

ROLE ET STATUT DES SAVOIRS DANS LA PRATIQUE MATHEMATIQUE : L'EXEMPLE D'UN BASCULEMENT EPISTEMOLOGIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

Isabelle BLOCH*

Résumé – Au début de l'enseignement supérieur, le curriculum prévoit l'étude d'objets déjà explorés auparavant, comme les fonctions et les limites. Cependant, derrière ce qui paraît de simples modifications techniques, le statut des objets et les outils de validation se trouvent profondément bouleversés. Nous analysons ce basculement épistémologique suivant deux dimensions : la première considère la modification de variables macro-didactiques déterminantes dans cette transition. Dans un deuxième temps, nous examinons le travail algébrique entrepris lors d'un exercice, travail qui montre le décalage entre le statut des objets pour le professeur et le statut perçu par les élèves.

Mots-clefs : enseignement de l'analyse, statut des concepts, outils du travail mathématique

Abstract – At the beginning of University, the maths curriculum studies functions and limits, objects that have been already seen by students. Although the new organization seems to introduce plain modifications of techniques, we provide evidence that the status of objects and methods of proof are deeply transformed. We present some explanations of how this epistemological shift occurs: first we show the deep revision of some macro-didactic variables in this transition. Then we examine the solution of an exercise in a class of scientific students, which illustrates the gap between the status of mathematical objects for the teacher and for the students.

Keywords: the teaching of calculus, status of the concepts, tools of mathematical work

I. INTRODUCTION

Dans un contexte de transition entre deux ordres d'enseignement (ici le secondaire et le supérieur), certaines tâches données aux élèves dans l'apprentissage d'une nouvelle théorie comme l'Analyse ne peuvent être réalisées par des techniques relevant de routines algébriques du niveau antérieur : il en résulte que les connaissances présidant à leur réalisation deviennent visibles à travers des procédures heuristiques non expertes. Ces observations nous aident à comprendre les connaissances en jeu, l'adéquation ou non de celles-ci au nouveau curriculum, et le travail du professeur aux prises avec l'enseignement du nouveau concept ou d'une forme nouvelle d'un concept déjà rencontré.

Cependant, les effets de ce décalage peuvent être plus importants, et certains concepts mathématiques subissent une transformation telle que leur statut et leur mode de fonctionnement s'en trouvent complètement bouleversés. Dans la transition secondaire/supérieur, ce basculement épistémologique est rendu inévitable par la configuration actuelle des contenus des programmes du secondaire : en effet, nous avons montré (Bloch 2003) que les objets qui y étaient étudiés l'étaient de façon descriptive et non relativement à leur nécessité et leur rôle d'outil dans la construction de situations mathématiques. Il en résulte que l'usage fait de ces objets – réputés pourtant déjà fréquentés – dans la suite du cursus ne peut être que profondément déstabilisant pour les étudiants : des travaux nombreux ont fait état de cette déstabilisation et des évolutions du curriculum (cf. Artigue 1998), et plusieurs ont proposé des ingénieries pour surmonter ce bouleversement dans les notions et les conceptions des étudiants lors de ce passage (cf. Dubinsky 1996 ; Castela 2000 ; Durand-Guerrier, 2003 ; Chellougui 2007 ; Schneider 2001a et 2001b ; Maurel et Sackur 2002 ; Praslon 2000...), avec TICE éventuellement (Vandebrouck et Cazes 2004).

* Université de Bordeaux – France, LACES E3D – isabelle.bloch@u-bordeaux4.fr

La bibliographie jointe, si elle ne peut être exhaustive, propose un panel de travaux sur cette question très débattue.

Pour notre part, nous nous appuyons sur le travail que I. Ghedamsi a conduit sur l'enseignement supérieur tunisien (Ghedamsi 2008) pour reprendre des variables macro-didactiques permettant de caractériser ces modifications. Nous donnons ensuite un exemple de cette rupture, et des modifications des valeurs des variables, dans une séance de mathématiques en classe préparatoire PTSI (France, niveau première année de l'enseignement supérieur, section Physique, Technologie et Sciences de l'Ingénieur).

II. LE CHANGEMENT DE STATUT DES OBJETS MATHÉMATIQUES : VARIABLES MACRO-DIDACTIQUES

1. *Définition de variables macro- didactiques*

Les variables que nous avons retenues concernent une organisation relativement globale de l'enseignement et non une situation locale d'enseignement d'un nouveau savoir. Pour les définir et déterminer leur variation, nous avons étudié :

- Pour l'enseignement secondaire, un corpus important de programmes, de manuels, de textes d'exercices, en France et en Tunisie ;
- Pour l'enseignement supérieur, essentiellement des textes de TD (travaux dirigés) de l'Université, en France et en Tunisie.

Les variables finalement retenues sont au nombre de onze ; les six premières variables (VD0 à VD5) concernent le statut des savoirs ; les variables VD6 à VD11 s'attachent à mesurer la façon dont les savoirs interviennent dans les pratiques mathématiques, telles que ces dernières sont configurées en fin de secondaire ou au début de l'enseignement universitaire. Nous avons d'ailleurs observé que les paramètres de la transition secondaire/ supérieur sont sensiblement les mêmes en France et en Tunisie.

La première variable VD0 définit le mode d'introduction des notions : dans l'enseignement secondaire, il s'agit souvent d'une introduction par des métaphores culturelles, alors que dans le supérieur, c'est par une définition formelle. Les autres variables quantifient les modalités sous lesquelles apparaissent les objets mathématiques, ainsi :

- VD1 : le degré de formalisation, et tout particulièrement dans les définitions des concepts ;
- VD2 : le registre de validation, soit l'algèbre, soit le raisonnement analytique ;
- VD3 : le degré de généralisation requis dans les énoncés : faible ou fort ;
- VD4 : le nombre de nouvelles notions introduites, comme les développements limités, etc ;
- VD5 : le type de tâches, soit heuristique, graphique, algorithmique.

Les variables suivantes visent à paramétrer la façon dont les notions sont travaillées en classe, du point de vue des techniques, de l'autonomie requise des élèves, et de leur degré de responsabilité dans le savoir :

- VD6 : le choix des techniques et leur routinisation ou non : usage d'une même technique ou amalgame de techniques dont la responsabilité revient à l'étudiant ;
- VD7 : le degré d'autonomie sollicité : faible ou élevé ;
- VD8 : le mode d'intervention de la notion, comme processus ou objet ou outil/objet ;
- VD9 : le type de conversions sollicitées entre registres de représentation ;

- VD10 : le statut des tâches demandées aux étudiants, soit simple exercice d'application, soit démonstration d'un énoncé auxiliaire mais général. Cette variable est représentative du *contrat didactique* de l'institution, dans la mesure où elle contribue à préciser la nature de la responsabilité mathématique dévolue aux étudiants.

Le choix de ces variables didactiques détermine le contrat didactique potentiel régissant le travail en classe ; en particulier, les valeurs que prennent ces variables nous permettent de dégager la nature du partage des responsabilités mathématiques entre professeur et étudiants. Les modifications constatées des valeurs des variables correspondent à des ruptures entre les deux ordres d'enseignement. Nous avons pu ainsi catégoriser les tâches proposées dans un certain nombre de domaines de l'étude, ce qui nous a permis de disposer d'information – qualitative ou quantitative – sur la continuité du travail des étudiants entre le secondaire et le supérieur, et sur la nature des ruptures : celles-ci sont-elles relativement anodines ou constituent-elles une transition globale difficile à gérer par les étudiants ?

Remarquons que cette classification constitue, en quelque sorte, une généralisation et une extension des variables relatives à la familiarisation avec le savoir introduites par A. Robert : connaissances techniques, mobilisables, disponibles (Robert 1998). Cependant nous nous focalisons davantage sur l'introduction de nouvelles notions au supérieur.

2. Les valeurs prises par les variables didactiques et leurs conséquences : évolution des valeurs des variables

Le tableau ci-dessous montre à l'évidence, au passage enseignement secondaire/enseignement universitaire, une modification importante des valeurs prises par les variables, ce qui ne peut que s'accompagner d'une profonde mutation dans le travail mathématique demandé. Nous commentons plus loin cette évolution, et donnons quelques exemples.

	<i>Enseignement secondaire</i>	<i>Début de l'Université</i>
Nature des objets		
0. Introduction d'un concept	Métaphore	Définition
1. Degré de formalisation	Faible	Elevé
2. Registre de validation	Algèbre	Analyse
3. Degré de généralisation	Aucun	Elevé
4. Introduction de notions nouvelles	Importante (mais <i>sans</i> outils théoriques spécifiques de validation)	Importante (<i>avec</i> des outils théoriques spécifiques de validation)
5. Type de tâches	Algorithme, tracé de graphiques, calcul	Recherche et démonstration
Travail en classe		
6. Choix des techniques	Transparent	Amalgame
7. Degré d'autonomie sollicité	Routines	Peu de routine
8. Mode d'intervention d'une notion	Processus	Objet
9. Conversions entre registres	Alg/Graphique	Alg/Analytique
10. Statut des énoncés d'exercices	Application, instanciation	Théorème, énoncé général

L'analyse du seul tableau permet de noter que le passage de l'enseignement secondaire à l'Université s'accompagne de modifications majeures : presque toutes les variables sont modifiées, avec un taux de changement considérable. Les valeurs prises ne montrent presque aucun recouvrement : les étudiants sont confrontés à une révolution globale, aussi bien du travail demandé que des moyens de ce travail.

3. *D'un travail algorithmique à des techniques complexes*

VD0 : L'introduction des notions au secondaire (par exemple la limite) est supposée s'appuyer sur l'intuition et des métaphores culturelles, alors qu'à l'Université la question de l'existence ou non d'une limite n'est plus philosophique mais entièrement déterminée par la cohérence de la théorie et la puissance du formalisme comme outil de preuve.

VD1 : A l'Université le registre formel est introduit d'emblée et les étudiants sont supposés avoir compris son utilité et se mouvoir aisément dans ce registre.

VD2 : A l'entrée à l'Université l'usage de la définition des notions de l'Analyse est général, et considéré comme un moyen de preuve habituel ; ceci contraste avec le travail usuel au secondaire, qui porte exclusivement sur des fonctions ou des suites particulières, données algébriquement, si bien qu'aucun travail n'est demandé sur des énoncés généraux. Dans l'enseignement secondaire, on ne procède qu'à des instanciations de théorèmes sur des fonctions simples ; et encore faut-il remarquer que les théorèmes ont été le plus souvent admis – conformément au programme.

VD2, VD3, VD5 : A l'Université les étudiants sont supposés tenir des raisonnements analytiques : ces raisonnements portent très souvent sur des résultats généraux, faisant intervenir la définition de la notion de limite en (ε, η) , ou des fonctions possédant telle ou telle propriété. Ces raisonnements comportent une dimension heuristique – recherche d'une solution non évidente – et l'usage de définitions formelles, ou de raisonnement par l'absurde, ou de recherche de contre-exemples ; ou encore, utiliser des développements limités ou des intégrales à constituer, en suivant les théorèmes connus, à partir de fonctions de base. Il n'en est pas de même dans l'enseignement secondaire où l'on constate que les applications demandées concernent très généralement une fonction bien précise, que le résultat ne fait pas de doute et que le moyen de sa démonstration est algorithmique, ou bien le recours à un résultat connu (et d'ailleurs qui n'a pas été forcément démontré).

VD4 : Il pourrait sembler que la variable VD4 ait subi peu de modifications entre l'enseignement secondaire et l'Université. L'introduction de l'Analyse s'accompagne, dans les deux cas, d'une augmentation significative des notions nouvelles étudiées. Cependant la nature de cette augmentation est différente dans les deux institutions :

- Dans l'enseignement secondaire, les notions sont présentées à l'aide de métaphores culturelles, et les notions sont donc introduites essentiellement par, a) un nouveau vocabulaire, b) des analogies ou des métaphores, ce qui est pointé comme devant reposer sur "l'intuition" par les programmes et les manuels. Ainsi une notion comme celle de limite est réduite à son nom, quelques occurrences (limites finies, infinies, en x_0 ou à l'infini, sur des fonctions polynômes et rationnelles simples, puis sans démonstration sur les fonctions sinus, cosinus, logarithme et exponentielle) et quelques exemples.
- Dans l'enseignement supérieur, les notions sont introduites avec tout l'arsenal formel de définition et de preuve. Le statut d'un concept introduit est de ce fait très différent : outil général, relié à d'autres notions, susceptible d'être remis en jeu pour accéder à un nouveau concept ou un autre niveau de validation.

VD6, VD7 : Les manuels du secondaire proposent des exercices et des problèmes usant la plupart du temps de la même (ou des deux ou trois mêmes) technique, techniques qui deviennent ainsi des routines pour l'élève. De plus un même exercice est en général consacré à *une* technique. A l'Université il en va tout autrement : les ensembles d'exercices analysés révèlent l'usage de nombreuses techniques, de plusieurs techniques dans un même problème. Les étudiants sont supposés pouvoir faire usage de ce que nous avons appelé un *amalgame de techniques*, cette expression signifiant qu'il/elle doit être capable d'articuler plusieurs aspects d'un concept, ceci dans un même exercice.

VD8 : à l'Université, par exemple la notion de limite est en soi un objet de la théorie « Analyse », étudié en tant que tel. On observe donc un travail sur la conception structurelle de la notion de limite, ses fonctionnalités dans des problèmes, ses relations avec d'autres objets de la théorie (développements limités, séries, intégrales...), et la validation dans le cadre du système de preuve de l'analyse : représentation par un voisin (Bloch 2000), condition suffisante, usage du formalisme en (ε, η) et des quantificateurs. Dans l'enseignement secondaire, cet aspect est explicitement absent et le travail demandé met essentiellement en jeu l'aspect "processus" de la notion de limite, c'est-à-dire le cheminement intuitif pour obtenir, par exemple, les asymptotes d'une courbe.

Les résultats de cette recherche viennent ainsi à l'appui de celle que nous avons menée sur la nature du travail mathématique demandé dans le secondaire (Bloch 2003) : ce travail ne permet presque jamais la mise en évidence de propriétés mathématiques, au sens où l'on pourrait interroger leur validité, trouver leur domaine d'efficacité, énoncer la propriété 'non p' et en déduire des relations entre propriétés 'voisines' (par exemple sur l'ordre et la continuité...), et insérer les différentes propriétés dans une théorie.

Remarquons que cette recherche rejoint le travail fait dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD) par Bosch, Fonseca et Gascon (2004). En effet ces auteurs pointent la faible possibilité ouverte, dans l'enseignement secondaire, de transformer des *organisations mathématiques ponctuelles* (OMP, comme l'étude des limites d'une fonction donnée algébriquement) en *organisations mathématiques locales* (OML) où les notions sont reliées entre elles par les règles de la théorie. Les travaux s'avèrent donc convergents dans la TSD et la TAD : l'organisation actuelle de l'enseignement mathématique au secondaire n'autorise qu'une « visite guidée » d'un certain nombre de propriétés vues comme contingentes et ne permet pas de mettre en évidence les liens entre propriétés, entre concepts et la cohérence de l'édifice théorique, même de façon embryonnaire.

VD7, VD9 : Au lycée, les étudiants n'ont presque aucune opportunité de décider de l'usage d'un diagramme ou d'un graphique pour aborder une situation de recherche (dimension heuristique), et ceci quelle que puisse être l'utilité d'un tel usage dans les problèmes analytiques. Ainsi Maschietto (2001) a pointé la fonctionnalité des représentations graphiques pour la résolution de problèmes d'analyse au début de l'Université. Elle relève les difficultés des étudiants à se saisir de diagrammes, schémas, graphiques, comme supports de recherche. Il faut noter que les étudiants doivent manifester une certaine autonomie s'ils veulent développer ce type de compétences et en poursuivre l'usage à leur entrée à l'Université : en effet si l'institution (en France) encourage le développement des compétences heuristiques graphiques, souvent elle ne prend pas en charge l'organisation de cette capacité en fournissant des outils spécifiques, et les professeurs manquent de moyens didactiques pour rendre les étudiants performants dans la dimension heuristique du graphique. Cependant les travaux de Vandebrouck et Cazes (2004) exposent des expériences prometteuses. Pour certains enseignants de l'Université néanmoins, les étudiants sont supposés fonctionner très rapidement dans le registre formel, et les étudiants sont invités, dès

leur premiers pas à l'Université, à saisir le sens des concepts dans ce registre et pratiquer tout à la fois la recherche et la formulation de solutions correctes dans ce cadre. Le travail de Bridoux (2005) est cependant un témoignage des interrogations de la communauté des enseignants universitaires¹.

VD9 : l'Université n'exploite pas non plus les possibilités ouvertes par les changements de registres de représentation, et on note même la disparition de tâches de conversion entre registre algébrique et registre graphique, qui étaient pourtant relativement courantes au secondaire, même si elles avaient tendance à n'être exploitées que dans un sens : de l'algébrique vers le graphique.

VD10 : enfin, l'analyse des énoncés de ce qui est considéré comme des exercices à faire par les étudiants, au secondaire et à l'Université, montre qu'au lycée les élèves n'ont à résoudre que des tâches ponctuelles portant sur des fonctions particulières, données par des formules algébriques, ce qui situe clairement le travail des élèves dans le domaine de l'application à des exemples. A Tunis, les exercices des séries de travaux dirigés de l'Université consistent fréquemment à démontrer des corollaires de théorèmes du cours, dans des cas de propriétés particulières éventuellement (suite majorée, alternée, à valeurs dans $\mathbf{Z}$...) mais non dans le cas d'une suite donnée par sa formule. Ceci porte clairement la responsabilité mathématique des étudiants vers l'établissement de résultats de cours, supposés réutilisables dans d'autres cas ; or ce type de responsabilité ne fait partie à aucun moment du contrat habituel de l'élève du secondaire. Voici quelques exemples pris dans les énoncés de TD de mathématiques de l'Université de Tunis :

Série 3, Exercice 3 : Soit $(u_n)_n$ une suite à termes dans $\mathbf{Z}$. Montrer que (u_n) converge si et seulement si elle est stationnaire.

Exercice 4 : Vérifier si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse :

- a) Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$;
- b) Toute suite non majorée admet une suite extraite qui tend vers $+\infty$;
- c) Toute suite convergente est bornée.

Série 4, exercice 1 : En raisonnant par l'absurde montrer que toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est uniformément continue sur cet intervalle.

Il faut noter que ceci ne se retrouve pas à l'identique dans l'analyse des TD de l'université française : ce qui peut y être demandé est de l'ordre de la reprise de démonstrations faites en cours par l'enseignant. L'objectif est de ne pas cantonner les étudiants à des tâches uniquement calculatoires ou d'application, et donc de leur faire rencontrer et utiliser des méthodes générales de résolution, mais dans une situation où le risque est nul. De fait, l'alternative parfois rencontrée est de ne jamais organiser de dévolution aux étudiants de ces méthodes générales, mais bien plutôt de ne leur laisser que des tâches algorithmiques, ce qui assure peu la conceptualisation.

Les modifications dans les valeurs prises par VD5 s'observent particulièrement bien sur des pourcentages : au lycée 52% des tâches sont algorithmiques, et 33% concernent des réalisations graphiques ; seules 14% des exercices figurant dans les manuels comportent une dimension heuristique, encore peut-on douter s'ils sont effectivement donnés à faire aux élèves. Au début de l'enseignement supérieur, nous avons identifié 37% de tâches algorithmiques, pas d'occurrence de tâches graphiques, et 63% de tâches de recherche, avec l'usage de nouvelles techniques ou technologies.

¹ Il n'incite pas à l'optimisme car il montre des étudiants de troisième année d'université usant du registre formel de façon quelque peu fantaisiste...

Notons qu'à ce niveau, différencier technique et technologie se fait en référant à la définition donnée dans la TAD : une technique est le moyen d'accomplir une tâche, tandis que la technologie correspondante est ce qui justifie la technique. Ainsi, utiliser le théorème des accroissements finis par exemple pour calculer une variation, $[f(b) - f(a)]/(b - a) = f'(c)$, est une technique, alors que la technologie correspondante consiste à justifier que les conditions du théorème sont remplies, et à connaître les raisons qui justifient ce théorème, son utilité globale, et (au moins) certaines occurrences de son application.

Relativement à VD6, nous avons remarqué que le travail demandé aux étudiants à l'Université comporte de nombreuses techniques ; du fait de leur nombre, ces techniques ont chacune une faible occurrence d'apparition, et cependant les étudiants doivent les maîtriser toutes. De plus, les étudiants sont responsables du choix de la technique ; de nombreux exercices demandent d'ailleurs d'enchaîner les techniques afin de parvenir au résultat. Cette situation est à l'opposé de ce qui prévaut dans le secondaire, où les techniques sont peu nombreuses, et chacune d'elles est soigneusement rodée dans un grand nombre d'exercices d'application sous la direction du professeur avant d'être laissée sous le seul contrôle mathématique de l'élève.

Cet état de fait contribue bien évidemment à une importante variation de VD7. De plus, les exemples abondent de la très grande variation qui est opérée d'un cycle à l'autre dans la responsabilité mathématique laissée aux étudiants : ainsi dans l'étude de suites récurrentes, la détermination de l'intervalle où la fonction décroît est systématiquement prise en charge par l'énoncé au secondaire, alors qu'elle est laissée à l'étudiant au supérieur.

A l'Université on observe de nombreux exercices portant sur l'aspect objet d'un concept, alors que le secondaire met l'accent exclusivement sur l'aspect outil, processus : étudier une fonction ou une suite spécifiée pour en déduire ses propriétés quant aux limites ou la dérivabilité. La transition processus/objet s'est aussi révélée un modèle efficace pour notre classification, car elle a permis de décrire et de catégoriser les tâches usuelles au secondaire/ à l'Université, en saisissant le 'saut conceptuel' auquel les étudiants sont contraints :

- s'emparer du formalisme unificateur via une définition en (ε, η) ou intégrales, etc. et généraliser ainsi l'usage d'une notion, en réalisant une économie de pensée et de moyens heuristiques dans un grand nombre de tâches ;
- s'engager ainsi dans la réification d'un concept comme celui de limite et mettre ce concept en relation avec d'autres (développement limité, dérivée, intégrales...) ;
- prendre la responsabilité d'énoncer des propriétés générales relatives aux concepts, c'est-à-dire des théorèmes de l'Analyse.

Dans le paragraphe suivant, nous exposons l'analyse d'une leçon sur la continuité, en classe de mathématiques supérieures PTSI. Cette étude met en évidence le fait que les résultats de l'analyse micro-didactique sont convergents avec ceux de l'analyse macro-didactique et montrent le changement de statut épistémologique des objets mathématiques manipulés.

III. ETUDE D'UNE SITUATION D'ENSEIGNEMENT SUR LA CONTINUITE : QUELQUES PHENOMENES MICRO DIDACTIQUES

1. *Le changement de statut des objets*

La leçon observée est une leçon sur les fonctions, le 19/03/2002, au lycée général et technologique Saint-Cricq à Pau (prise de notes par deux chercheuses). La leçon porte sur fonction réciproque, et continuité. Le but est ensuite de travailler sur les théorèmes de

dérivation des fonctions quotient et composée (ceci sera fait dans une séance deux jours plus tard). Il s'agit des premières leçons sur les fonctions, réciproques, continuité...

Le professeur corrige un exercice : il s'agissait de montrer que la fonction f , définie par : $f(x) = 2x - \frac{3x+9}{x-2}$ est une bijection de $]2, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$. Le professeur avait demandé la bijection réciproque. Les commentaires de l'observateur sont en italique.

1- Un élève : pour trouver f^{-1} on pose : $y = f(x)$ avec $x \in]2, +\infty[$ d'où $x = f^{-1}(y)$

2- P : personne ne l'a fait ? (*Mathilde, la seule fille de la classe, est la seule à l'avoir fait...*)

3- M (au tableau, écrit) : $y = 2x - \frac{3x+9}{x-2} \Leftrightarrow y(x-2) = 2x(x-2) - (3x+9)$

4- P : est-ce qu'il y a vraiment équivalence dans tout ce que tu écris... En fait c'est équivalent si $x > 2$, donc on va supposer que tu écris tout pour $x > 2$. (? ? ? *pourquoi pas pour $x \neq 2$?*)

5- M développe l'expression écrite au tableau.

6- P : en fait, on a une équation du second degré où x est l'inconnue, y est un paramètre. (*Les élèves n'ont jamais étudié d'équation avec paramètre dans l'enseignement secondaire.*)

7- M arrive à : $2x^2 - 4x - 3x - 9 = y(x-2)$ puis $2x^2 + x(-7-y) - 9 + 2y = 0$

(*Le calcul est alors fortement guidé par le professeur*)

8- P : on calcule $\Delta = (-7-y)^2 - 8(-9+2y) = y^2 + 14y + 49 + 72 - 16y = y^2 - 2y + 121$ qui a son discriminant négatif, et son signe ? *Les élèves semblent n'avoir aucune idée de la façon dont on pourrait le déterminer.*

9- P : je peux vous dessiner des paraboles qui n'ont pas de racines, (P dessine au tableau, deux paraboles, l'une positive à concavité vers $y > 0$, l'autre négative à concavité vers $y < 0$), donc pourquoi $\Delta > 0$?

10- Es : ???

Les élèves semblent découvrir avec difficulté ce basculement de Δ , de discriminant – outil pour chercher les racines d'une équation – à fonction représentée par une parabole, d'autant que le professeur n'a pas représenté la fonction qui à y associe $y^2 - 2y + 121$, mais deux paraboles 'génériques', supports du raisonnement. On observe ici un basculement de VD2 et VD3 : le raisonnement algébrique, calcul de x en fonction de y , ne suffit pas. On note aussi une utilisation du discriminant d'abord comme outil, puis comme objet à étudier pour revenir ensuite à l'équation qu'il détermine, ce qui constitue une modification de VD8 ; puis un recours à un graphique générique – usage non routinier au secondaire, d'où basculement de VD9 – pour penser la nature des fonctions du second degré, ce qui, de plus, sollicite une mise en relation équation – fonction – graphique là encore déstabilisatrice.

11- Mathilde écrit alors les solutions, $x_1 = \frac{1}{4}(7+y + \sqrt{y^2 - 2y + 121})$

$x_2 = \frac{1}{4}(7+y - \sqrt{y^2 - 2y + 121})$

12- P : laquelle de ces solutions convient ?

Les élèves semblent très indécis.

13- Le professeur demande alors si x_2 peut être négatif et un élève affirme que oui ; P fait alors préciser pour quelle valeur : pour $y = 0$.

14- P : donc la réciproque est donnée par la formule x_1 (*Ceci est une condition nécessaire, non suffisante. Pourquoi est-on sûr que x_1 est supérieur à 2 ??? En fait il faut, pour le prouver, comparer les racines à 2 : la comparaison de la deuxième racine a été faite par contre-exemple – x_2 peut être négative donc n'est pas toujours supérieure à 2 – mais quid de la première x_1 ?*)

15- E : et comment on sait que ça ne peut pas être tantôt l'un, tantôt l'autre ?

16- P : donne un argument de continuité (*Comment cet argument peut-il être reçu par les élèves ???*).

2. Variables didactiques, milieux disponibles et connaissances

Cet extrait met clairement en évidence la complexité du travail demandé par rapport au niveau d'expertise atteint au secondaire sur les mêmes concepts, ainsi que la faible conscience qu'a le professeur des sauts conceptuels qu'il impose aux élèves de façon totalement implicite. En effet, la résolution d'une équation est connue : mais là, on cherche ses solutions dans un intervalle donné, et avec une valeur y quelconque et non numérique (ce qui est inexprimé dans le discours du professeur). De ce fait, la variable VD5 bascule car le traitement algorithmique numérique usuel n'est plus possible. VD3 est aussi modifiée car le degré de généralisation n'est plus le même, comme le prouve le passage où le professeur fait résoudre l'équation du second degré avec paramètres. Il s'ensuit que VD6 se complexifie également : le choix des techniques s'élargit, puisqu'il faut, à chaque étape du raisonnement, adapter la technique au nouveau résultat à prouver. On peut remarquer que VD7, sur les objets présents, change aussi : ainsi une équation du second degré devient un objet en soi, à référer à des courbes possibles pour donner des résultats généraux sur le signe d'une expression du second degré. Par ailleurs les types de raisonnement utilisés s'adaptent tout au long de la séance : détermination du signe de Δ que l'on saisit alors, non plus comme le discriminant de l'équation mais comme une fonction de y (VD8) ; on trouve ensuite un raisonnement par contre-exemple : x_2 peut prendre des valeurs négatives et ne peut donc convenir comme la réciproque de f de $\mathbb{R}$ dans $]2, +\infty[$; puis un raisonnement par condition nécessaire où la condition suffisante, qui seule complète pourtant le raisonnement, n'est pas explicitée.

On voit dans cet extrait comment le statut des objets bascule entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur : ainsi une banale équation du second degré donne-t-elle, par l'adjonction d'un paramètre, un discriminant Δ qui est lui même une fonction de y ; et pour trouver le signe de Δ on calcule à son tour son discriminant, puis on considère Δ comme une fonction dont il faut déterminer le signe...avec aide (?) du graphique. Cette itération de procédés, banale en mathématiques dès que l'on atteint un certain niveau, n'est absolument pas familière aux élèves du secondaire. De même le fait de pouvoir considérer un objet mathématique depuis des points de vue variables, ce qui est l'une des bases du calcul algébrique, n'est pas introduit avant l'enseignement supérieur.

Quel milieu les enseignants peuvent-ils mobiliser pour assurer le réinvestissement des connaissances antérieures des élèves et les conduire à une étape plus complexe du travail mathématique ? Dans Bloch (2000) nous avons remarqué que des professeurs de classes comparables (Mathématiques Supérieures option PCSI²) avaient recours, pour introduire les élèves au nouveau mode de travail exigé, à des stratégies variées, comme le recours à des explications "métamathématiques", ou le renvoi à la classe de questions sur la nature des

² Physique, chimie et sciences de l'ingénieur.

objets trouvés, et leur signification dans l'avancée du problème. Ces stratégies ne réussissaient à mobiliser qu'un petit nombre d'élèves – les meilleurs.

Ce qui pose problème, c'est donc :

- de savoir quand appliquer un théorème, et quelles sont les opérations préliminaires à faire pour que le théorème s'applique (VD6, VD7) ;
- de pouvoir itérer un théorème, en changeant le statut des objets successifs considérés dans la résolution, de façon à ce qu'ils puissent devenir à leur tour objets des prémisses du théorème ; il s'agit d'une propriété remarquable des objets mathématiques, qui leur permet d'être remis en jeu dans de nouveaux énoncés, mais qui n'est pas maîtrisée par les étudiants au début du cursus universitaire, et fait intervenir VD8 et VD9 ;
- de contrôler la complexité de ces opérations, sans perdre de vue le but à atteindre ;
- de s'assurer de la validité des théorèmes et propriétés utilisés, dans les cas particuliers concernés ;
- et durant tout ce processus, de ne pas perdre la maîtrise des calculs (VD1, VD2, VD3).

Les travaux que nous avons menés sur des corpus de cours d'enseignants de classes préparatoires montrent à l'évidence les mêmes problèmes de contrôle du sens des opérations successives faites en mathématiques dans des résolutions d'exercices (Bloch 2000). Ils montrent aussi l'absence fréquente d'un milieu pertinent pour enseigner ce contrôle et la nouvelle complexité en jeu.

3. *Un problème de continuité*

L'analyse de la deuxième partie de la leçon confirme les malentendus entre le professeur et les élèves : le professeur demande l'étude de la fonction définie par :

$$\text{Si } x \neq 0, f(x) = \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|}, \text{ et } f(0) = 0$$

Sont demandés sa continuité, son sens de variations, et une fonction réciproque. Les élèves considèrent majoritairement que f est définie en zéro donc continue en zéro (contrat didactique de l'enseignement secondaire). De plus la formule donnant la fonction pose manifestement problème à certains élèves : si $x > 0$, les élèves pensent que $f(x)$ est égal à $\sqrt{x}$, mais si $x < 0$, ils l'écrivent $-\sqrt{x}$. Pour ces élèves, comme l'exprime l'un d'eux : " $|x|$ ça ne peut pas être $-x$ ". Le professeur rectifie en $-\sqrt{-x}$ mais manifestement certains des élèves utilisent encore le signe 'moins' arithmétique : 'moins' signifiant 'négatif' et non 'opposé'.

Les élèves pensent ensuite que f est continue en zéro car sûrement dérivable, si bien que le professeur est amené à prendre position sur le fait qu'une fonction de ce type n'est pas, ou du moins pas de façon certaine, dérivable. La variable didactique relative à cette propriété n'est pas choisie de façon optimale car certes la fonction n'est pas dérivable mais la courbe admet bien une tangente (l'axe des y).

Le professeur propose en tant qu'aide de regarder la question suivante : celle-ci demande de montrer que la fonction est monotone sur $\mathbb{R}$. Des élèves annoncent alors que f est décroissante sur $]-\infty, 0[$, car $x \mapsto -x$ est décroissante et racine carrée croissante ; à quoi le professeur répond que c'est ennuyeux, vue la formulation de la question, et le fait que f soit croissante sur $]0, +\infty[$! Le professeur aura beaucoup de mal à dévoluer la question de la continuité de f en zéro. Les élèves affirment ensuite que, si une fonction est continue sur une réunion d'intervalles, alors elle est continue sur l'intervalle entier... Dans le bref extrait qui est ici présenté, on peut faire l'hypothèse que le professeur chemine vers la résolution de son exercice par réfutations successives de propositions incorrectes basées sur les conceptions

antérieures des élèves, et contre lesquelles il peine à construire un milieu efficace, qui amorcerait une modification du statut des objets.

Les élèves montrent ici une conception « algébrique » de la continuité, conception liée à leur perception des fonctions comme ne présentant pas d'« accidents de parcours ». Il y a là un passage délicat de la pensée algébrique à la pensée analytique, avec une remise en jeu également problématique des connaissances sur les nombres (Bloch et al. 2008).

IV. CONCLUSION

Les variables identifiées nous ont donc permis de pointer l'ampleur du décalage entre les savoirs mathématiques du secondaire et ceux qui sont mis en œuvre au début du cursus universitaire, que ce soit en France ou en Tunisie (avec un peu plus de formalisme en Tunisie). Le statut d'une notion comme la continuité a manifestement basculé d'un point de vue algébrique (« Toutes les bonnes fonctions sont continues et 'recollables' ») à une nécessité de disposer d'outils pour travailler et penser analytiquement.

En observant la modification des valeurs des variables, nous notons que les difficultés persistantes des élèves relativement au statut des objets en jeu ne peuvent être résolues par des déclarations du professeur, et nécessiteraient la construction de situations questionnant réellement la nature des objets et des énoncés. Quel milieu serait adéquat pour l'enseignement de ce contrôle épistémologique ? On peut ainsi imaginer de construire des exercices où le double statut des objets – d'outils du problème à objets d'étude donnant lieu à démonstration puis reconfiguration dans le problème posé – serait posé clairement comme enjeu de la pensée mathématique. Les autres enjeux n'en disparaîtraient pas pour autant, comme l'accent mis sur les types de validation et la formalisation, et l'importance de travailler la différence entre pensée algébrique et pensée analytique.

REFERENCES

- Artigue M. (1998) L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18/2, 231-262. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Bloch I. (2000) *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / Université*. Bordeaux : Université Bordeaux I.
- Bloch I. (2003) Teaching functions in a graphic milieu: What forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *ESM* 52, 3-28.
- Bloch I., Chiocca C.-M., Job P., Schneider M. (2008) Du numérique aux limites : quelle forme prend la transition secondaire/supérieur dans le champ des nombres et de l'analyse ? *Perspectives en didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Bloch I., Schneider M. (2004) A various milieu for the concept of limit : from determination of magnitudes to a graphic milieu allowing proof. *ICME 10, Introduction to Topic Study Group 12 on Teaching Analysis*. Copenhagen (International Congress on Mathematics Education).
- Bloch I., Ghedamsi I. (2004) The teaching of calculus at the transition between Upper Secondary School and University. *ICME 10, Communication to Topic Study Group 12*. Copenhagen (International Congress on Mathematics Education).
- Bloch I., Ghedamsi I. (2005) Comment le cursus secondaire prépare-t-il les élèves aux études universitaires ? Le cas de l'enseignement de l'analyse en Tunisie. *Petit x* 69.

- Bosch M., Fonseca C., Gascon J. (2004) Incompletitud de las organizaciones matematicas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 24/2.3, 205-250. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Bridoux S. (2005) *Analyse d'un enseignement de topologie en première année d'université*. Mémoire de DEA. Université Paris 7.
- Castela C. (2000) Un objet de savoir spécifique en jeu dans la résolution de problèmes : le fonctionnement mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20/3, 331-380. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Chellougui F. (2007) Les paradoxes de la formalisation dans l'élaboration d'un concept clef dans la transition lycée/université. *Proceedings of EMF 2006*, University of Sherbrooke.
- Dubinsky E. (1996) Reflective Abstraction in Advanced Mathematical thinking. In Tall (Ed) (pp. 95-126) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht : Kluwer.
- Durand-Guerrier V. (2003) Which notion of implication is the right one? From logical considerations to didactical perspective. *Educational Studies in Mathematics* 53, 5-34.
- Ghedamsi I. (2008) *Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université*. Thèse de doctorat. Université Bordeaux 2.
- Gueudet G. (2008) Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics* 67, 237-254.
- Mamona-Downs J. (2001) Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *ESM*, 48, 259-288.
- Maschietto M. (2001) Fonctionnalité des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'analyse à l'Université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21/1.2, 123-156. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Maurel M (2001) Derrière la droite, l'hyperplan. *Repères IREM* 42, 83-114.
- Maurel M, Sackur C. (2002) La presque- ∞ - Une introduction aux fonctions de deux variables en DEUG. In Dorier J.-L. et al. (Eds) (pp. 167-175) *Actes de la XIème Ecole d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Maurel M., Sackur C., Drouhard J.-P. (2001) Le symbolisme de l'algèbre dans l'approche de l'analyse. In Drouhard J.-P., Maurel M. (Eds) *Actes du XVIème Séminaire Franco-italien de Didactique de l'Algèbre*. Nice : Université de Nice.
- Praslon F. (2000) Continuités et ruptures dans la transition entre Terminale S et DEUG Sciences en Analyse. L'exemple de la notion de dérivée et son environnement. Thèse de doctorat. Université Paris 7.
- Robert A. (1998) Outils d'analyse des contenus à enseigner au lycée et à l'Université. *RDM* 18-2, 139-189.
- Sackur C. (2000) Experiencing the necessity of the mathematical statements. *Proceedings of the 24th Conference of PME*, Hiroshima, Japan, IV 105-112.
- Sackur C., Assude T., Maurel M., Drouhard J.-P., Paquelier Y. (2005) L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 25/1, 57-90.
- Schneider M. (2001a) Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques: à propos d'un enseignement des limites au secondaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, 21/1.2, 7-56. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Schneider M. (2001b) Un exemple d'ingénierie didactique relative à l'analyse mathématique, passée au crible de concepts de la didactique. In Mercier A., Lemoyne G., Rouchier A. (Eds) (pp. 179-208) *Le génie didactique*. Bruxelles : De Boeck.
- Vandebrouck F, Cazes C. (2004) *Actes du colloque TICE* :
http://archive-edutice.ccsd.cnrs.fr/docs/00/02/75/92/PDF/Vandebrouck_Cazes.pdf