorte d'autres formes linéaires définies sur le même espace E, et qu'on les rassemble dans un ensemble auquel on adjoint des lois d'addition et de multiplication par un scalaire, on obtient alors un espace vectoriel, qui n'est autre que le dual de E. Les formes linéaires considérées ont alors le statut d'élément d'un espace vectoriel. Nous parlons là d'un niveau macro. La Figure 2 en offre une représentation imagée.

[1] Le bas de l'échelle des niveaux de co-détermination didactique est composé de l'échelon « discipline », suivi de celui de « domaine », de « secteur », de « thème » et de « sujet ».
[2] Dans certains pays francophones, on parlera plutôt d'un *corps commutatif* (« field » en anglais).

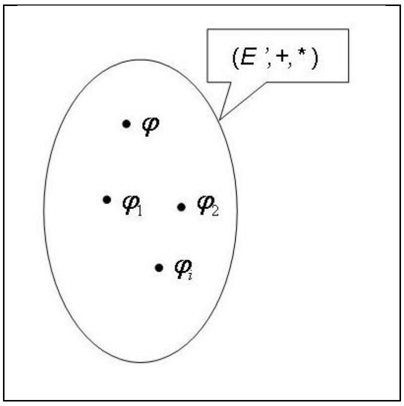


***Figure 2** – Exemple du niveau macro d'une forme linéaire φ*

Dans les deux niveaux présentés (micro-macro), il s'agit bien entendu du même objet φ « forme linéaire », mais considéré sous des statuts différents. Ce changement de statut, et a fortiori une combinaison de ces deux statuts, ne va pas de soi pour les étudiants ; nous estimons que la distinction explicite entre niveaux micro et macro peut les aider à faire cette distinction, et à prendre en compte, pour l'objet « forme linéaire », les notions afférentes (rang, image, vecteur, base, etc.) selon le statut considéré. Ainsi, on peut interpréter les niveaux micro et macro comme une explication de règles habituellement implicites dans le contrat. Le dispositif « formes linéaires et dual » niché dans l'opération tremplin peut donc être considéré comme une aide à l'entrée dans le nouveau contrat, au niveau de la discipline.

Du point de vue du chercheur, les niveaux micro et macro proposés pour les formes linéaires correspondent à l'appartenance de l'objet « forme linéaire » à différents *secteurs* du *domaine* de l'algèbre linéaire, en référence à l'échelle des niveaux de co-détermination didactique de Chevallard (2007). La figure 3, davantage commentée dans (De Vleeschouwer 2010b), présente la carte conceptuelle institutionnelle de la dualité élaborée à partir du polycopié d'algèbre linéaire à Namur. On peut considérer que les encadrés de cette figure correspondent à différents *secteurs* de l'algèbre linéaire. On peut y voir que les formes linéaires peuvent intervenir comme *thème* ou *sujet* à la fois du secteur des applications linéaires et du secteur dualité. Selon le secteur considéré, les *sujets* associés aux formes linéaires seront différents. Il est bien entendu impensable d'utiliser les termes de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 2007) lors de l'enseignement de la dualité. C'est pourquoi le vocabulaire « niveau micro » et « niveau macro » a été explicitement présenté aux étudiants.

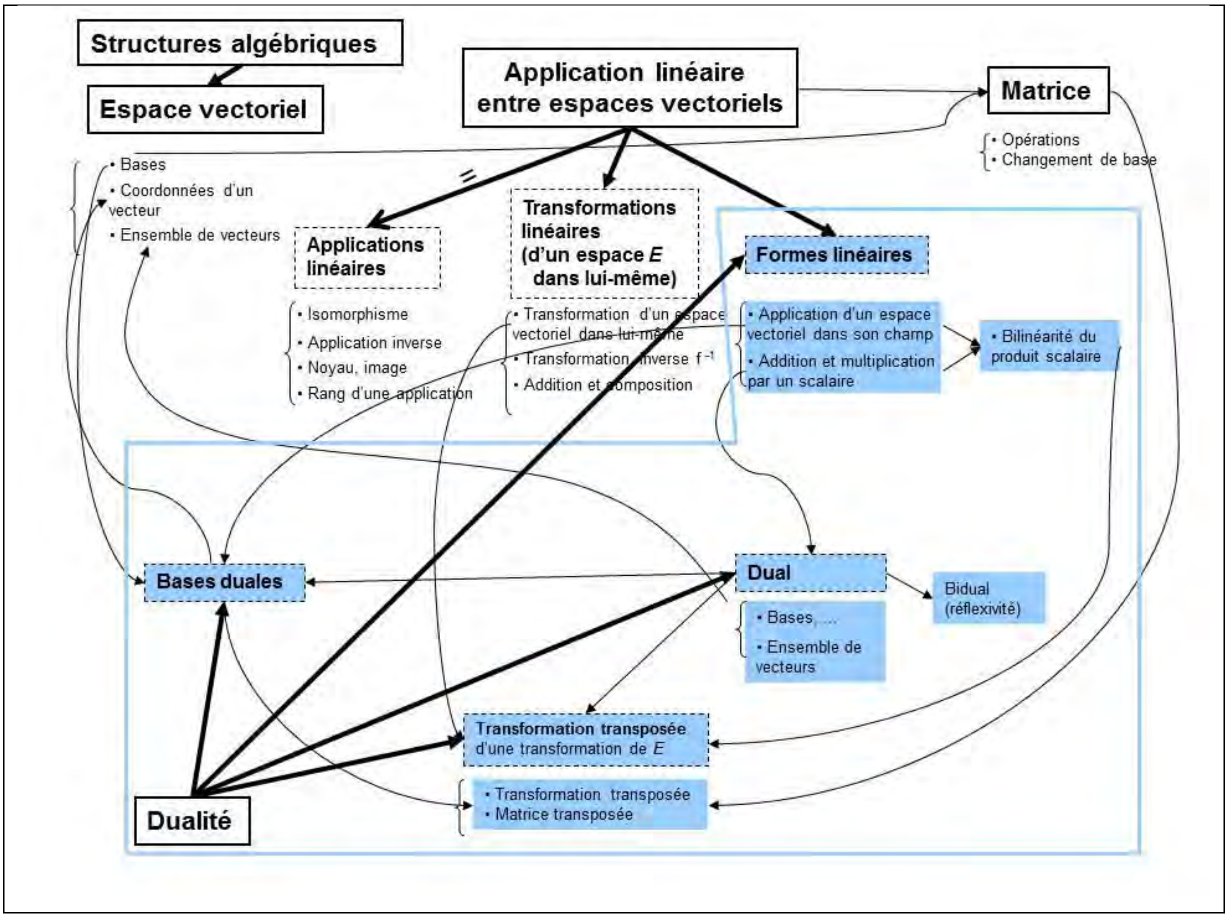


***Figure 3** – Carte conceptuelle institutionnelle de la dualité, élaborée à partir du polycopié d'algèbre linéaire à Namur*

Comme expliqué en début de cette section, le dispositif « formes linéaires et dual » présenté ici s'insère dans un dispositif plus général proposé à l'université de Namur en 2008-2009 pour aider les étudiants dans l'apprentissage de la dualité en algèbre linéaire. Une évaluation de ce dispositif a eu lieu quatre mois après l'enseignement expérimental, comportant entre autres un questionnaire. Des extraits de ce dernier, ainsi que les résultats associés, sont présentés dans la section suivante. Dans les réponses des étudiants, plus que le succès ou l'échec, nous tentons d'identifier des indices de leur entrée ou non dans le nouveau contrat.

IV. IMPACT DE L'ENSEIGNEMENT EXPÉRIMENTAL

Nous présentons ici un extrait du questionnaire, et analysons les réponses des étudiants en termes de contrat didactique.

Question 1. Considérons $\mathcal{P}^3$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, construit sur le champ des réels. Soient, pour $i = 1, \ldots, 4$, $p_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tels que $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $p_1(x) = x^3 + 2x^2 + 4$, $p_2(x) = 2x^3 - x + 2$, $p_3(x) = x^3 - 1$, $p_4(x) = 2x^3 + 3$.

Montrez que l'ensemble $\{ p_1, p_2, p_3, p_4 \}$ constitue une base de $\mathcal{P}^3$, et déterminez-en la base duale.

Question 2. Soient f_1, f_2, f_3 telles que :

$$\begin{array}{cccc} f_1: & \mathbb{R}^5 & \to & \mathbb{R} \\ & v=(a,b,c,d,e) & & f_1(v)=3a-2e \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} f_2: & \mathbb{R}^5 & \to & \mathbb{R} \\ & v=(a,b,c,d,e) & & f_2(v)=a-b+2c \end{array}$$

f_3: $\mathbb{R}^5$	$\rightarrow$	$\mathbb{R}$
$v = (a, b, c, d, e)$		$f_3(v) = 3b + 6c - 2e$

a) Donner un exemple d'espace vectoriel auquel appartiennent f_1, f_2, f_3.

b) f_1, f_2, f_3 sont-elles linéairement indépendantes ou dépendantes ?

c) Donnez un exemple de forme linéaire qui n'appartient pas au Span$\{f_1, f_2, f_3\}$.

Question 3. Choisissez un espace vectoriel autre que celui des polynômes, $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ ($\forall\ n \in \mathbb{N}$), et donnez un exemple de forme linéaire défini sur cet espace.

Tableau 1 *– Extrait du questionnaire proposé aux étudiants*

La méthodologie utilisée ici est basée sur l'analyse a priori du questionnaire (Hejny et al. 1999). Nous identifions, dans lequestionnaire, les aspects spécifiques du contrat en vigueur à l'université, et nous examinons, dans les réponses des étudiants, si cela entraîne des difficultés, ou si par contre cela indique l'entrée dans le sscontrat.

La première question est posée dans le cadre des polynômes et fait explicitement référence à la dualité, puisque les étudiants ont à déterminer la base duale d'une base donnée. Les étudiants doivent considérer conjointement le niveau micro et macro des formes linéaires, ce qui est typique du nouveau contrat au niveau du contenu « formes linéaires ».

La deuxième question est posée dans le cadre fonctionnel. Les fonctions proposées sont définies à un niveau micro. Bien qu'il s'agisse de formes linéaires, ce terme n'est cependant pas utilisé dans l'énoncé de la question afin de ne pas induire la réponse « espace dual » à la question 2.a). Pour répondre à la question 2.b), les étudiants doivent considérer les fonctions en tant que vecteurs, ce qui signifie un changement de niveau, puisqu'ils doivent ici travailler au niveau macro. Le raisonnement des étudiants doit donc se placer à un niveau différent que celui proposé au début de la question 2.

La question 3 propose un cadre différent de celui des polynômes (question 1) ou du cadre algébrique (classiquement présenté au cours). Le changement de cadres est également typique du contrat didactique à l'université au niveau de la discipline. La deuxième partie de la question 3 demande de considérer une forme linéaire à un niveau micro, c'est-à-dire en tant que processus agissant sur les éléments de l'espace vectoriel choisi.

On remarque aussi que les questions 2.a), 2.c) et 3 requièrent la construction d'un exemple. À l'instar du changement de cadres, de telles tâches sont également typiques du contrat didactique institutionnel à l'université, au niveau discipline mathématique.

Nous allons maintenant examiner les réponses des étudiants, en nous concentrant sur les éléments identifiés dans l'analyse a priori.

Deux techniques principales ont émergé des réponses des étudiants pour déterminer si les polynômes proposés constituent une base (question 1) : le travail avec des polynômes ou avec des n-uplets. Huit étudiants (40%) préfèrent travailler avec des 4-uplets à la place des polynômes, mais seulement deux d'entre eux justifient leur raisonnement (par exemple un étudiant cite le théorème affirmant l'existence d'un isomorphisme entre $\mathcal{P}^3$ et $\mathbb{R}^4$). On peut considérer que, ce faisant, ces étudiants se conforment au contrat didactique au niveau de la discipline, qui considère que les différentes étapes d'un raisonnement mathématique doivent être justifiées. Tous les étudiants qui ont répondu au questionnaire ont été en mesure de déterminer que les polynômes donnés étaient linéairement indépendants. Travailler dans un cadre non-habituel, comme c'est souvent le cas dans l'institution Université, ne semble pas leur poser problème.

70% des étudiants décrivent les formes linéaires de la base duale dans un formalisme complet et détaillé, comprenant l'espace de départ, l'espace d'arrivée et l'image d'un vecteur (voir Figure 4). Nous interprétons ce type de réponses comme typiques du contrat didactique institutionnel et ce, à deux niveaux. Au niveau de la discipline tout d'abord, une réponse mathématique doit être aussi complète que possible. Ensuite, au niveau du contenu, une fonction est caractérisée par trois éléments dans l'institution Université (pour les étudiants désirant obtenir un master en mathématiques), alors que dans l'enseignement secondaire, une fonction est généralement décrite par l'expression « $f(x) = \ldots$ » ou par le graphique associé.

Douze étudiants (60%) décrivent analytiquement les quatre formes linéaires p_1', p_2', p_3', p_4' de la base duale et, en même temps, les considèrent en tant qu'éléments d'un ensemble : ils écrivent explicitement « $A' = \{ p_1', p_2', p_3', p_4' \}$ » (voir Figure 4). Ce faisant, les étudiants considèrent les formes linéaires à la fois au niveau micro et au niveau macro.

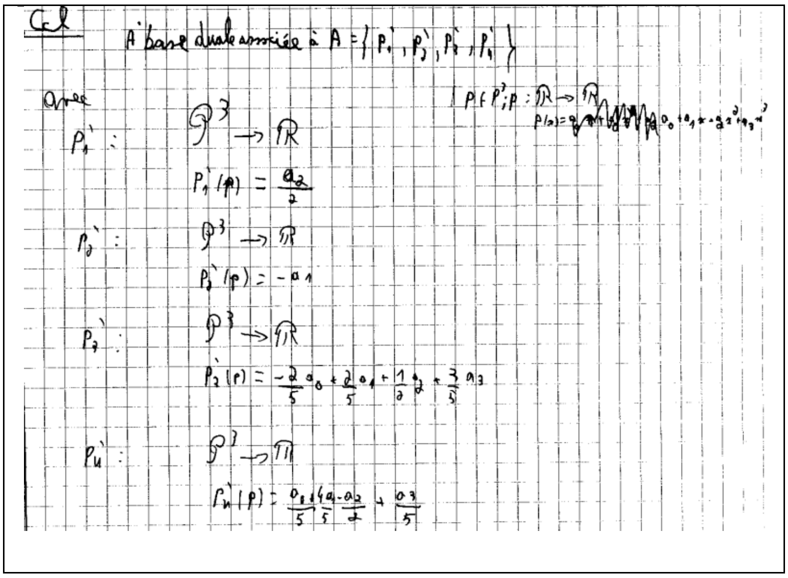
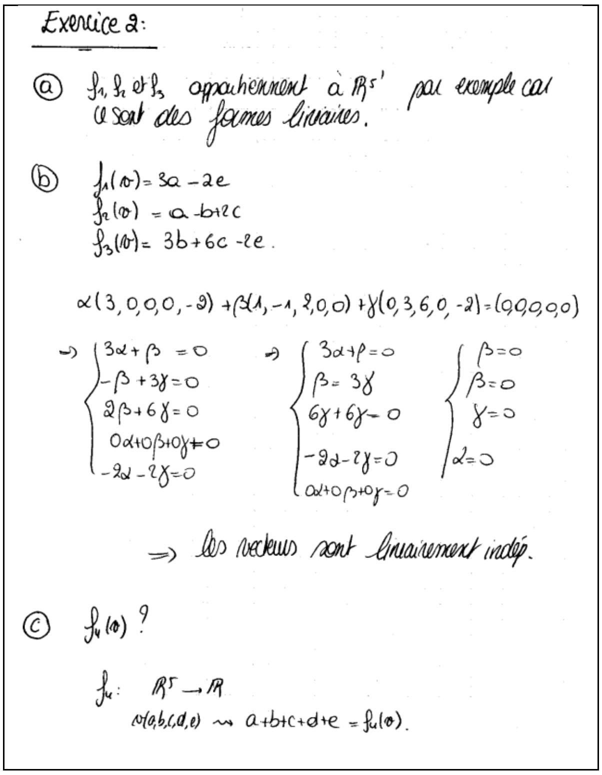


Figure 4 *– Conclusion d'un étudiant à la seconde partie de la question 1*

À la question 2.a), une quinzaine d'étudiants (75%) réussissent à donner un espace vectoriel comprenant les formes linéaire données, et neuf d'entre eux (45%) citent l'espace dual. Le type de tâches présenté ici requiert de considérer au niveau macro les applications qui ont été décrites dans l'énoncé en tant que processus, c'est-à-dire au niveau micro. Ce changement de statut ne semble pas constituer une difficulté pour une majorité d'étudiants. Le constat est le même en ce qui concerne la sous-question 2.b) : alors que les formes linéaires ont été données au niveau micro, dix-sept (85%) étudiants les ont considérées au niveau macro, en répondant correctement qu'elles sont linéairement indépendantes. De plus, six étudiants ont converti les formes linéaires en *4*-uplets avant de débuter les calculs (voir Figure 5). Ce fait peut s'interpréter comme la conversion d'une application d'un niveau micro à un niveau macro. Dans la figure 5, on voit que l'étudiant termine sa réponse à la question 2.b) en écrivant « les vecteurs sont linéairement indép. » à la place d'écrire « les formes linéaires sont linéairement indép. »



Exercice 2 :

(a) f_1, f_2 et f_3 appartiennent à $\mathbb{R}^{5'}$ par exemple car ce sont des formes linéaires.

(b) $f_1(v) = 3a - 2e$
$f_2(v) = a - b + 2c$
$f_3(v) = 3b + 6c - 2e$.

$\alpha(3,0,0,0,-2) + \beta(1,-1,2,0,0) + \gamma(0,3,6,0,-2) = (0,0,0,0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + \beta = 0 \\ -\beta + 3\gamma = 0 \\ 2\beta + 6\gamma = 0 \\ 0\alpha + 0\beta + 0\gamma = 0 \\ -2\alpha - 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + \beta = 0 \\ \beta = 3\gamma \\ 6\gamma + 6\gamma = 0 \\ -2\alpha - 2\gamma = 0 \\ 0\alpha + 0\beta + 0\gamma = 0 \end{cases} \begin{cases} \beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ les vecteurs sont linéairement indép.

(c) $f_4(v)$?

$f_4 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$
$v(a,b,c,d,e) \rightsquigarrow a + b + c + d + e = f_4(v)$.

Figure 5 *– Exemple de réponse d'un étudiant à la question 2*

L'analyse des réponses des étudiants à la question 3 montre que ceux-ci semblent disposer d'un répertoire minimum d'espaces vectoriels : parmi les espaces vectoriels cités dans les réponses, onze sont des espaces vectoriels de matrices (matrices carrées de taille 2 ou 3), deux sont des espaces vectoriels de fonctions (transformations de $\mathbb{R}$ ou de$\mathbb{R}^2$), et un peut être considéré comme algébrique ($\mathbb{Q}^3$ construit sur $\mathbb{Q}$). Les tentatives infructueuses sont $\mathbb{C}^2$ ou $\mathbb{C}^3$ (cité par trois étudiants) et $\mathbb{N}$ (cité par deux étudiants). Un dernier étudiant donne une réponse sans sens. Remarquons que la structure de module, qui généralise la structure d'espace vectoriel, n'a pas été présentée aux étudiants. Ceci explique peut-être la présence de propositions impliquant $\mathbb{C}^2$ ou $\mathbb{C}^3$ dans les réponses de trois d'entre eux. La variété de cadres en algèbre linéaire est typique du nouveau contrat institutionnel au niveau discipline. On constate aussi dans les réponses à la question 3 que huit étudiants *justifient* le fait que leur exemple est bien une « forme linéaire », même si sept d'entre eux ne donnent qu'une explication partielle : « l'espace d'arrivée est le domaine ». Il semble que la présence de justifications dans le contrat didactique au niveau discipline ne soit pas évidente.

V. CONCLUSION

Dans ce travail nous avons tenté de déterminer les règles du contrat didactique en vigueur à l'université, dans le cas de la dualité. Sur la base de travaux de recherche antérieurs et d'une analyse des manuels, nous avons identifié des règles du contrat à différents niveaux : certaines de ces règles correspondent à des notions précises, comme des formes linéaires, tandis que d'autres concernent plus généralement les mathématiques.

Nous avons conçu un dispositif d'enseignement visant à aider les étudiants à entrer dans ce nouveau contrat. L'objectif d'un tel enseignement n'est certes pas de modifier le contrat en réduisant la part de responsabilité des étudiants. Dans le cas que nous avons présenté, nous avons choisi de rendre explicite une règle généralement implicite, au niveau d'un contenu particulier (les formes linéaires), en introduisant un méta-langage (micro/macro) pour les étudiants. Nous leur avons également proposé des exercices qui requièrent des changements de cadres, la construction d'exemples, et plus généralement des exercices qui requièrent de se conformer aux nouvelles attentes de l'institution « université », au niveau de la discipline. Nous ne prétendons pas que toutes les règles doivent être explicitées. Certaines règles du contrat doivent rester implicites. Ce paradoxe est une condition essentielle pour l'apprentissage (Brousseau 1998). En utilisant le méta-langage « micro-macro », nous n'avons pas seulement dévoilé une règle impliquant les formes linéaires ; nous avons contribué à sensibiliser les étudiants aux différents statuts que peuvent revêtir les objets mathématiques à l'université, ainsi qu'à la nécessité de changement de statut selon le contexte. Le méta-langage rend explicite cette nouvelle responsabilité.

L'analyse des réponses des étudiants à notre questionnaire semble montrer qu'ils commencent à entrer dans le nouveau contrat. Nous n'avons pas pu effectuer de comparaison avec un groupe témoin d'étudiants, les conditions de notre étude ne nous le permettant pas. Cependant, en tant que professeur, nous avons remarqué que les étudiants qui ont suivi l'enseignement expérimental ne semblent pas avoir rencontré les difficultés habituelles, et nous considérons que le dispositif conçu a largement contribué à ce progrès. Nous avons maintenant l'intention d'étendre notre étude à d'autres sujets : les règles précises du contrat didactique à l'université restent largement inconnues.

RÉFÉRENCES

Artigue M. (1999) The teaching and learning of mathematics at university level – crucial questions for contemporary research in education. *Notices of the American Mathematical Society*, 1377-1385.

Bloch I. (2005) *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur*. Habilitation à diriger des recherches. Paris : Université Paris VII.

Bosch M., Fonseca C., Gascon J. (2004) Incompletud de las organizaciones matematicas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 24(2/3), 205-250.

Brousseau G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des mathématiques* 7(2), 33-115.

Brousseau G. (1998) *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (2007) Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In Ruiz-Higueras L., Estepa A., Javier García F. (Eds) (pp. 705-746) *Sociedad, Escuela y Mathemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico*. Baeza : Universidad de Jaén.

De Vleeschouwer M. (2008) Aider les étudiants à entrer dans un nouveau contrat didactique institutionnel en mathématiques ? L'exemple de l'opération tremplin à l'université de Namur. *Actes du Ve Colloque Questions de Pédagogie dans l'Enseignement Supérieur*. Brest : TELECOM Bretagne.

De Vleeschouwer M. (2010a) Secondary-tertiary transition and students' difficulties: the example of duality. In Durand-Guerrier V., Soury-Lavergne S., Arzarello F. (Eds.) (pp. 1359-1368) *Proceedings of 6th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME)*. Lyon : Université Claude Bernard Lyon 1.

De Vleeschouwer M. (2010b) *Enseignement à l'Université, perspective institutionnelle et contrat didactique : le cas de la dualité en algèbre linéaire*. Thèse de doctorat. Namur : Presses universitaires de Namur.

Dorier J.-L., Robert A., Robinet J., Rogalski M. (1997) L'algèbre linéaire : l'obstacle du formalisme à travers diverses recherches de 1987 à 1995. In Dorier J.-L. (Ed.) (pp. 105-147) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Douady R. (1987) Jeux de cadres et dialectique outil/objet, *Recherches en didactique des mathématiques* 7(2), 5-32.

Dubinsky E. (1991) Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In Tall D. (Ed.) *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-126). Dordrecht: Kluwer.

Grønbæk N., Misfeldt M., Winsløw C. (2009) Assessment and contract-like relationships in undergraduate mathematics education. In Skovsmose O. et al. (Eds.) (pp. 85.-108) *University science and Mathematics Education. Challenges and possibilities*. New York : Springer Science.

Hejny M., Shiu C., Godino J. D., Maier H. (1999) Research paradigms and methodologies and their applications in mathematical education. In Schwank I. (Ed.) (pp. 211-219) *Proceedings of 1st Conference of European Research in Mathematics Education (CERME)* Osnabrück, Germany.

Praslon F. (2000) *Continuités et ruptures dans la transition Terminale S / DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement*. Thèse de doctorat. Paris : Université Paris 7.

Robert A., Robinet J. (1996) Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques* 16 (2), 145-177.

Sarrazy B. (1995) Le contrat didactique. *Revue Française de pédagogie* 112 (Note de synthèse), 85-118.

Winsløw C. (2008) Transformer la théorie en tâches : la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle. In Rouchier A., Bloch I. (Eds.) *Perspectives en didactique des mathématiques. Cours de la XIIIe école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.