

LES DIFFÉRENTES PENSÉES MATHÉMATIQUES ET LEUR DÉVELOPPEMENT DANS LE CURRICULUM

Compte-rendu du Groupe de Travail n°3 – EMF2012

Pablo CARRANZA* – Stéphane CYR**
Viviane DURAND-GUERRIER*** – Maria POLO****

La problématique initiale du GT3 envisageait trois axes principaux : épistémologique, didactique et curriculaire.

L'axe épistémologique visait à dégager la nécessité, ou à défaut la pertinence, d'une distinction explicite entre différentes pensées mathématiques, en explorant cette question depuis plusieurs points de vue : mathématiciens professionnels ; utilisateurs professionnels de mathématiques ; philosophes et épistémologues ; historien des mathématiques ; psychologues ; anthropologues ; etc...

L'axe didactique concernait la pertinence de cette distinction pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques en examinant ce qu'il en est du point de vue de l'histoire de l'enseignement ; des enseignants d'une part, des élèves et des étudiants d'autre part, de tous ordres (primaire, secondaire, supérieur) et de tout type d'enseignement général, technique, professionnel ; des relations entre les mathématiques et la réalité, les mathématiques et les autres champs de la connaissance humaine, et plus généralement entre mathématiques et société, mathématiques et citoyenneté, etc.

Le troisième axe concernait la prise en compte ou non de cette distinction dans le curriculum dans les différents pays de l'espace mathématique francophone et au-delà, dans les programmes, les manuels, les ressources pour les enseignants et dans les pratiques effectives des enseignants, et les effets sur les apprentissages.

Notre groupe a accueilli une vingtaine de participants venant d'Algérie, d'Argentine, de France, d'Italie, du Québec, de Suisse et de Tunisie. Les textes reçus concernaient tous les ordres d'enseignement, et comportaient pour la plupart une dimension épistémologique et une dimension didactique renvoyant au formalisme, au structuralisme, à la logique, à l'algorithmique, à la statistique et à l'approximation, et à la pensée réflexive. Dans quelques textes, des éléments relevant du curriculum sont également abordés.

Ce qui suit est une invitation à la lecture des textes présentés dans le groupe, éclairée par les échanges lors des différentes sessions. Nous avons regroupé les textes sous quatre entrées thématiques qui visent à aider le lecteur à organiser son propre parcours. Nous proposons ensuite quelques pistes qui nous semblent se dégager pour les congrès EMF à venir. Nous terminons par quelques références pertinentes pour notre thème.

* Universidad de Río Negro – Argentine – pcarranza@unrn.edu.ar

** Université du Québec à Montréal – Canada – cyr.stephane@uqam.ca

*** Université Montpellier 2 – France – vdurand@math.univ-montp2.fr

**** Université de Cagliari – Italie – mpolo@unica.it

I. INVITATION A LA LECTURE

1. *Modes de pensées génériques en mathématiques (formalisme, structuralisme, axiomatiques, construction de définitions)*

Thomas HAUSBERGER a présenté une approche épistémologique pour aborder « le challenge de la pensée structuraliste dans l'apprentissage de l'algèbre abstraite ». Le travail présenté et discuté est une première ébauche d'analyse épistémologique de la pensée structuraliste en « algèbre moderne » dont l'apprentissage est reconnu comme étant particulièrement difficile. Une hypothèse didactique est que ces difficultés pourraient être liées à des formes nouvelles d'abstraction qui ne sont pas toutes de même niveau (définition par axiomes, approche combinatoire, isomorphisme, groupe quotient, groupe opérant sur un ensemble), ainsi qu'à la dimension FUGS de ces savoirs (Formalisateurs, Unificateurs, Généralisateurs et Simplificateurs), ce qui modifie profondément les pratiques mathématiques. L'étude épistémologique proposée met en évidence le fait que l'axiomatique ne suffit pas pour caractériser la pensée structuraliste, ce qui invite à reconsidérer la manière traditionnelle dont les structures abstraites sont enseignées consistant à présenter l'axiomatique des structures et à l'exemplifier. Des premières pistes sont ébauchées dans le texte de la communication.

Marc ROGALSKI quant à lui propose des « approches épistémologique et didactique de l'activité de formalisation en mathématiques ». En s'appuyant sur des exemples historiques et sur des exemples issues des « mathématiques de tous les jours », il nous invite à analyser les formes que prennent en mathématiques les processus de formalisation, et les raisons qui peuvent conduire à s'engager dans un tel processus pouvant déboucher sur des axiomatiques locales, en appui sur plusieurs exemples mettant en valeur le jeu entre simplifier et généraliser. L'auteur soutient la nécessité de développer des théories qu'on peut unifier et propose de faire faire un peu d'épistémologie aux étudiants, pour leur permettre de développer des problématiques et pas seulement des problèmes. L'auteur invite à prendre en compte dans l'enseignement le processus de formalisation qui permet de faire apparaître des formes sur lesquelles on va pouvoir opérer (syntaxe) afin d'obtenir des pistes de résolution et des développements d'autres problèmes connexes ou plus généraux. Ceci permet également de développer chez les étudiants une culture d'unification et de simplification. Ceci conduit l'auteur à proposer de se pencher sur les pratiques expertes des mathématiciens pour en étudier de possibles transpositions, ce qui invite à une épistémologie contemporaine.

Slim MRABET présente une étude sur « les axiomatiques autour du théorème de Thalès dans les programmes et manuels tunisiens ». Il s'intéresse principalement ici au changement de point de vue dans la résolution de problèmes de géométrie qui se produit lors de la transition collège-lycée, avec l'introduction de l'outil vectoriel. Pour éclairer cette question, il propose un retour à l'histoire de la géométrie et de son enseignement, ce qui lui permet de dégager des axiomatiques différentes et les modèles d'organisation des connaissances associés. L'auteur identifie deux axiomatiques : l'axiomatique euclidienne que l'on rencontre sous deux points de vue —le point de vue classique qui correspond à un point de vue statique sur les figures et le point de vue des transformations— et l'axiomatique de l'algèbre linéaire dans laquelle la figure a perdu sa place centrale. Les résultats de cette étude épistémologique servent de référence pour analyser l'enseignement actuel du théorème de Thalès en Tunisie. L'auteur montre que les transitions de la 9^{ème} année de base (dernière année du collège, secondaire 1) à la 1^{ère} année secondaire (première année du lycée, secondaire 2), puis de la 1^{ère} année à la 2^{ème} année secondaire sont accompagnées de changement d'axiomatiques.

Cécile OUVRIER-BUFFET se demande si « l'activité de définition met en jeu un mode de pensée spécifique ». Rappelant que l'activité de définition commence à être considérée en tant que telle dans les travaux internationaux, elle souligne que ce type d'activité permet d'accéder aux concepts et plus précisément de « penser » les concepts mathématiques. Dans sa communication, l'auteure s'attache à définir « l'activité de définition », qui renvoie à tout processus impliquant la construction de définitions, de l'amorce de la résolution d'un problème à la construction formelle de théories, et conduit une étude épistémologique critique de celle-ci, plaçant les définitions au centre d'une activité mathématique de construction de connaissances et de preuve. Elle s'appuie pour cela sur les travaux existants sur le sujet et se penche plus particulièrement sur les types de situations impliquant une activité de définition. De nouvelles questions de recherche se posent telles que : peut-on caractériser un mode de pensée transversal aux mathématiques concernant l'activité de définition ? Si oui, est-il implémentable de manière pertinente dans l'enseignement, et avec quels objectifs ? Quelle contribution de ce type de recherche à l'élaboration de situations pour travailler la preuve ?

2. *Pensée logique, syntaxe, sémantique*

Zoé MESNIL s'intéresse à la place de la logique dans l'enseignement des mathématiques en France. Pour l'auteure, la logique ne doit pas être seulement associée au raisonnement ; elle est également liée à l'apprentissage du langage mathématique. On peut dès lors s'interroger sur le rôle que la logique peut avoir dans l'enseignement des mathématiques au lycée. L'étude présentée ici a pour but de proposer des éléments de réponse à cette question à travers l'analyse écologique des programmes et des manuels de différentes époques en France. Un regard sur l'histoire de la logique permet à l'auteure d'élaborer une référence par rapport à laquelle elle essaie de comprendre les processus de la transposition didactique. L'analyse comparative des programmes lui permet d'identifier deux niches principales pour la logique mathématique au lycée : une niche langage (travail sur les énoncés mathématiques et leurs formulations), et une niche raisonnement (travail sur les démonstrations et leur validité), qui sont de fait totalement imbriquées. Les analyses présentées dans cette communication montrent la complexité d'un enseignement de ce qui relève de la logique, et ouvrent sur la question qui reste largement ouverte de son apport au développement de leur pensée logique et de sa mise en action dans leur activité mathématique ?

Viviane DURAND-GUERRIER défend l'importance de la prise en compte dans une perspective sémantique des relations entre « vérité mathématique et validité logique » dans l'activité mathématique, relations qui sont peu, voire pas travaillées dans le secondaire, mais sont supposées être acquises dans le supérieur. Dans un premier volet, l'auteur rappelle brièvement ce qu'est le point de vue sémantique en logique : son essor à partir de Frege ; les apports de Wittgenstein et Tarski sur l'articulation entre validité logique et vérité dans une interprétation ; la déduction naturelle de Copi, qui offre un système de règles permettant de rester au plus près des modes de raisonnement en mathématiques. Le second volet est consacré à l'analyse logique et mathématique de quatre preuves du point de vue de l'articulation entre vérité et validité, afin de mettre en lumière la pertinence des analyses logiques pour les études didactiques. La logique apparaît ainsi comme un moyen de rendre explicite ce qui est habituellement implicite dans le travail du mathématicien, et par là même permet de comprendre, plutôt que de fonder les mathématiques.

Rahim KOUKI et Imène GHEDAMSI posent la question de la « limite des méthodes syntaxiques en algèbre du secondaire ». L'apprentissage de techniques opératoires est un objectif fondamental de l'enseignement des notions d'équations, inéquations et fonctions algébriques au secondaire. Du côté des élèves, une prépondérance est accordée à une application automatique des techniques. Dans leur communication les auteurs présentent une

investigation didactique prenant appui sur un croisement de la sémantique logique avec les praxéologies mathématiques et les registres de représentations sémiotiques. Cette étude vise à montrer qu'en l'absence de la mobilisation de techniques sémantiques articulant différents modes d'interprétations inter-registre et intra-registres, les techniques syntaxiques de résolution s'avèrent dans certains cas inopérantes et peuvent mettre les apprenants en échec. Les auteurs font l'hypothèse que ces difficultés loin de reculer vont s'amplifier au niveau de l'université, où le travail algébrique sur les fonctions, les développements limités, les équations différentielles se complexifient. Ils considèrent par ailleurs qu'à ce niveau d'enseignement, la pensée sémantique et la rationalité mathématique occupent une place importante pour réussir le traitement des objets mathématiques.

3. *Articulations entre différents modes de pensées (algébrique versus analytique, informatique versus mathématique, statistique versus probabiliste, exactitude versus approximation)*

Isabelle BLOCH s'intéresse au « rôle et statut des savoirs dans la pratique mathématique ». Au début de l'enseignement supérieur, le curriculum prévoit l'étude d'objets déjà explorés auparavant, comme les fonctions et les limites. Cependant, derrière ce qui paraît de simples modifications techniques, le statut des objets et les outils de validation se trouve profondément bouleversé. L'auteure analyse ce basculement épistémologique en considérant dans un premier temps, la modification de variables macro-didactiques déterminantes dans la transition. Les variables identifiées permettent de pointer l'ampleur du décalage entre les savoirs mathématiques du secondaire et ceux qui sont mis en œuvre au début du cursus universitaire et en examinant le travail algébrique entrepris lors d'un exercice. Ce travail montre le décalage entre le statut des objets pour le professeur et le statut perçu par les élèves. Les élèves montrent une conception « algébrique » de la continuité, conception liée à leur perception des fonctions comme ne présentant pas d'« accidents de parcours ». Le statut d'une notion comme la continuité a manifestement basculé d'un point de vue algébrique (« Toutes les bonnes fonctions sont continues et 'recollables' ») à une nécessité de disposer d'outils pour travailler et penser analytiquement.

Simon MODESTE aborde la question de « la pensée algorithmique » et des « apports d'un point de vue extérieur aux mathématiques », en l'occurrence l'informatique. Dans sa communication, l'auteur propose d'aborder l'algorithmique sous deux points de vue. Le premier consiste à regarder la pensée algorithmique comme une pensée des mathématiques (parmi d'autres pensées), l'algorithme étant depuis des siècles, outil et objet des mathématiques. Le second consiste à la voir comme la pensée de la science algorithmique (ou informatique), car de fait l'algorithme y est l'objet central. La pensée algorithmique est ici conçue comme activité de l'esprit humain et non comme son produit ; la pensée algorithmique avancée renvoie à l'activité des chercheurs. En accord avec Rasmussen, l'auteur soutient que l'activité algorithmique ne se résume pas à l'apprentissage et la mise en œuvre d'algorithmes mais englobe aussi leur production, leur compréhension et leur étude, en particulier les questions liées à la complexité, et qu'il est possible d'aborder l'algorithme et l'algorithmique dans l'enseignement secondaire en tant qu'objet et pas uniquement en tant qu'outil, ce qui met en jeu des interactions entre pensée algorithmique et pensée mathématique.

Pablo CARRANZA soutient dans son texte que l'on peut introduire une « sensibilisation à l'abduction en statistique » dans la classe de mathématiques. Il propose pour cela de mettre en relation l'abduction et le théorème de Bayes d'un point de vue statistique, et s'intéresse plus précisément aux questions liées à l'enseignement et l'apprentissage de ce théorème en tant qu'outil modélisant le raisonnement par abduction, en centrant le travail dans un premier temps sur les aspects sémantiques de l'expression de Bayes. Ceci conduit l'auteur à prendre

en compte la dualité entre probabilité et statistique dont il dit qu'elle peut également être introduite en classe. L'auteur précise que l'approche retenue est celle pour laquelle la valeur d'une probabilité représente une mesure de la certitude partielle portée par un individu sur une proposition donnée et souligne que cette introduction du théorème de Bayes est directement en lien avec le développement de la pensée stochastique, et ouvre des pistes pour son enseignement. Les résultats expérimentaux montrent qu'un tel travail en classe est possible, mais qu'il soulève de nombreuses questions : sur la validation, sur le changement de contrat didactique et sur d'autres conflits provenant du changement de paradigme épistémologique lors du traitement en classe de notions statistiques.

Carlo MARCHINI quant à lui pointe dans son texte « les résistances des enseignants face à l'approximation », cette dernière notion ayant été introduite comme sujet d'étude dans les programmes italiens en 2007. L'article rend compte d'une enquête conduite auprès d'enseignants pour voir si le thème de l'approximation trouve effectivement une place dans l'enseignement ; en effet, l'analyse des caractéristiques de cette introduction dans les programmes laisse penser que la culture des professeurs pourrait rendre difficile sa mise en œuvre. Les résultats montrent une certaine résistance chez les professeurs de collège et de lycée, qui pourrait être liée à un manque de connaissance, ainsi qu'à la nécessité de passer d'un point de vue ponctuel à un point de vue local au sens de Vandebrouck. L'auteur souligne que des évolutions semblent se produire dans les dernières années du secondaire où certains sujets nécessitent intrinsèquement d'adopter un point de vue local, mais devrait et pourrait être travaillé graduellement et ceci dès l'école primaire, les recherches conduites montrant qu'il y a des intuitions chez les élèves de l'école primaire qui doivent être valorisées et exploitées ensuite au niveau de toute la scolarité.

4. *Pensée réflexive*

Anne ROY étudie le « développement d'une pensée réflexive chez des futurs enseignants du primaire en mathématique ». L'approche retenue par l'auteur est une adaptation à la formation des maîtres de la Philosophie pour enfants en mathématiques développée au Québec dans les années quatre-vingt-dix, et s'appuie sur le modèle épistémologique des idéologies de l'éducation mathématique de Paul Ernest, ainsi que sur une adaptation des modes de pensée complexe développée par Matthew Lipman : le mode critique qui facilite la recherche de validité ; le mode créatif qui contribue à la recherche du sens ; le mode responsable qui s'attarde à la recherche éthique et le mode métacognitif qui s'attarde à la prise de conscience des actes mentaux. L'étude porte sur la mobilisation d'une pensée réflexive chez des futurs enseignants lorsqu'ils participent à des discussions à visée philosophique relatives à l'éducation mathématique. L'objectif consiste à vérifier si les interventions lors de ces discussions amènent les futurs enseignants à mobiliser des habiletés de pensée réflexive de niveau supérieur en regard de l'éducation mathématique. À l'aide d'une typologie sur les types de pensée réflexive qu'elle a développée, l'auteur analyse les habiletés de pensée émergentes des discussions et des entrevues en appui sur des extraits de protocoles.

5. *Une affiche autour de la notion de compétence*

Baghdad BENMIA aborde dans son affiche la question des « origines et fondements de compétence » dans le cas des mathématiques en s'appuyant sur l'œuvre de philosophes mathématiciens arabes du 7^{ème} siècle, en particulier sur leur rapport au concept de « compétence » afin de répondre au problème *social de l'héritage*. Cet exemple permet à l'auteur d'illustrer l'intérêt de considérer deux niveaux praxéologiques essentiels permettant d'articuler deux traits saillants de la théorie anthropologique du didactique : d'une part, la

modélisation d'une compétence en termes de praxéologies et, d'autre part, l'importance accordée au processus de modélisation d'une activité mathématique au sein de cette compétence. Pour les philosophes arabes du 7^{ème} siècle *le langage* contribue à construire le savoir et non seulement à le communiquer. La réflexion proposée est guidée par les questions suivantes : Comment peut-on décrire la contribution du langage à la construction du savoir ? Quelles sont les caractéristiques du fonctionnement du langage favorisant cette construction ? Quel est le type du sujet qui porte en lui des compétences ?

II. QUELQUES PISTES DE TRAVAIL POUR LES CONGRES A VENIR

Les riches échanges lors des différentes sessions ont fait émerger plusieurs points qui mériteraient selon nous d'être développés et approfondis.

Le premier concerne l'importance pour l'étude des différentes pensées mathématiques de la prise en compte l'activité du sujet, de la nature des objets avec lesquels il travaille, des méthodes qu'il met en œuvre, et de ce que cela nous apprend sur les processus de conceptualisation. Ceci conduit également à prendre en compte la dimension pragmatique (i.e. reconnaissance de forme, principe d'économie, situation d'énonciation, prise en compte des intentions d'autrui etc.) et ses effets sur la mise en œuvre de l'activité et sur les modes de pensée à l'œuvre.

Il est apparu un chantier à ouvrir sur les modes de pensées « spécifiques » par rapport à des modes de pensées plus transversaux (i.e. axiomatique, formelle, logique, structuraliste) ; sur les relations entre différents modes de pensée spécifiques, entre différents modes de pensées transversaux, sur les déclinaisons spécifiques des modes de pensée transversaux et ce que cela ouvre comme champ des possibles pour les développements curriculaires et les organisations mathématiques.

Enfin, plusieurs textes ont mis en évidence l'importance de l'articulation entre syntaxe (forme des énoncés, règles de transformation (réécriture) et règles de déduction formelle) et sémantique (dans une interprétation donnée, prise en compte des objets et des opérations naturalisées sur ces objets, signification des formes et des énoncés ; vérité des énoncés interprétés), et sa prise en compte dans les organisations didactiques, et cela au-delà des seuls textes que nous avons placés dans la section Pensée logique, syntaxe et sémantique.

Enfin, les études sur les questions liées à la prise en compte des différentes pensées mathématiques dans le curriculum, ainsi que sur celles liées à la formation des enseignants, qui constituaient le troisième axe de l'appel à communication, ont besoin d'être développées.

REFERENCES

- Artigue M. (1991) Epistémologie et Didactique. *Recherche en didactique des mathématiques* 10(2/3) 241–286.
- Bednarz N., Mary C. (Eds.) (2009) *Actes du colloque EMF 2006*. Recueil de textes : L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés, Thème 8 « Développement de la rationalité mathématique au fil du secondaire ». Canada : Editions du CRP Sherbrooke. ISBN : 2-89474-070-0 EAN : 9782894740705.
- Borba M. (1997) Mathematics, Culture and Authority. In Powell A. B., Frankenstein M. (Eds) *Ethnomathematics: Challenging eurocentrism in mathematics education*. Albany : State University of New York Press.
- Bouveresse J. (2008) *Mathématiques et expérience – L'empirisme logique à l'épreuve (1918-1940)*. Paris : Odile Jacob.
- Cavaillès J. (1994) *Œuvres complètes de philosophie des sciences*. Paris : Hermann.

- Châtelet G. (1993) *Les enjeux du mobile*. Paris : Seuil.
- Crombie A. C. (Ed.) (1994) *Styles of scientific thinking in the european tradition*. Londres : Duckworth.
- Dieudonné J., Thom R., Guénard F., Lelièvre G. (1982) *Penser les mathématiques*. Paris : Seuil.
- Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine*. Berne : Peter Lang.
- Gardies J.-L. (2004) *Du mode d'existence des objets de la mathématique*. Paris : Vrin.
- Granger G. G. (1992) *Formes, opérations, objets*, Paris : Vrin.
- Gerdes P. (2003) Pensée mathématique et exploration géométrique en Afrique et ailleurs. *Diogenes* 202 126–144.
http://www.cairn.info/article.php?ID_REVUE=DIO&ID_NUMPUBLIE=DIO_202&ID_ARTICLE=DIO_202_0126
- Hacking I. (1965) *Logic of statistical inference*. New York : Cambridge at The University Press.
- Parrochia D. (1992) *Qu'est-ce que penser / calculer ?* Paris : Vrin.
- Patras F. (2001) *La Pensée mathématique contemporaine*. Paris : Presses Universitaires de France.
- Quine W.V.O. (2003) *Du point de vue logique*. Paris : Vrin.
- Peirce C. S. (1974) *Collected papers of Charles Sanders Peirce*. Cambridge Mass : Harvard University Press.
- Rasmussen C., Zandieh M., King K., Teppo A. (2005) Advancing mathematical activity : A view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning* 7 51–73.
- Schoenfeld A. H. (1992) Learning to think mathematically: problem-solving, metacognition and sense making in mathematics. In Grouws D. A. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334–370). New York: Macmillan.
- Sierpienska A., Lerman S. (1996) Epistemologies of mathematics and of mathematics education. In Bishop A. & al. (Eds.) *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827–876). Dordrecht: Kluwer.
- Skovsmose O., Borba M. (2004) Research Methodology and Critical Mathematics Education. In Valero P., Zevenbergen R. (Eds.) *Researching the Socio-Political dimensions of mathematics education: issues of power in theory and methodology* (pp. 2007–2026). Dordrecht: Kluwer.

CONTRIBUTIONS AU GT3¹

- BLOCH I. – Rôle et statut des savoirs dans la pratique mathématique : l'exemple d'un basculement épistémologique dans l'enseignement de l'analyse.
- CARRANZA P. – Sensibilisation à l'Abduction en statistique.
- DURAND-GUERRIER V. – Vérité mathématique et validité logique. Perspectives épistémologique et didactique.
- HAUSBERGER T. – Le challenge de la pensée structuraliste dans l'apprentissage de l'algèbre abstraite : une approche épistémologique.
- KOUKI R., GHEDAMSI I. – Limite des méthodes syntaxiques en algèbre du secondaire.
- MARCHINI C. – Les résistances des enseignants face à l'approximation.
- MESNIL Z. – La place de la logique dans l'enseignement des mathématiques au lycée en France.
- MODESTE S. – La pensée algorithmique : apports d'un point de vue extérieur aux mathématiques.
- MRABET S. – Les axiomatiques autour du théorème de Thalès dans les programmes et les manuels tunisiens.
- OUVRIER-BUFFET C. – L'activité de définition : vers un mode de pensée spécifique ?
- ROGALSKI M. – Approches épistémologique et didactique de l'activité de formalisation en mathématiques.
- ROY A. – Développement d'une pensée réflexive chez des futurs enseignants du primaire en éducation mathématique.

¹ Voir aussi l'affiche de BENMIA B. – Les origines et fondements de compétences : la compétence mathématique et ses signifiants.