

QUELLE RESSOURCE POUR ENSEIGNER LA NUMÉRATION DÉCIMALE ? PRÉSENTATION D'UNE INGÉNIERIE DIDACTIQUE DE DÉVELOPPEMENT EN COURS

Frédérick TEMPIER*

Résumé – Suite à un constat sur l'enseignement de la numération décimale à l'école primaire en France qui ne prend pas suffisamment en compte l'aspect décimal de la numération, nous avons mis en place une ingénierie didactique de développement. Nous décrivons nos principaux choix pour la conception d'une ressource pour les enseignants, puis nous présentons certains résultats relatifs à l'utilisation de cette ressource par les enseignants et les conséquences que nous en tirons pour le prochain cycle d'expérimentation.

Mots-clés : ingénierie didactique, développement, numération décimale, ressource, enseignant

Abstract – After presenting the fact, about the teaching of place value at school in France, that it is doesn't take enough account of base-10 system, we construct a didactical design. We describe the methodology used and our main choices for the conception of a resource for teachers, we present some results about the use of this resource by the teachers and the conclusions we draw for the next cycle of experimentation.

Keywords: didactical design, design research, place value, resource, teacher

I. LE POINT DE DEPART

1. *Les constats*

Dans des travaux précédents (Tempier 2009, 2010), nous avons fait un constat concernant les contraintes institutionnelles pesant sur l'enseignement de la numération en France. Notre système de numération est à la fois

- positionnel (le premier rang à partir de la droite correspond aux unités, le deuxième rang aux dizaines, etc.)
- et décimal (10 unités = 1 dizaine, 10 dizaines = 1 centaine, etc.).

Mais il apparaît principalement sous son aspect positionnel dans les manuels du niveau concerné (3^{ème} primaire, élèves de 8/9 ans) ainsi que dans les programmes et évaluations nationales. Les unités de la numération (unités, dizaines, centaines, milliers) apparaissent alors uniquement pour nommer les rangs dans l'écriture en chiffres des nombres mais les relations entre ces unités ne sont pas un enjeu pour l'enseignement.

Par exemple une tâche courante dans les manuels est de décomposer un nombre de manière « canonique ». Par exemple 5324 se décompose $5000 + 300 + 20 + 4$ ou encore $(5 \times 1000) + (3 \times 100) + (2 \times 10) + 4$. Cette tâche ne fait appel qu'à l'aspect positionnel de la numération (il faut savoir que le 5, en quatrième position dans l'écriture en chiffres fait référence à 5 milliers). Il en est de même pour les tâches d'association de l'écriture chiffrée d'un nombre à son écriture en lettres, des tâches de comparaison de nombres. Or notre précédente étude a montré que ces trois types de tâches étaient ceux qui étaient valorisés par l'institution : ce sont eux que l'on trouve majoritairement dans les programmes et évaluations nationales en France, ainsi que dans les manuels de 3^{ème} primaire.

* Doctorant Université Paris 7, LDAR – Formateur Université de Poitiers – France – frederick.tempier@univ-poitiers.fr

Or quand on demande de déterminer le nombre de centaines dans 2378 ou bien de donner le nombre correspondant à 35 centaines + 42 unités, cela va mettre en jeu non seulement l'aspect positionnel de la numération mais aussi les relations entre les unités de la numération (aspect décimal). Il faut en effet savoir que 1 millier c'est 10 centaines pour comprendre que 2 milliers et 3 centaines font 23 centaines ou réciproquement que 35 centaines font 3 milliers et 5 centaines. Or ces tâches n'apparaissent pas dans les programmes et évaluations actuelles et quand elles sont travaillées dans les manuels elles sont prises en charge par une technique de lecture directe dans un tableau de numération sans explicitation des relations entre les unités.

Nous avons également pu constater que les guides du maître associés à ces manuels offrent peu d'informations à ce sujet pour permettre aux enseignants de prendre conscience des savoirs en jeu dans les tâches proposées.

Pourtant la connaissance de l'aspect décimal de la numération est nécessaire dans les mathématiques de l'école primaire puisqu'elle est notamment en jeu dans la compréhension des techniques opératoires des quatre opérations. Cet apprentissage tient une place importante à l'école primaire dans les programmes officiels français.

2. *Les objectifs, les questions*

Notre travail de thèse consiste en la recherche de conditions pour améliorer cet état de fait à travers la conception d'une ressource destinée aux enseignants. Cette ressource se limitera à l'apprentissage de la numération en 3^{ème} primaire pour l'introduction des nombres à 4 chiffres.

A la suite de Ball et Cohen (1996) nous pensons qu'une ressource doit permettre à la fois l'apprentissage des élèves et la formation des enseignants sur la numération. Du point de vue du développement, nous visons donc la conception d'une ressource visant ces deux objectifs.

Plus précisément, du côté des élèves notre objectif est une compréhension de l'écriture chiffrée d'un nombre sous ses deux aspects (position et décimalité). En particulier nous voulons les amener à réussir certaines tâches mettant en jeu l'aspect décimal de la numération. Par exemple nous viserons la résolution de problèmes de recherche de « nombre de » dans des contextes variés (par exemple, nombre maximum de billets de 100 € que l'on peut utiliser pour payer une somme de 2378 €).

Du côté des enseignants, notre objectif est de leur permettre d'exercer une « vigilance didactique¹ » (Charles-Pezard 2010) à la fois lors du travail de préparation de l'enseignant (au niveau global de la séquence ainsi qu'au niveau local pour une séance) et de la mise en œuvre des séances dans la classe. Dans notre cas, elles doivent donc permettre à l'enseignant :

- D'intégrer de manière cohérente cette séquence dans sa programmation annuelle (projet global), en particulier faire émerger l'aspect décimal lors du travail sur d'autres notions mettant en jeu ce savoir, comme le calcul posé par exemple.
- D'élaborer une séquence permettant la construction de ces savoirs (projet local).
- De mettre en œuvre des situations, en classe, avec une gestion adaptée (dévoluer la situation, réguler l'activité des élèves et institutionnaliser les savoirs visés).

¹ Cela met en jeu « des connaissances mathématiques et didactiques nécessaires pour enseigner. Les connaissances mathématiques ne sont pas seulement académiques, elles doivent être finalisées pour l'enseignement. Les connaissances didactiques contribuent à une bonne perception des enjeux d'apprentissage des situations et de leur organisation en vue de l'enseignement de savoirs mathématiques. » (Charles-Pezard 2010, p. 210).

Cette recherche devrait aboutir à la publication d'une ressource ainsi qu'à la mise en évidence de principes de conception (Davis et Krajcik 2005) sur lesquels pourraient s'appuyer des concepteurs de ressources ou encore des chercheurs qui pourraient alors tester la fiabilité de ces principes dans d'autres contextes.

II. LES CADRES THEORIQUES ET LA METHODOLOGIE

Nous nous inscrivons dans le cadre de l'ingénierie de développement dont les caractéristiques sont définies par Perrin-Glorian (2011). Ce type de recherche demande de

prévoir au moins deux niveaux d'ingénierie (peut-être plus) avec des objectifs différents :

- premier niveau dans des conditions expérimentales spécifiques « protégées » pour tester la validité théorique des situations (i.e. leur capacité à produire les connaissances attendues, on vise moins un théorème d'existence) et dégager les choix fondamentaux de l'ingénierie : qu'est-ce qui est essentiel, incontournable en référence au savoir visé, qu'est-ce qui relève du contexte choisi et pourrait être changé, adapté, ce qui relève du détail en somme ?
- deuxième niveau pour étudier l'adaptabilité des situations à l'enseignement ordinaire, la négociation de la première ingénierie ; l'écart à la mise en œuvre et les transformations opérées sont prises comme objet d'étude pour des retombées sur l'ingénierie didactique elle-même, la connaissance du fonctionnement des savoirs concernés dans le système scolaire (enseignant, élèves...). Sur quoi peut-on lâcher du lest dans la négociation ? Que va-t-on essayer de sauvegarder ? Pourquoi ? Comment exercer un contrôle sur ce qui peut se passer ? (Op. cité, p. 68)

Nous nous appuyons sur différents cadres théoriques issus de la didactique des mathématiques auxquels nous empruntons des « outils de conception » (Ruthven, Laborde, Leach et Tiberghien 2009) : la théorie des situations didactiques (Brousseau 1998) pour la notion de milieu, de potentiel didactique, de variable didactique et la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1999) pour la notion d'organisation mathématique (ou praxéologie) et d'ostensif. Ces outils permettent la conception de l'ingénierie de premier niveau.

Notre méthodologie consiste à faire des choix *a priori* de conception pour la ressource (aux deux niveaux d'ingénierie) et à tester leur validité lors de l'utilisation de la ressource par des enseignants (d'au moins cinq années d'expérience). Pour cela nous avons constitué deux groupes d'enseignants qui vont utiliser la ressource :

- un groupe « de travail » (quatre enseignants) pour lequel nous observons les enseignants lors de la mise en œuvre de quelques séances dans leur classe, sans intervenir. Ce groupe participe aussi à la conception de la ressource lors de deux réunions de travail collaboratif avec le chercheur ;
- un groupe « libre » (trois enseignants) pour lequel nous n'intervenons pas du tout au cours de leur utilisation de la ressource.

Pour les enseignants de ces deux groupes nous réalisons des entretiens individuels avant et après la séquence et nous faisons passer deux évaluations aux élèves (avant et après la séquence aussi).

Les choix de conception (1^{er} et 2^{ème} niveau) seront mis à l'étude lors de cette expérimentation. Pour évaluer l'utilisation générale de la ressource par les enseignants nous utilisons les concepts d'utilité, utilisabilité et acceptabilité (Tricot et al. 2003, Georget 2010).

Ces analyses permettront finalement de questionner nos choix de conception (1^{er} et 2^{ème} niveau) et ainsi d'engager un nouveau cycle de conception (et éventuellement de revenir sur la question de départ pour l'affiner, la modifier ...).

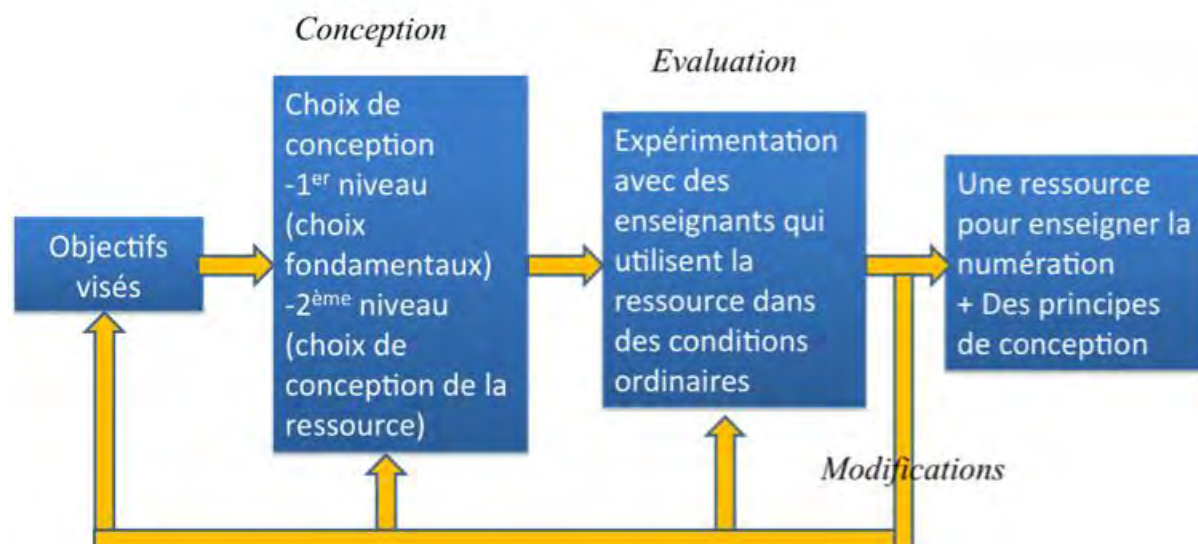


Figure 1 – Schéma général de la méthodologie

Ce que nous présentons dans cet article concerne un seul cycle d'expérimentation : nous allons présenter la ressource telle qu'elle a été proposée aux enseignants cette année et l'utilisation que ceux-ci en ont faite.

III. PRESENTATION DE LA RESSOURCE ET DES PRINCIPAUX CHOIX DE CONCEPTION

1. Nos choix d'ingénierie de premier niveau

Pour l'ingénierie de premier niveau nous nous sommes appuyés sur une analyse épistémologique de la numération ainsi que sur une étude de différents choix possibles pour l'enseignement de la numération en appui sur Chambris² (2008).

Nous avons choisi d'utiliser la situation de dénombrement de collections dans le sens d'une situation fondamentale (Brousseau 1998), c'est-à-dire une « situation capable d'engendrer par le jeu des variables didactiques qui la déterminent, l'ensemble des situations correspondant à un savoir déterminé » et qui « offre des possibilités d'enseignement mais surtout une représentation du savoir par les problèmes où il intervient permettant de restituer le sens du savoir à enseigner ».

Ce choix permet donc à la fois de construire nos situations d'apprentissage à mettre en œuvre dans les classes (1^{er} niveau) mais aussi de permettre aux enseignants de s'approprier les enjeux (2^{ème} niveau) par une explicitation du lien entre jeu sur les variables de la situation de dénombrement et les savoirs en jeu.

Une des variables didactiques principales concerne le groupement de la collection : si la collection n'est pas groupée (et si la taille de la collection est suffisamment importante, comme par exemple 3246 unités) nous sommes amenés à faire des groupements successifs par 10 (aspect décimal) avant de pouvoir dénombrer (aspect position). Si la collection est totalement groupée (par exemple 3 milliers + 2 centaines + 7 dizaines + 3 unités), il ne reste plus qu'à associer chaque unité à sa position dans l'écriture chiffrée (aspect position). Si la collection est partiellement groupée (par exemple 2 milliers + 15 centaines + 1 dizaine + 5 unités) il faut finir les groupements avant de pouvoir dénombrer.

² Chambris a étudié l'évolution de l'enseignement de la numération au cours du XX^{ème} siècle en France.

Deux autres variables didactiques entrent en relation avec les types de groupements :

- L'absence de groupement à un ordre (par exemple 3 milliers + 7 dizaines + 2 unités). Cela permet de mettre en jeu le rôle du zéro.
- L'ordre de présentation des unités (par exemple 7 dizaines + 3 milliers + 2 unités). Cela permet de mettre en évidence, pour l'aspect position, qu'il ne s'agit pas d'une simple juxtaposition des chiffres (ce qui est une erreur courante chez les élèves) mais bien une association des milliers au quatrième rang, etc.

Une variante de la situation de dénombrement est la situation inverse : réaliser une collection de cardinal donné, que nous traitons dans des problèmes dits de « commandes ». Une variable didactique essentielle ici est le stock du marchand. Par exemple s'il faut commander 4237 objets et que le vendeur n'a que des objets à l'unité ou groupés par dizaines et centaines, nous sommes amenés à utiliser l'équivalence entre 10 centaines et 1 millier (aspect décimal).

2. Nos choix d'ingénierie de deuxième niveau

Pour permettre aux enseignants de s'appropriier ces choix « fondamentaux » et pour atteindre nos objectifs de départ nous avons fait des choix pour la conception de la ressource.

La ressource propose cinq situations « principales » aux enseignants (trois situations de dénombrement et deux situations de commandes). Ces situations utilisent un matériel spécifique (sauf la dernière) : des « bâchettes » (allumettes sans tête qui présentent l'intérêt de travailler avec des grandes collections). Nous proposons également des situations « complémentaires » permettant de travailler d'autres tâches mettant en jeu la numération décimale ou de travailler les techniques apprises dans d'autres contextes (par exemple la monnaie, les timbres ...). En particulier les tâches liées à l'ordre des nombres (comparaison, rangement ou placement sur des droites graduées) n'apparaissent pas dans les situations principales car nous nous centrons sur les tâches permettant de travailler plus spécifiquement l'aspect décimal de la numération.

Un choix important à ce niveau concerne les marges de manœuvre données aux enseignants pour :

- La construction des séances et pour leur mise en œuvre dans la classe : dans la description des situations, nous ne donnons que ce qui nous semble essentiel à une mise en œuvre adaptée des situations. Il s'agit de l'enjeu pour l'enseignant, le problème pour les élèves, le matériel nécessaire et des indications de déroulement (cf annexe 1). Nous ne donnons pas de prescription concernant le temps ou l'organisation de la classe (travail individuel, de groupe ...).
- La construction de la séquence : l'enseignant a la seule contrainte de mettre en œuvre les cinq situations principales, mais il reste à sa charge de construire sa séquence par la conception des exercices d'entraînement, de situations complémentaires, de traces écrites, d'évaluations.

Nous ne nous sommes pas imposés *a priori* de support particulier pour cette ressource. Elle prend pour le moment, la forme d'un site web en trois parties³ : des éléments pour comprendre les enjeux de l'enseignement de la numération, des situations à mettre en œuvre dans la classe et des éléments pour aider l'enseignant à construire une séquence. Lors de la première année nous avons utilisé un support papier. Le choix d'un support numérique est lié aux facilités de diffusion que ce support propose (un objectif à moyen terme étant une

³ Ce site est consultable à l'adresse suivante : <http://numerationdecimale.free.fr>

diffusion plus large) ainsi qu'aux possibilités de proposer une quantité importante d'informations, liberté étant laissée aux enseignants d'y accéder ou pas, par une organisation en menus et lien hypertextes. En voici la page d'accueil (figure 1) avec les menus sur la gauche de l'écran :



Figure 2 – Page d'accueil du site

La première partie (« la numération décimale ») consiste en des apports mathématiques, épistémologiques et didactiques pour l'enseignant. Les deux aspects de la numération sont présentés. Cela permet de pointer tout de suite l'aspect décimal comme enjeu essentiel. Pour appuyer cela, nous indiquons certaines difficultés dans l'apprentissage de la numération qui mettent en jeu principalement ce savoir. Ensuite, nous faisons le constat que l'aspect décimal n'est pas un enjeu dans les activités courantes des manuels et nous présentons quelques considérations didactiques relatives à l'utilisation du matériel de numération, des unités de numération et du tableau de numération. Enfin nous montrons comment l'aspect décimal intervient dans le calcul posé (en revenant sur les quatre opérations) et le lien avec les conversions de mesures de grandeurs (longueurs en particulier).

La deuxième partie (« les situations ») contient les situations principales qui constituent un passage obligé. La description des cinq situations est faite selon le même modèle (on trouvera en annexe 1 un exemple de description d'une situation) :

- Une description rapide du problème posé aux élèves.
- Une description des savoirs en jeu pour l'enseignant : identifier le type de tâche, les techniques et les technologies en jeu.
- Une description de la situation : l'enjeu pour l'enseignant, le problème pour les élèves, le matériel nécessaire, une description rapide de la mise en œuvre : description du problème avec un ou plusieurs exemples de valeurs numériques associées, les variables,

des éléments pour la gestion de la phase collective de validation et indication de conclusion de la situation par une synthèse.

- Des éléments de synthèse pour permettre à l'enseignant de pointer les savoirs en jeu dans la situation (ici dans le contexte de la situation).
- Des compléments qui portent sur des précisions pour la mise en œuvre de la situation dans la classe, sur d'autres situations possibles en prolongement.

On pourra donc remarquer qu'une place très importante est accordée à la description des savoirs en jeu (plutôt qu'aux détails de déroulement). En effet nous suivons Margolinas, Mercier et René de Cotret (2007) dans leur hypothèse : « les professeurs ont plus de liberté de décision d'organisation du travail de leur classe, sont plus disponibles à l'observation de leurs élèves, sont plus ouverts à leurs idées, s'ils sont assurés des savoirs qu'ils cherchent à transmettre ».

Même si la ressource est proposée sur un site web, les situations proposées n'utilisent pas les TICE en classe car nous souhaitons que les enseignants puissent intégrer facilement ces situations à leur pratique de classe habituelle et il nous semble que les enseignants du primaire en France utilisent assez peu les TICE (ce qui est en partie lié à un manque de matériel informatique).

La troisième partie (« la séquence ») expose les contenus des programmes officiels sur la numération en lien avec les tâches travaillées dans les situations. Elle recense également les autres tâches qu'il est nécessaire de travailler dans le cadre d'une séquence sur la numération (avec des exemples mais pas sous forme de situation pour la classe). Enfin les liens avec le calcul posé et les conversions de mesure sont rappelés.

Nous allons maintenant présenter l'utilisation faite par les enseignants au cours de cette deuxième année d'expérimentation.

IV. UTILISATION DE LA RESSOURCE PAR LES ENSEIGNANTS : RETOUR SUR LES CHOIX EFFECTUES.

Dans le cadre de cet article nous allons présenter quelques résultats concernant l'utilisation que font les enseignants de la ressource. Nous avons choisi de nous appuyer uniquement sur les entretiens individuels que nous avons réalisés après la séquence. Nous ne parlerons donc pas des observations de classe.

Lors de ces entretiens nous avons demandé aux enseignants de faire un bilan de leur séquence et d'indiquer des modifications de la ressource qui seraient nécessaires pour une utilisation par des collègues l'an prochain. En associant ainsi les enseignants au travail de conception de la ressource nous obtenons des renseignements essentiels pour une meilleure adaptabilité et acceptabilité de la ressource et nous plaçons l'enseignant dans une posture dans laquelle il est plus apte à se livrer sur le travail qu'il a effectué (ce qui nous permet d'avoir des informations concernant l'utilité du site par rapport à nos objectifs de départ).

Pour les enseignants qui ne travaillaient pas déjà l'aspect décimal de la numération, l'utilisation du site a permis de changer leur façon de voir et de travailler la numération : ils ont pris conscience qu'ils ne travaillaient qu'un seul aspect de la numération. C'est donc l'argument épistémologique que nous avons mis principalement en avant qui est repris par les enseignants. Il reste bien sûr à confirmer cela par des observations de classe pour voir si l'aspect décimal est bien un enjeu dans les situations proposées et comment il intervient dans leur mise en œuvre). Mais certains travaillaient déjà cet aspect décimal. Pour ceux-là l'intérêt semble beaucoup plus limité (apport de situations nouvelles principalement).

L'autre intérêt qui ressort de ces entretiens concerne l'utilisation d'un matériel qui n'était pas habituellement utilisé pour des nombres si grands. Certains évoquent cela comme une aide pour les élèves en difficulté. Mais ce qui est plus surprenant est le fait que l'intérêt pour l'apprentissage des élèves n'est pas toujours mis en avant. Cela nous semble lié au fait que certaines difficultés persistent après la séquence (ce que les enseignants ont pu voir dans l'évaluation proposée en particulier).

Enfin dans tout le site, les mathématiques sont décrites avec la notion d'organisation mathématique (type de tâches, techniques et savoirs). Même si les enseignants ne s'approprient pas cette façon de parler des contenus lors des entretiens, cela leur a été utile et leur a permis de bien identifier les mathématiques en jeu, comme l'explique Sophie : « Ce qui est détaillé c'est au niveau des objectifs c'est précis on sait où on va ».

Tous les enseignants ont mis en œuvre les cinq situations (qui étaient présentées comme des passages obligés) mais pour la construction de leur séquence nous avons pu observer des différences entre les enseignants. La plupart des enseignants ont proposé des situations complémentaires après ces cinq situations, mais peu ont proposé des exercices d'entraînement entre les situations pour permettre une automatisation des techniques construites ou un réinvestissement dans un contexte différent de celui des bâchettes. Pour ceux qui en ont fait, les seuls exercices proposés étaient des exercices d'application directe dans le contexte des bâchettes. Le manque de temps de préparation est évoqué par certains enseignants comme une des raisons. Les enseignants (en particulier ceux qui ne travaillaient déjà pas l'aspect décimal pour les nombres à trois chiffres) nous font également part du fait que pour cette première année d'utilisation de la ressource ils ont plutôt cherché à faire ce qui était proposé en essayant de se laisser guider. Ainsi maintenant qu'ils ont essayé et vu comment cela se passait, ils se sentiront plus à même de proposer des adaptations pour l'année prochaine, comme l'explique Fabrice : « La première fois tu découvres. [...] Cette année j'ai suivi alors que maintenant je vais plus m'en détacher ». D'un point de vue méthodologique cela nous montre l'intérêt d'un suivi des enseignants sur plusieurs années, dans ce type de recherche, pour voir comment évolue l'utilisation de la ressource.

Du côté des élèves, dans l'évaluation finale, nous avons pu relever des difficultés liées à ce constat : ils ont eu du mal à utiliser leurs connaissances dans un problème de monnaie (contexte qui n'apparaît pas dans les situations principales).

Tout cela nous amène à nous questionner sur des modifications à apporter à notre ressource pour amener tous les enseignants à proposer des exercices d'entraînement et de réinvestissement dans différents contextes. Il semble nécessaire, pour des raisons d'acceptabilité, de proposer des exercices tout faits. Cependant pour permettre aux enseignants d'exercer une certaine responsabilité il est possible :

- De proposer un nombre assez important d'exercices afin qu'ils choisissent ceux qui leur semblent les plus appropriés.
- De les aider par des apports didactiques concernant la question de la décontextualisation.
- D'utiliser un support qui permette une utilisation souple par les enseignants (modifications faciles, copier/coller ...).

Enfin il est aussi possible que le fait de proposer un nombre important de situations principales ait pu faire penser aux enseignants que cela constituait une séquence complète. Surtout pour les enseignants qui ne travaillent pas habituellement cet aspect de la numération. De plus comme les cinq situations principales font référence à seulement deux types de problèmes (dénombrer une collection, passer une commande), il serait facile de recentrer sur

seulement deux situations tout en faisant apparaître différentes étapes à l'intérieur de ces situations. Cela aurait également l'avantage de donner plus de visibilité pour l'enseignant sur ces deux types problèmes et le jeu sur les variables associés pour faire avancer le savoir au fur et à mesure de la séquence. Nous avons en effet pu constater que les enseignants avaient du mal à se souvenir des situations proposées. Ce nouveau découpage en deux situations devrait aussi permettre d'identifier plus clairement ces deux problèmes fondamentaux.

Les entretiens ont également permis de mettre en évidence leur utilisation de la ressource lors de leur travail de préparation.

Pour la première partie de la ressource, les enseignants expliquent ne l'avoir regardée que très rapidement lors de leur première consultation du site car ils cherchaient plutôt tout de suite des informations relatives à la séquence à mettre en place dans la classe. C'est pourquoi ils sont allés rapidement vers la deuxième partie (« les situations »). Ils ont toutefois regardé la première page sur les deux aspects de la numération et ont souligné son intérêt. La partie sur les constats dans les manuels et les difficultés des élèves les divise davantage : c'est important pour certains mais pas nécessaire pour d'autres, en particulier ceux qui travaillaient déjà l'aspect décimal pour les nombres à trois chiffres. Enfin les parties sur « le matériel, les unités, le tableau » et les « liens avec d'autres notions » ne sont pas regardées. Cette première partie contient beaucoup d'informations et même s'ils font preuve de bonne volonté dans le cadre de cette expérimentation, les enseignants ne se penchent que sur les deux ou trois premières pages. Comme le résume une enseignante : « quand on a commencé tous on a lu les deux aspects de la numération puis le reste pas trop. Après on se jette tout de suite dans nos situations » (Fabrice). De manière générale, pour une meilleure utilisabilité de la ressource par les enseignants, il sera nécessaire de réduire la quantité d'informations. Cela va nous amener à nous interroger sur ce qui est essentiel dans l'ingénierie de premier niveau et qui doit être transmis aux enseignants.

La deuxième partie (« les situations ») est la seule qui est utilisée par la suite (ils ne reviennent plus sur la première partie) avec une centration sur la description de la situation (« la situation ») qui permet à l'enseignant de construire sa séance et sur les « éléments de synthèse » qui permettent à la fois d'identifier les savoirs en jeu (« C'est ce que je ne dois pas perdre de vue ... ça me permet de ne pas perdre le fil, ne pas perdre mon objectif de vue », Corinne) et de construire une trace écrite pour la classe (« La synthèse est très intéressante. Celle-ci m'a servie parce que ça m'a permis de faire mon affichage en classe », Fabrice). La description des « savoirs en jeu » avec un autre matériel de numération leur apparaît alors pour la plupart comme inutile puisqu'il y a certaines répétitions avec les éléments de synthèse. Un enseignant qui ne travaillait pas l'aspect décimal s'en est toutefois servi : « et même quand t'as enseigné un paquet d'années, que tu t'es plus replongé dans les bouquins pédagogiques, c'est intéressant ».

Enfin la troisième partie sur « la séquence » qui devait permettre à l'enseignant de construire une séquence plus complète sur la numération par la description des instructions officielles et de tâches à travailler, n'a pas été utilisée par les enseignants. Nous interprétons cela principalement par le fait que ces tâches ne sont pas associées à des situations à mettre en place dans la classe, ce qui limite fortement leur intérêt pour les enseignants. Le fait que cette partie soit séparée des situations a sans doute accentué ce phénomène. Les enseignants ont davantage utilisé les situations complémentaires (dans la partie « les situations ») car il s'agissait de situations utilisables directement avec les élèves.

V. CONCLUSION ET POURSUITE DU TRAVAIL

Cette ingénierie didactique de développement nous a amené à faire certains choix pour l'enseignement de la numération (1^{er} niveau d'ingénierie) et à concevoir une ressource pour les enseignants dans laquelle nous proposons des situations à mettre en œuvre dans les classes ainsi que des apports mathématiques, épistémologiques et didactiques (2^{ème} niveau). Nous avons montré ici quelques résultats concernant l'utilisation de la ressource par les enseignants : l'intérêt de son utilisation du point de vue des enseignants, les difficultés liées à la construction d'une séquence (pour la construction d'exercices à proposer entre les situations principales et pour la décontextualisation progressive des connaissances) et l'utilisation générale du site centrée sur les éléments qui permettent à l'enseignant de construire ses séances. Ce dernier constat montre qu'une réflexion sera également nécessaire pour mieux prendre en compte les usages des enseignants, condition *sin equa non* pour une meilleure appropriation de ces apports.

Lors de la conception *pour l'usage* nous avons été amenés à faire des choix d'organisation ou de contenu pour la ressource qui n'entrent pas toujours en accord avec les usages qu'en font les enseignants. Notre objectif était bien de produire un prototype et l'expérimentation de cette année permettra de le faire évoluer en tenant compte des instrumentalisation réalisées par les enseignants dans le cadre de genèses documentaires (Gueudet et Trouche 2010). Ainsi, comme le suggère Folcher (2005), dans une perspective de rencontre de la conception *pour l'usage* et *dans l'usage*,

la conception, au plan de son résultat, apparaît comme le produit des activités d'une communauté d'acteurs hétérogènes dans leurs compétences, leurs origines, leurs préoccupations mais aussi du fait des situations dans lesquelles ils agissent et mettent à l'épreuve l'artefact conçu. (Op. cité, pp. 208-209).

La division de la ressource en une partie concernant des apports pour l'enseignant et une partie pour la mise en œuvre de séances dans la classe a montré certaines limites liées aux usages des enseignants. Un autre choix possible pour cette ressource aurait été de supprimer la partie sur les situations et de proposer uniquement des éléments pour permettre à l'enseignant de s'approprier les enjeux de la numération à travers un document s'apparentant à un « traité » comme le font actuellement l'équipe Démathé (Margolinas et Wozniak 2010). Les enseignants n'utiliseraient alors pas cette ressource comme un guide pour l'enseignant, ce qui permettrait de centrer sur les apports mathématiques, didactiques et épistémologiques. Même si ce type de ressource présente un intérêt incontestable dans une perspective de formation des enseignants, nous pensons qu'il y a un risque important de non acceptabilité par les enseignants, justement du fait qu'il n'y a pas de situations de classe. De plus, cela pose des problèmes par rapport à notre question de départ puisque l'on trouve peu de situations sur les nombres à quatre chiffres, dans les ressources usuelles, qui permettent de mettre en jeu l'aspect décimal. C'est pourquoi dans notre travail nous devons continuer d'interroger les liens qu'il est possible de faire entre l'activité des enseignants orientée vers la préparation de séances et leur appropriation des enjeux de l'enseignement de la numération. En effet un risque important pour les enseignants dans l'utilisation de ressources de type manuel ou « guide pour l'enseignant » traditionnels est de se centrer uniquement sur la mise en œuvre de situations dans la classe et non sur les enjeux de savoirs.

REFERENCES

- Ball D., Cohen D. (1996) Reform by the Book: What Is - Or Might Be - The Role of Curriculum Materials in Teacher Learning and Instructional Reform? *Educational Researcher* 25(9), 6-14.
- Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : Éditions La Pensée Sauvage.
- Chambris C. (2008) *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels*. Thèse de doctorat. Université de Paris 7.
- Charles-Pezard M. (2010) Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique *Recherches en didactique des mathématiques* 30/2, 197-261.
- Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* 19/2, 221-266.
- Davis E. A., Krajcik J. S. (2005) Designing educative curriculum materials to promote teacher learning. *Educational Researcher* 24(3), 3-14.
- Folcher V. (2005). De la conception pour l'usage au développement de ressources pour l'activité. In Rabardel P., Pastré P. (Eds.) (pp. 189-210) *Modèles du sujet pour la conception, dialectiques activités développement*. Paris : Octarès.
- Georget J.-P. (2010) Apport de l'ergonomie des EIAH pour l'analyse et la conception de ressources. In Kuzniak A., Sokhna M (Eds) *Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation. Actes du colloque international de l'Espace Mathématiques Francophone*. Dakar, Sénégal.
- Gueudet G., Trouche L. (2010). Des ressources aux genèses documentaires. In Gueudet G., Trouche L. (Eds.) (pp. 57-74) *Ressources vives, le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes et INRP.
- Margolinas C., Mercier A., René de Cotret S. (2007) Les développements curriculaires dans l'enseignement obligatoire. In Trouche L., Durand-Guerrier V., Margolinas C., Mercier A. (Eds.) (pp. 25–36) *Quelles ressources pour l'enseignement des mathématiques ? Actes des journées mathématiques INRP 2006*. Lyon : INRP.
- Margolinas C., Wozniak F. (2010) Rôle de la documentation scolaire dans la situation du professeur : le cas de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. In Gueudet G., Trouche L. (Eds.) (pp. 233-249) *Ressources vives, le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes et INRP.
- Perrin-Glorian M.-J. (2011) L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. In Margolinas C. et al. (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Ruthven K., Leach J., Laborde C., Tiberghien A. (2009) Design Tools in Didactical Research: Instrumenting the Epistemological and Cognitive Aspects of the Design of Teaching Sequences. *Educational Researcher* 38(5), 329-342.
- Tempier F. (2009) L'enseignement de la numération décimale de position au CE2 : étude des relations entre contraintes et libertés institutionnelles et pratiques des enseignants. *Cahier Didirem* 60. IREM Paris 7.
- Tempier F. (2010). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2. *Grand N* 86, 59-90.
- Tricot A., Plégat-Soutjis F., Camps J.-F., Amiel A., Lutz G., Morcillo A. (2003) Utilité, utilisabilité, acceptabilité : interpréter les relations entre trois dimensions de l'évaluation des EIAH. *Environnements informatiques pour l'apprentissage humain*, 391-402. ATIEF INRP.
- Site Web « Enseigner la numération décimale » : <http://numerationdecimale.free.fr>

ANNEXE : EXEMPLE DE DESCRIPTION DE LA SITUATION « MARCHAND DE BÛCHETTES »

Marchand de bâchettes



Il s'agit ici de proposer la tâche inverse des situations précédentes : **on part de l'écriture du nombre en chiffres** et on doit passer une commande pour obtenir ce nombre de bâchettes. En amenant certaines contraintes (par exemple : pas de millier disponible), on amène ainsi les élèves à échanger 1 unité contre 10 unités de l'ordre inférieur.

Le problème :

Le marchand possède des bâchettes par :

centaines



dizaines



unités



Nous souhaitons avoir 2615 bâchettes en tout. **Que peut-on commander ?**

Passer une commande (décomposer un nombre)

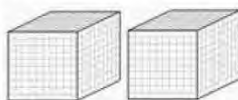


Nous avons choisi de traiter la décomposition de nombres à travers des problèmes de commande.

1^{er} problème : décomposition canonique

Collection de cubes du marchand

Un marchand possède des cubes groupés par milliers, centaines, dizaines et unités :



...



...



...



...

Milliers de cubes

Centaines de cubes

Dizaines de cubes

Cubes à l'unité

Question

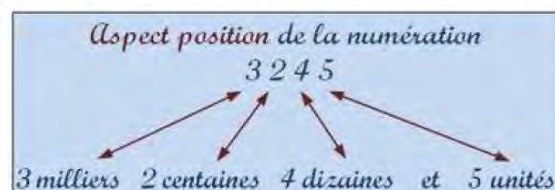
Nous souhaitons avoir 3245 cubes. Que faut-il commander ?

Procédure

Il faut utiliser la valeur des chiffres en fonction de leur position : 3245 c'est 3 milliers de cubes, 2 centaines de cubes, 4 dizaines de cubes et 5 cubes isolés.

Le savoir en jeu

Dans ce problème il suffit de connaître la valeur des chiffres en fonction de leur position : c'est l'aspect position.



2^{ème} problème : décomposition avec contrainte

Collection de cubes du marchand

Le marchand possède des cubes groupés par centaines, dizaines et unités. Il n'a pas de cubes groupés par milliers.

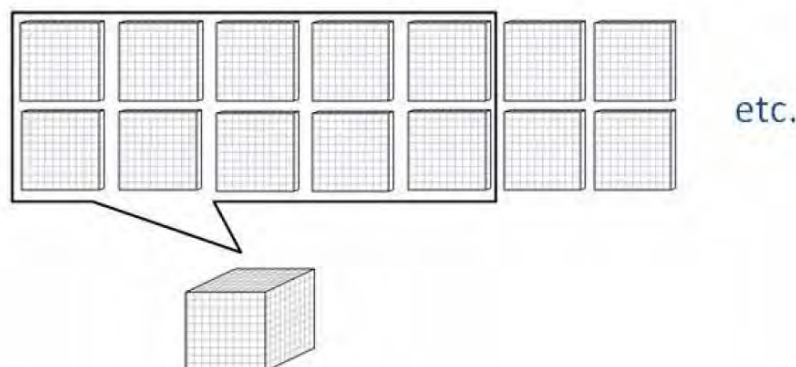


Question

Nous souhaitons avoir 3245 cubes. Que faut-il commander ?

Procédure

Comme dans le problème précédent, les élèves doivent utiliser la valeur des chiffres en fonction de leur position : 3245 c'est 3 milliers de cubes, 2 centaines de cubes, 4 dizaines de cubes et 5 cubes isolés. Mais cette fois les élèves sont amenés à **commander des centaines pour faire les milliers** (il faut 32 centaines pour faire 3 milliers et 2 centaines).



Le savoir en jeu

Comme pour le cas précédent l'aspect position est en jeu, mais cette fois les élèves sont aussi amenés à utiliser l'aspect décimal pour obtenir des milliers avec des centaines.

Aspect décimal de la numération
 10 unités d'un certain rang équivalent à une unité du rang supérieur.
 1 dizaine = 10 unités,
 1 centaine = 10 dizaines,
 donc 1 centaine = 100 unités
 1 millier = 10 centaines,
 donc 1 millier = 100 dizaines
 et 1 millier = 1000 unités

Remarque : Il faut donc s'appuyer sur le fait que dans 1 millier il y a 10 centaines. Dans les problèmes de dénombrement cette relation était utilisée dans l'autre sens : 10 centaines se groupent en 1 millier.

Marchand de bûchettes : la situation



Enjeux pour l'enseignant

Savoir-faire : décomposer un nombre (de différentes façons), convertir entre unités de numération.

Savoirs : les deux aspects de la numération (position et décimal) mais les relations entre unités se font ici dans le sens des échanges : dans 1 millier il y a 10 centaines, etc.

Problème pour les élèves

Passer une commande pour obtenir le nombre de bûchettes demandées.

Matériel

Le matériel de la situation "combien de bûchettes ?" : les bûchettes, paquets, sachets, boîtes.

Les bons de commandes.

Description de la situation

Le maître est un marchand de bâchettes : il a devant lui des bâchettes à l'unité, par dizaine, par centaine et par millier. Les élèves vont devoir passer une commande pour obtenir un nombre de bâchettes donné.

Appropriation : commandes sans contrainte

Pour que les élèves s'approprient la situation on commencera par des commandes sans contrainte.

Exemple :

Il nous faut 2615 bâchettes. Combien faut-il commander de milliers de bâchettes, de centaines de bâchettes, de dizaines de bâchettes et de bâchettes seules ?

... milliers de bâchettes
... centaines de bâchettes
... dizaines de bâchettes
... bâchettes

Le problème : commandes avec contraintes

Ensuite on proposera des commandes avec contraintes (sur le nombre de milliers ou centaines, etc.).

Exemples :

a. Il nous faut encore 2615 bâchettes mais l'enseignant n'a plus de milliers de bâchettes. Que faut-il commander ?

.0. millier de bâchettes
... centaines de bâchettes
... dizaines de bâchettes
... bâchettes

b. Maintenant, il n'y a plus qu'un seul millier de bâchettes. Les élèves doivent commander 3167 bâchettes. Que faut-il commander ?

.1. millier de bâchettes
... centaines de bâchettes
... dizaines de bâchettes
... bâchettes

Etc.

Variables

Sans contrainte : présence ou non de **zéro** dans le nombre de bâchettes à commander (par exemple 4020 bâchettes).

Avec contraintes : Nombre d'objets **disponibles** pour chaque unité (nombre de milliers de bâchettes, de centaines de bâchettes, etc.). Par exemple absence de millier de bâchettes, etc. Cela amène les élèves à utiliser les unités du rang inférieur (s'il n'y a pas de millier de disponible, il faut échanger les milliers contre des centaines). On peut aussi **limiter le nombre d'objets disponibles** pour chaque unité pour que les élèves ne commandent pas systématiquement que des bâchettes à l'unité ! (par exemple pour 2615 bâchettes, il faut 2615 bâchettes à l'unité : si on limite à 50 le nombre de bâchettes à l'unité, à la dizaine, ... cela devient impossible).

Mise en commun et validation

L'enseignant recueille les différentes commandes proposées par les élèves. Les élèves comparent leurs solutions et échangent sur leur validité.

Validation collective avec les unités de numération

Comme dans la situation précédente, avant de proposer une validation avec le matériel, il est important d'**amener les élèves à essayer de valider en s'appuyant sur les écritures utilisant les unités de la numération**.

Exemple : 26 centaines + 1 dizaine + 5 unités = 20 centaines + 6 centaines + 1 dizaine + 5 unités = 2 milliers + 6 centaines + 1 dizaine + 5 unités en s'appuyant sur la relation 10 centaines = 1 millier. Le matériel ne peut alors qu'être seulement **évoqué** : par exemple, "20 centaines c'est 2 milliers car si on a 20 sachets on peut les grouper dans 2 boîtes".

On peut aussi utiliser un **tableau de numération** pour écrire les commandes faites par les élèves et utiliser les relations entre unités quand il y a deux chiffres dans une même colonne.

Validation collective avec le matériel éventuellement

Pour se mettre d'accord, l'enseignant peut toutefois encore proposer d'utiliser le **matériel** (bâchettes, paquets, sachets, boîtes) pour **réaliser les commandes passées par les élèves** (on peut alors compter oralement ou effectuer les groupements pour voir si on retrouve le nombre de départ).

Synthèse

"Qu'avez-vous appris aujourd'hui ?"

L'enseignant recueille les différentes commandes proposées par les élèves. Les élèves comparent leurs solutions et échangent sur leur validité.

Validation collective avec les unités de numération

Comme dans la situation précédente, avant de proposer une validation avec le matériel, il est important d'amener les élèves à essayer de valider en s'appuyant sur les écritures utilisant les unités de la numération.

Exemple : 26 centaines + 1 dizaine + 5 unités = 20 centaines + 6 centaines + 1 dizaine + 5 unités = 2 milliers + 6 centaines + 1 dizaine + 5 unités en s'appuyant sur la relation 10 centaines = 1 millier. Le matériel ne peut alors qu'être seulement évoqué : par exemple, "20 centaines c'est 2 milliers car si on a 20 sachets on peut les grouper dans 2 boîtes".

On peut aussi utiliser un **tableau de numération** pour écrire les commandes faites par les élèves et utiliser les relations entre unités quand il y a deux chiffres dans une même colonne.

Validation collective avec le matériel éventuellement

Pour se mettre d'accord, l'enseignant peut toutefois encore proposer d'utiliser le **matériel** (bûchettes, paquets, sachets, boîtes) pour réaliser les commandes passées par les élèves (on peut alors compter oralement ou effectuer les groupements pour voir si on retrouve le nombre de départ).

Synthèse

"Qu'avez-vous appris aujourd'hui ?"

Marchand de bûchettes : des éléments de synthèse

Rappel : ces éléments de synthèse sont donnés à titre indicatif. L'objectif est d'aider l'enseignant à faire le lien entre la situation proposée en classe et les savoirs mathématiques en jeu. Cela ne constitue pas une "leçon clé en main". En effet, la synthèse peut se faire par écrit mais aussi oralement, elle peut se faire à "chaud" (à la fin de la séance) ou être repoussée à un autre moment, l'enseignant peut faire participer les élèves et s'appuyer sur leurs formulations, etc. Tous ces choix sont de la responsabilité de l'enseignant.

Pour commander des bûchettes ...

Pour faire une commande, il faut décomposer le nombre total de bûchettes en milliers, centaines, dizaines et unités.

Par exemple, pour commander 2621 bûchettes, on peut commander :

2 milliers + 6 centaines + 2 dizaines + 1 unité

Car :

Milliers	Centaines	Dizaines	Unité
2	6	2	1

Et si le marchand n'a plus de millier ou centaine ... ?

Voici différents exemples de commandes avec contraintes.

Contraintes	Procédures	Savoir en jeu
Il n'y a plus de millier	Pour obtenir les 2 milliers de 2621 il faut commander 20 centaines : 26 centaines + 1 dizaine + 5 unités	<i>Aspect décimal de la numération</i> 10 unités d'un certain rang équivalent à une unité du rang supérieur. 1 dizaine = 10 unités, 1 centaine = 10 dizaines, donc 1 centaine = 100 unités 1 millier = 10 centaines, donc 1 millier = 100 dizaines et 1 millier = 1000 unités
Il n'y a plus de centaine	Pour obtenir les 6 centaines de 2621 il faut commander 60 dizaines : 2 milliers + 61 dizaines + 5 unités	
Il n'y a plus de millier ni de dizaine	Pour obtenir les 2 milliers de 2621 il faut commander 20 centaines et pour les 2 dizaines il faut 20 unités : 26 centaines + 21 unités	

Marchand de bûchettes : compléments

Prolongement 1 : Conversions entre unités

Il est possible de s'appuyer sur la situation des commandes de bûchettes pour travailler les conversions entre unités de numération (par exemple 30 centaines = 3 milliers dans les deux exemples ci-dessous) :

a. Les élèves doivent commander 30 centaines de bûchettes. Il n'y a plus de bûchettes par centaines. Que faut-il commander ?

... milliers de bûchettes
.0. centaine de bûchettes
... dizaines de bûchettes
... bûchettes

b. Les élèves doivent commander 3 milliers de bâchettes. Il n'y a plus de bâchettes par millier. Que faut-il commander ?

.0. millier de bâchettes
... centaines de bâchettes
... dizaines de bâchettes
... bâchettes

Prolongement 2 : le jeu des décompositions

Il s'agit de demander aux élèves de trouver le plus de façons différentes de décomposer un nombre.

Pour les élèves, comme il y a plusieurs solutions, il s'agit réellement d'un problème-défi.

Exemple :

Chercher les décompositions différentes de 2647.

C'est ce qui est proposé dans cet exercice de manuel (Cap Maths CE2) :

L'exercice est présenté dans un cadre rectangulaire. En haut, il y a trois boîtes colorées : une rouge pour '1 unité' (80 cartes), une bleue pour '1 dizaine' (80 cartes) et une violette pour '1 centaine' (20 cartes). À gauche, deux numéros de questions sont encadrés : '1' et '2'. À droite, une illustration d'une jeune fille avec des cheveux noirs et une bandeau orange regarde une boîte violette.

1 a. Trouve comment obtenir 247 en choisissant le moins possible de cartes.
b. Trouve deux autres façons d'obtenir 247.

2 a. Trouve comment obtenir 350 en choisissant le moins possible de cartes.
b. Trouve deux autres façons d'obtenir 350.

Voir analyse de cet exercice dans l'étude des manuels.

Prolongement 3 : Combien de ... ?

Toujours dans le contexte des bâchettes, on peut montrer (ou simplement évoquer) une collection de bâchettes (non groupée) : le problème consiste à chercher combien de sachets nous allons avoir besoin pour organiser la collection.

Exemple :

Combien de sachets pour organiser une collection de 2647 bâchettes ?