

HISTOIRE ET DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES : UNE NÉCESSITÉ POUR LA FORMATION D'UN MATHÉMATICIEN ?

Rachid BEBBOUCHI *

Résumé – L'une des nouveautés dans le système Licence-Master-Doctorat (LMD) adopté en Algérie est de prévoir deux modules semestriels de découverte sur l'Histoire des Mathématiques en deuxième année Licence de Mathématiques et deux modules semestriels sur la Didactique des Mathématiques en troisième année de cette même Licence. La conjonction de ces deux enseignements, Histoire et Didactique des Mathématiques, a-t-elle réussi à faire prendre conscience aux étudiants de la puissance des mathématiques et à leur donner envie de s'y investir ? J'essaie non pas de répondre à cette question mais de la cerner un peu plus.

Mots-clefs : formation de mathématiciens, enseignement de l'histoire et la didactique des mathématiques.

Abstract – The new algerian system LMD gives an opportunity to introduce two semestrial courses in History of Mathematics at the second year of the Mathematics License and two semestrial courses in History of Mathematics at the third year. The union of those courses could show to the students the power of Mathematics and push them in this way. My teaching experience could help to understand that.

Keywords: Mathematics teaching, History of Mathematics, Mathematics education

I. INTRODUCTION

Traditionnellement, du moins en Algérie, la formation universitaire d'un mathématicien (au sens large du terme, pas seulement un futur enseignant en mathématiques mais aussi un futur chercheur) se résume en une somme de connaissances à acquérir pour ensuite se spécialiser dans un domaine déterminé et aboutir à une maîtrise de toutes les facettes de ce domaine. Le Doctorat d'Etat était là pour le certifier (il y a même eu un certain moment un second sujet proposé par l'institution pour témoigner de la capacité de l'impétrant à comprendre un autre domaine que le sien).

La formation fondamentale reposait essentiellement sur l'acquisition de connaissances de base en Analyse, en Algèbre, en Topologie et en Géométrie Différentielle. On était fiers de se proclamer « boubakistes » et on jonglait avec des mathématiques de structures.

Ensuite, les mathématiques dites appliquées firent leur apparition : les Probabilités, les Statistiques, la Recherche Opérationnelle. La noosphère algérienne a introduit la notion d'ingéniorat en Mathématiques (baccalauréat + 5). A la fin de la 5^{ème} année de cette formation, l'étudiant présentait un mémoire lié si possible à un problème concret au sein d'entreprises étatiques ou non (par exemple le problème de temps de démontage-montage d'un derrick en utilisant le recuit simulé). A côté de cela, existaient des thèses de magister beaucoup plus académiques où les encadreurs évaluaient la capacité d'entamer une recherche en mathématiques.

Mais avions-nous formé pour autant des mathématiciens qui comprenaient ce qu'ils faisaient ? Qui maîtrisaient leur domaine suffisamment bien pour pouvoir diffuser leur savoir ? Ou même entamer des recherches pertinentes ?

Ce fameux mémoire d'ingéniorat aurait dû pousser l'apprenant à soigner la transmission de ses connaissances et était tout indiqué pour cela. Or, mises à part des individualités (qui existent et existeront quel que soit le système d'enseignement), la grande masse ne sait ni

* Laboratoire de Systèmes Dynamiques, Faculté de Mathématiques, USTHB – Algérie – rbebbouchi@hotmail.com

expliquer ses idées, ni les enchaîner de manière harmonieuse. La plupart manipulent des concepts sans même en saisir le sens profond. Cela transparaît en particulier quand il s'agit de les recruter.

A titre d'exemple, un candidat à un poste d'enseignant à l'Université, ayant soutenu une thèse de magister sur les fonctions de variable complexe, a affirmé lors de son audit qu'il ne voyait aucune différence entre ces fonctions et les fonctions de variable réelle.

II. LE SYSTÈME LMD ET SES NOUVEAUTÉS

Dans la précipitation, le ministère de l'enseignement supérieur a cru qu'il suffisait de copier la réforme européenne, en particulier celle de la France. Il a créé des commissions pour chaque domaine en faisant appel à des professeurs chevronnés (ou habituels). La commission Mathématiques et Informatique (MI) a siégé à Annaba en Janvier 2003 et a clôturé ses travaux en mars 2004 ; les programmes de la première année MI ont été finalisés. Grâce à l'insistance de certains recteurs, le mode de conception des curricula a changé : chaque université propose ses propres programmes en fonction de ses missions au sein de son environnement propre, tout en respectant un minimum de règles communes de base. La première année n'a pas été vraiment modifiée depuis la proposition de la commission ad hoc en MI (le ministère y a été pour beaucoup). Les différentes propositions de curricula des universités sont discutées et acceptées par des conférences régionales (ouest, centre et est) et enfin adoptées par une conférence nationale.

En septembre 2005, sont lancées les premières formations, notamment en MI. Le nouveau bachelier avait le droit de choisir entre ces nouvelles filières et celles de l'ancien système. Comme les filières informatiques sont exagérément demandées, on n'a inscrit en MI que les étudiants ayant eu une moyenne supérieure ou égale à 14/20 entre la note du baccalauréat et les notes aux épreuves de Mathématiques et Physique.

La tendance chez les étudiants (mais aussi les parents et même la société) à vouloir les filières informatiques reste majoritaire, malgré un certain retour à désirer des formations mathématiques, même autres que les formations soi-disant appliquées (Recherche Opérationnelle et Probabilités - Statistiques).

Ce retour devrait être analysé et peut-être canalisé.

A la rentrée de septembre 2006, 65 étudiants ont été orientés vers la licence mathématiques, pratiquement tous contre leur gré. Une étudiante a même clamé haut et fort qu'elle a toujours détesté les mathématiques alors qu'au baccalauréat, elle a eu 18/20 à l'épreuve de mathématiques.

Actuellement, il semble qu'en plus des étudiants de MI, sont inscrits en licence de mathématiques des étudiants redoublants de Sciences et Technologie (ancien système arrêté en 2008) réorientés, des DES (diplôme d'études supérieures, ancien système) Inscrits Administrativement réorientés (un étudiant inscrit administrativement n'a pas le droit de suivre les cours durant l'année et ne peut que passer les examens ; comment alors lui appliquer la note de participation alors qu'il n'a pas le droit de pénétrer dans l'enceinte de l'Université en dehors des examens de fin de semestre ?).

La première année comporte un module de techniques d'expression en français et un autre en anglais, soi-disant pour compenser le manque à gagner dans la formation en français (qui débute théoriquement en 3^{ème} année primaire et se poursuit jusqu'en dernière année de lycée, soit neuf années) et en anglais (qui débute en 2^{ème} année de collège et se poursuit jusqu'au baccalauréat, soit cinq années). La première année comporte aussi un module d'Histoire des

Sciences qui, au dire de certains étudiants, les ennue plus qu'il ne les passionne (voir en annexe les résultats d'un sondage effectué auprès d'étudiants en master).

Outre le fait que les étudiants connaîtront dans cette Licence de Mathématiques toutes les techniques mathématiques (Analyse, Géométrie, Algèbre, Topologie mais aussi Recherche Opérationnelle, Probabilités et Statistiques, et les logiciels de Calcul Formel), la Commission de programmes de la Faculté de Mathématiques de l'USTHB y a introduit deux modules d'Histoire des Mathématiques en 2ème année et deux modules de Didactique des Mathématiques en 3ème année. Il faut savoir que tous les modules y sont obligatoires.

Cette licence a aussi été adoptée par plus de cinq autres universités. Cette licence n'a pas pour vocation officielle de former des enseignants de mathématiques, l'Ecole Normale Supérieure de Kouba (un quartier d'Alger) étant seule habilitée à fournir le ministère de l'Education Nationale en enseignants hors université. Malheureusement, une année après, la Faculté a ouvert deux autres licences, une de Recherche Opérationnelle et une de Probabilités et Statistiques, répondant plus aux anciennes normes (pas de topologie, moins d'analyse et surtout aucun module de découverte).

Phénomène de société aidant, les étudiants ont classé « naturellement » la licence de mathématiques comme le dernier choix dans leur orientation. C'est à tel point catastrophique que, pour l'année 2010-2011, seulement 8 étudiants sur plus de 400 en première année MI ont choisi la licence de mathématiques. Bref, les étudiants que nous avons dans cette licence ne sont pas vraiment motivés pour se former en mathématiques. Il faut savoir que, dans une formation classique de professeurs de mathématiques du collège et du lycée prévue à l'Ecole Normale Supérieure, l'accent est beaucoup plus mis sur les relations psycho- pédagogiques entre l'enseignant et l'enseigné en tant que préparation au métier d'enseignant. Donc cette Licence de Mathématiques a été une innovation en Algérie.

III. ENSEIGNER L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Lors de la campagne d'arabisation des Mathématiques au niveau de l'Education, on a vu des déviations linguistiques dues à une méconnaissance de l'histoire :

- une droite nommée triangle en première année de collège (méconnaissance du Δ grec),
- un tableau pour une multiplication par jalousie très inutilisé par les enseignants dans le livre scolaire de première année de collège (méconnaissance de cet algorithme),
- la « loi du poisson » en statistique en première année de lycée,
- le « point carré » toujours au lycée,
- les chiffres hindous sont devenus par miracle des chiffres arabes dans un petit fascicule qui se voulait d'histoire des nombres vendu aux élèves de plusieurs lycées...

Certains concepts mathématiques ont du mal à être enseignés et le mathématicien ne comprend pas cela. Des erreurs répétées en mathématiques ne sont pas comprises bien que, historiquement, elles se révélaient naturelles et donc prévisibles : π n'est pas une fraction, une fonction continue peut ne jamais être dérivable, le hasard n'est pas déterministe...

Donc les objectifs d'un enseignement d'Histoire des Mathématiques seront pluriels :

1. *Rendre aux mathématiques une dimension plus humaine*

A première vue, en suivant un cours de mathématiques, on a l'impression que cela a toujours été, est et sera parfait, rigoureux, sans place au doute. Et pourtant, quand on raconte aux non-

mathématiciens (et à plusieurs mathématiciens d'ailleurs) que, pour ce bel édifice qui repose sur la théorie des ensembles de Zermelo et Fraenkel, on ne peut pas en démontrer la consistance (dixit le théorème de Gödel), quels sont ceux qui vous croiront ? Quand on sait que les géométries non euclidiennes n'ont eu de sens qu'à la fin du XX^{ème} siècle, que π n'est un nombre transcendant qu'à partir de la même époque, que la notion de fonction n'est née qu'au XIX^{ème} siècle, quand on vous raconte tous les tâtonnements qui ont précédé la naissance de chaque concept, la preuve de chaque résultat, les mathématiques vous paraîtront aussi proches qu'une science expérimentale.

2. *Donner aux mathématiques une dimension universelle*

L'histoire des mathématiques est extrêmement liée à l'histoire des civilisations. L'esprit pratique des Babyloniens et des Egyptiens du temps des pharaons va se retrouver dans leurs mathématiques où on utilisera plus de « monstrations » pour faciliter les calculs de la vie paysanne. La démocratie grecque va engendrer les premières démonstrations rigoureuses en mathématiques. La tradition de récolte d'informations de la civilisation arabe (écriture du Coran, traductions, bibliothèques...) va faire émerger ou consolider des domaines mathématiques, conjonction de plusieurs cultures : l'algèbre, la cryptographie, la musique, la science des héritages. Les différentes révolutions et évolutions européennes vont enfin bouleverser le monde mathématique par l'analyse des infiniment petits, la maîtrise du hasard (Probabilités et Statistiques), la rigueur logique (théorie des ensembles, travaux de Bourbaki,...), la découverte de nouvelles géométries (non euclidiennes, fractales). Chaque pays, chaque peuple a contribué à l'apport des différentes notions mathématiques et à leur développement, à tel point que cette matière ne peut plus paraître une technologie importée pour peu qu'on connaisse sa genèse.

3. *Donner aux mathématiques une dimension utilitaire*

La plupart des notions mathématiques ont été créées pour expliquer un phénomène naturel (physique ou autre) et aider à agir dessus. Il peut même arriver parfois qu'une notion mathématique est créée avant qu'on ne découvre son utilité : les fibrés vectoriels ont attendu plus de 50 ans avant de constituer les fondements de la théorie de jauge en physique atomique.

Que peut-on faire pour atteindre tous ces objectifs ?

Au Québec, il y a des enseignements spécialisés sur un ou plusieurs concepts. Par exemple, les concepts de limite, continuité, dérivabilité, intégrabilité. L'enseignant choisit des textes de différentes époques (Leibniz, Cauchy, Goursat...) et même contemporains et les décortique, devant et avec ses étudiants. Cela permet de présenter plusieurs approches de ces notions et ainsi fournir aux futurs enseignants suffisamment d'arguments pour mieux introduire ces notions (voir le cours de Fernando Hitt [4]).

L'Histoire des Mathématiques revêt ainsi un caractère didactique. On peut aussi citer le livre Mathématiques au fil des âges de J. Dhombres et al. [3] qui raconte l'histoire des mathématiques et des mathématiciens à travers des extraits choisis de certains traités.

Dans un autre cours [1] au Québec, l'enseignant a proposé à ses étudiants de choisir un instrument de mesure, ancien ou récent (astrolabe...), d'en faire l'épistémologie et d'analyser les mathématiques qui se cachent derrière. Ainsi, par exemple, en comprenant l'astrolabe, on a des idées plus claires sur la projection stéréographique.

Ces deux types d'enseignement nécessitent un travail approfondi et seraient intéressants à placer après une formation plus académique en mathématiques. Mais pour un premier contact

des étudiants (très souvent non motivés pour des études de mathématiques, car orientés administrativement et pas selon leur désir) avec l'Histoire des Mathématiques, il est plus prudent de leur donner des lignes de temps et les civilisations paraissent plus indiquées. Pour chaque civilisation, on propose les développements des concepts de l'époque et une présentation des grands noms de mathématiciens ainsi que les liens entre les deux.

Cet enseignement permet de situer dans le temps et l'espace les différentes notions mathématiques et les différents mathématiciens. Il ne faut pas omettre de pimenter le discours par des anecdotes car la mémoire retient plus cela que des dates ou des noms de villes.

Pour illustrer cela, lors d'une épreuve où des enseignants italiens ont donné une question ouverte et ont demandé à des futurs enseignants de coucher sur papier leurs idées au fur et à mesure qu'elles se présentaient, un candidat est tombé sur le calcul de la somme des 100 premiers entiers naturels et a écrit : « *Je me rappelle du jeune Gauss* ». Effectivement, à huit ans, Gauss, turbulent, a été puni ; on lui a demandé de faire ce calcul et sa démonstration, pratiquement immédiate, est encore utilisée jusqu'à nos jours.

Dans mon cours, j'ai écrit un nom sur le tableau : Archimède, et j'ai demandé aux étudiants d'écrire tous les mots qu'ils relient à ce nom : eureka est celui qui revient le plus souvent, avec ses dérivés, l'or, la couronne, la poussée.

IV. ENSEIGNER LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

La Réforme de l'Education se base sur l'approche par compétences depuis 2003, les décideurs ayant été convaincus de l'efficacité de cette méthode. En 2010, les bacheliers sont complètement issus de la réforme au niveau du collège et du lycée. Mais les résultats obtenus sont encore loin d'être satisfaisants, pour preuve les chiffres suivants :

Examen de fin de cycle primaire (session juin 2010) :

Pour l'ensemble des candidats à l'examen (admis et non admis) :

- Moyenne générale = 05,50/10 :
- Moyenne en mathématiques = 05,9/10

En considérant l'ensemble des candidats (admis et non admis), la moyenne de mathématiques par wilaya varie entre 04,40/10 à Illizi et 07,12/10 à Annaba.

Examen du B.E.M (session juin 2010) :

- Moyenne générale = 10/20
- Moyenne en mathématiques = 08,38/20

La moyenne de mathématiques par wilaya pour l'ensemble des candidats (admis et non admis), varie entre 06,08/20 à Tamanrasset et 10,21/20 à Jijel.

Elle est inférieure à 10/20 pour l'ensemble des candidats, dans toutes les wilayas sauf à Jijel, Saida et El Bayadh.

La moyenne nationale en mathématiques au bac 2010 pour l'ensemble des candidats (admis et non admis) est inférieure à 10/20 pour toutes les filières à l'exception de la filière mathématique dont la moyenne avoisine 12/20. Cette moyenne est plus faible en technique mathématique et en gestion-économie. La moyenne en mathématiques pour les candidats admis au Baccalauréat est meilleure dans la filière mathématique avec une moyenne avoisinant 14/20, de façon moindre en Sciences (12/20), tout juste pour les Techniques-Mathématiques (10/20) et insuffisante en gestion-économie (09/20).

Il y a donc (toujours) problème concernant l'Education Mathématique. Si on essaie d'analyser les situations d'apprentissage dans les livres scolaires de l'école primaire par exemple :

- Beaucoup de situations ne sont pas adidactiques : c'est plus des problèmes traités.
- Le degré d'abstraction est exagéré dans certains cas : « On se déplace d'une ville A vers une ville B. » Il serait plus intéressant de les nommer et choisir des villes connues des élèves (quitte à choisir selon la région), ce qui les rapprocherait mieux de leur environnement et enrichirait leur culture. « Un citoyen veut construire deux piscines dans son jardin. Il fait appel à deux maçons. Le premier utilise $\frac{4}{10}$ des briques et le second $\frac{40}{100}$ des briques. » En fin de compte, le propriétaire réalise que les deux maçons ont utilisé le même nombre de briques.
- Le niveau de compréhension est en décalage entre la situation et l'apprenant.

Lors d'une rencontre avec des inspecteurs du primaire :

- Certains intervenants pensent que les enseignants ne sont pas habitués à l'approche par compétences et n'ont pas bien compris les « consignes », encore moins le rôle de l'élève.
- D'autres intervenants ont avoué avoir été obligés de changer les situations de découverte proposées dans les livres afin de les adapter à leurs élèves.

Lors d'une autre rencontre avec une centaine d'instituteurs, mes chercheurs et moi, nous leur avons conseillé de :

- n'enseigner que les concepts qu'ils maîtrisent, donc tout le temps remettre en cause leurs connaissances mathématiques,
- essayer de se mettre à la place de l'apprenant pour mieux transmettre leur message mathématique, ce qui implique implicitement une créativité dans la préparation des situations d'apprentissage, créativité que nous pourrions conseiller, orienter et diffuser,
- ne plus traiter les mathématiques comme une science dure et sèche, mais plutôt comme une science expérimentale qui peut montrer à l'élève son environnement sous un nouvel éclairage.

Tenant compte de tous ces paramètres, et sachant que la population estudiantine à laquelle s'adresse cet enseignement n'est peut-être même pas motivée pour poursuivre des études en mathématiques, encore moins devenir enseignant, je n'ai pas pu me référer aux différents écrits qu'on trouve sur ce sujet dans la littérature. En effet, le principe de base y est de former des futurs enseignants, donc déjà préparés à accepter des situations de classe.

J'ai orienté ainsi le cours de Didactique :

- Le premier semestre, je décortique le triangle didactique, en illustrant à chaque fois par des exemples du vécu. Le programme s'échelonne ainsi : généralités sur la Théorie des Situations Didactiques de Brousseau et la Théorie Anthropologique du Didactique de Chevallard, l'évaluation, les obstacles et des exemples d'études épistémologiques, la transposition didactique et le contrat didactique, le raisonnement mathématique, les techniques de rédaction mathématique.
- Le second semestre, j'essaie de leur apprendre à construire une situation d'apprentissage pour un concept appris en Analyse ou en Algèbre en première année universitaire (ou autre) et choisi par eux. L'objectif de cet enseignement est de préparer l'étudiant à enseigner (ou seulement transmettre) le message mathématique en s'aidant de tous les outils mis à sa disposition par les didacticiens.

Certains étudiants se sont sentis tellement concernés que la préparation de leur situation d'apprentissage les a passionnés. Ils ont réussi à créer des situations adidactiques tirées du vécu algérien (TAD) et à les présenter d'une façon originale (TSD) (avec port d'un tablier et fausses lunettes par certains). Par contre, et c'est là un phénomène à analyser, ce n'est pas forcément les meilleurs étudiants en mathématiques qui ont brillé dans ce cours. Pire, certains l'ont psychologiquement rejeté.

V. CONCLUSION

Un questionnaire a été élaboré pour avoir l'avis des étudiants qui ont subi les enseignements d'Histoire et Didactique des Mathématiques (voir annexe). Plus de 75 % l'ont trouvé intéressant et plus de 65 % pensent avoir amélioré leur rapport avec les mathématiques après cet enseignement. Ce même questionnaire permet aussi de mieux analyser l'impact de l'enseignement de Didactique des Mathématiques. 62 % ont trouvé cet enseignement intéressant et à peu près le même nombre se sont sentis plus confiants pour affronter le métier d'enseignant.

La conjonction de ces deux enseignements, Histoire et Didactique des Mathématiques, a-t-elle réussi à faire prendre conscience aux étudiants de la puissance des mathématiques et du coup leur donner envie de continuer dans cette branche ? On ne le saura que quand ils vont eux-mêmes s'investir.

L'Espace Mathématique Francophone s'est penché sur cet aspect (voir EMF 2006 thème 3 et EMF 2009 GT1) mais surtout dans le cadre de la formation de formateurs. Dans cet article, je pose la problématique de l'intégration d'un enseignement d'Histoire et Didactique des Mathématiques dans toute formation mathématique.

RÉFÉRENCES

- Charbonneau L. (2007) Cours MAT 7222 *Histoire des Mathématiques*, U.Q.A.M.
 Colette J-P. (1979) *Histoire des mathématiques* (2 tomes). Paris : Vuibert/Erpi.
 Dhombres J. et al. (1987) *Les mathématiques au fil des âges*. Paris : Gauthiers- Villars.
 Hitt F. (2007) Cours MAT 7191 *Didactique du calcul différentiel et intégral*. U.Q.A.M.
www.er.uqam.ca/nobel/r21245

ANNEXE

Ce questionnaire a été distribué auprès de 51 étudiants dans différents masters. 29 ont obtenu la Licence Mathématiques. Les 22 autres ont obtenu une autre Licence (donc sans enseignement d'histoire et didactique de mathématiques) mais leurs réponses sont intéressantes car ils ont subi l'enseignement d'histoire des sciences en première année et ont cru qu'il s'agissait de donner leur avis sur ce cours.

Faculté de Mathématique
USTHB

Année 2010-2011

Questionnaire

Répondre sur la feuille et cocher une seule case pour les questions à cases.

Les réponses sont anonymes mais on les préfère sincères et spontanées.

1) Vous avez :

- ☐ la licence de Mathématiques
- ☐ une autre licence (citer laquelle).....

2) Avez-vous suivi un cours d'Histoire des Mathématiques ?

Si non : aimeriez vous en suivre un ? ☐ oui ☐ non

Si oui :

- Avez-vous trouvé cela : ☐ très intéressant ☐ intéressant
☐ pas tellement intéressant ☐ ennuyeux
☐ inutile

- Quel est votre rapport avec les mathématiques après ce cours ?

- ☐ meilleur ☐ un peu mieux ☐ n'a pas changé
- ☐ négatif ☐ catastrophique

Auriez-vous aimé une autre façon d'apprendre l'histoire des mathématiques ?

- ☐ non ☐ oui (dites laquelle).....

3) Avez-vous suivi un cours de Didactique des Mathématiques ? ☐ oui ☐ non

Si non : aimeriez vous en suivre un ? ☐ oui ☐ non

Si oui :

- Avez-vous trouvé cela :

- ☐ très intéressant ☐ intéressant
- ☐ pas tellement intéressant ☐ ennuyeux ☐ inutile

- Pensez-vous qu'après ce cours, comme futur enseignant, vous êtes :
- ☐ mieux armé ☐ un peu plus confiant
- ☐ comme vous étiez avant ce cours ☐ troublé
- ☐ démoralisé

Concernant les 29 réponses des étudiants ayant suivi les cours d'histoire et didactique des mathématiques, le résultat est le suivant :

22 ont trouvé le cours d'histoire des mathématiques intéressant ou plus, 19 ont senti une amélioration de leurs rapports avec les mathématiques contre 8 qui n'ont pas été influencés mais aucun n'a trouvé que c'était négatif.

18 étudiants ont trouvé le cours de Didactique des Mathématiques intéressant ou plus. 18 se sentent confiants grâce à ce cours s'ils s'engagent dans le métier d'enseignant, 6 ne se sont pas sentis influencés. Par contre, un seul s'est dit démoralisé.