LES DÉFINITIONS LES PLUS RIGOUREUSES SONT-ELLES PLUS FACILES À COMPRENDRE ?

Charles Méray et la proposition d'une définition « naturelle » des nombres irrationnels

Tatiana ROQUE
Universidade Federal do Rio de Janeiro
tati@im.ufrj.br

ABSTRACT

Nous analysons la définition des nombres irrationnels proposée par Charles Méray en 1869 en soulignant ses motivations d'ordre épistémologique et didactique. Nous prétendons contribuer ainsi à la discussion sur le rôle de la question des fondements dans l'enseignement de l'analyse.

1 Introduction[1]

À l'heure actuelle il est assez connu dans l'historiographie que le mathématicien français Charles Méray a été le premier à proposer une définition des nombres irrationnels dans le style qui serait consacré par Cantor peu après. Dans son *Histoire de l'Analyse*, Pierre Dugac a introduit un chapitre sur Méray ayant pour titre *Premier exposé publié de la théorie des nombres irrationnels*. Il fait référence au mémoire « Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir des limites à des variables données », publié en 1869 dans la *Revue des Sociétés Savantes*.

Le titre de ce mémoire indique que Méray veut traiter la « nature » de certaines quantités, à savoir les incommensurables. En fait, l'auteur soutient à plusieurs reprises que la façon comme il définit les irrationnels est la plus « naturelle », ou la plus « conforme à la nature des choses », et pour cette raison, serait la plus facile à comprendre.

Nous exposerons d'une manière assez résumée la définition de Méray, à fin de rechercher, par la suite, dans quel sens peut-on dire qu'il s'agit d'une définition « naturelle ». Il n'est pas dans notre but de discuter de la valeur mathématique de la définition de Méray, dont la rigueur a été mise en relief par Dugac et d'autres avant lui. Notre intérêt ici est plutôt de comprendre pourquoi cette définition est considérée comme étant naturelle et, par conséquence, la plus adaptée pour l'enseignement.

Nous verrons à partir des échanges de lettres pendant les années 1880 que même les définitions fournies par Weierstrass peu après Méray n'ont pas êtes unanimement considérées comme les plus faciles à être comprises par les étudiants. Malgré son indéniable valeur mathématique et la reconnaissance d'un étalon de rigueur plus convainquant posé par le mouvement de formalisation de l'analyse, on envisage

[1] Ce texte n'est qu'une partie du travail presenté dans le workshop de ESU6, qui traite plus généralement des rapports entre la recherche et l'enseignement des mathématiques en France entre les années 1860 et 1890. Ce projet a été realisé avec Gerard Grimberg et João Bosco Pitombeira. J'aimerais les remercier, notamment Gerard qui a donné l'idée de travailler sur ce thème. Je remercie aussi les participants du workshop, pour leurs observations précieuses, et à Gert Schubring, qui m'a suggeré des références importantes.

l'hypothèse qu'il ne serait peut-être pas tellement profitable d'introduire les nouvelles notions tout de suite aux étudiants. Le plus approprié serait de commencer par des définitions plus intuitives pour n'aboutir qu'à la fin à une présentation rigoureuse de l'analyse (selon les nouveaux critères).

Il est particulièrement remarquable la façon comme des mots relatifs au caractère « naturel » des nouvelles définitions étaient employés pour soutenir la position contraire à celle citée ci-dessus, dite « intuitive ». L'appel à la nature et à l'intuition servait, respectivement, à la défense de deux positions contradictoires sur l'enseignement de l'analyse : introduire dès le début cette matière de façon considérée comme la plus rigoureuse à l'époque ou maintenir la façon ancienne et garder des précisions supplémentaires pour la fin du cours.

Nous n'arriverons pas jusqu'à discuter les nombreuses études sur l'enseignement de l'analyse jusqu'à nos jours, mais l'actualité de la discussion traitée ici se retrouve dans quelques-uns de ces travaux. Pour n'en donner qu'un exemple, nous ne sommes pas loin de la dualité entre les positions citées ci-dessus lorsqu'on questionne si un cours d'analyse doit forcement commencer par l'introduction de la notion de limite, où s'il est mieux d'exposer cette notion après des expériences intuitives – par exemple, graphiques – d'approximation des courbes par de droites[2].

Même en nous éloignant de la discussion sur l'enseignement de l'analyse, des questions plus générales se posent : Est-ce qu'exposer les mathématiques de la façon la plus rigoureuse est la meilleure stratégie pour obtenir une compréhension plus profonde ? Est-ce que la clarté suit immédiatement de la rigueur et de la concision d'un raisonnement ?

Nous espérons contribuer à ce débat en revenant à la discussion au sujet de l'enseignement de l'analyse au moment même où cette matière souffrait une restructuration.

2 La définition des nombres incommensurables

Au début du mémoire publié par Méray en 1869 (Méray, 1869), il énonce deux principes de la théorie des nombres incommensurables :

1) Une quantité variable v qui prend successivement les valeurs $v_1, v_2, ..., v_n, ...$ tend vers une certaine limite si les termes vont toujours soit en augmentant, soit en diminuant, pourvu qu'ils restent dans le premier cas inférieurs, dans le second supérieurs à une quantité fixe quelconque.
2) La variable v définie comme ci-dessus jouit encore de la même propriété si la différence $v_{n+p} - v_n$ tend vers zéro quand n augmente indéfiniment, quelque relation qu'on puisse établir entre n e p.

Ces deux propositions ont été regardées jusqu'au moment en question comme étant des axiomes, mais Méray veut montrer qu'on peut ramener la seconde à la première, dont selon lui « le caractère d'évidence est plus prononcé ».

Malgré ce caractère d'évidence, le premier principe pose problème, puisqu'il affirme que la limite existe, sans fournir une méthode pour découvrir sa valeur. Cette difficulté est

---

[2] Cette discussion a été centrale dans la recherche inaugurée par David Tall dans les années 1980, connue de nos jours comme *Advanced Mathematical Thinking*. Pour un aperçu récent voir (Tall, 2010).

due à la façon de concevoir les quantités incommensurables. Si la limite est un nombre (c'est-à-dire, un nombre rationnel), on sait que la limite existe parce qu'on calcule sa valeur. Sinon, il paraît contradictoire de « vouloir rattacher l'existence analytique d'un objet à une hypothèse qui ne l'assujettit à correspondre à aucun nombre » (Méray, 1869, p.283, italiques de lui). Il a fallu donc ressaisir la véritable nature des quantités incommensurables, et Méray passe ensuite à la définition de ces quantités conçues comme des entités fictives.

Il réserve la dénomination de « nombre » ou « quantité » aux entiers et aux fractions. Une quantité v qui reçoit successivement diverses valeurs v_n en nombre illimité est appelée « variable progressive ». Si n croissant à l'infini, il existe un nombre V tel que, à partir d'une valeur convenable de n, $V - v_n$ reste inférieure à une quantité quelconque aussi petite qu'on puisse la supposer, on dit que v a pour limite V.

Si ce nombre n'existe pas, il n'est plus permis d'affirmer que v a une limite. Voici la difficulté posée par la non considération des quantités incommensurables comme étant des nombres.

Mais dans le cas où v a pour limite V, la différence $v_{n+p} - v_n$ converge vers zéro, ce qui est aussi vrai du cas où v ne tends pas vers un nombre (admis comme tel, soit un rationnel). Dans cette situation, Méray observe que la nature de v offre une « ressemblance extraordinaire avec des variables réellement douées de limites » (idem, p.284). On peut dire alors que la variable progressive v est « convergente », qu'elle ait ou non une limite « numériquement assignable ».

On devine ainsi le raisonnement de Méray : si la « variable progressive » (pour nous, une « suite ») est convergente, même si la limite vers laquelle elle converge n'est pas un nombre à proprement parler, nous pouvons le définir comme en étant un. On procède ainsi à une extension du concept de nombre. Des quantités qui ne sont pas « numériquement assignables » sont considérées comme étant des nombres afin de donner consistance au fait que toute suite convergente doit avoir une limite, même si cette limite est fictive.

En effet, Méray affirme dans la continuation du mémoire qu'il est une convention utile d'exprimer la convergence de la variable progressive en disant qu'elle a « une limite (fictive) ». Pour pouvoir définir des quantités incommensurables par le moyen de ces limites, il faut d'abord savoir quand on peut affirmer que deux variables progressives sont équivalentes. En aboutissant à cette définition, Méray peut affirmer qu'à toute quantité dite incommensurable correspond une infinité de variables progressives (commensurables) convergentes qui sont équivalentes.

Il définit ainsi des variables progressives équivalentes :

Si m et n augmentant tous deux à l'infini, la différence $u_m - v_n$ de deux variables progressives convergentes tend vers zéro pour une certaine dépendance mutuelle entre ces indices, on prouve aisément qu'elle reste infiniment petite pour toute autre loi. On dit alors que les variables progressives u et v sont équivalentes.

Et leurs limites (vraie ou fictive) :

Supposons que u et v aient des limites U et V (nous ajoutons, des nombres rationnels). Si u et v sont équivalentes, U et V seront égales. Supposons au contraire que u et v n'aient point de limites (numériques), Méray affirme que « il y aura avantage à dire toujours (au figuré) qu'elles ont des limites égales ». Ces limites seront nommées, par opposition aux limites numériques, des « limites fictives » des variables progressives.

Nous savons que ce qu'on nomme aujourd'hui une « suite de Cauchy » peut ou non avoir une limite rationnelle. Méray définit donc un irrationnel comme la limite d'une suite de Cauchy lorsque cette limite n'est pas rationnelle. La nécessité de cette définition s'explique par la volonté de garder l'uniformité de la définition d'une suite convergente comme étant celle qui tend vers une limite. Il en était déjà ainsi lorsqu'on avait une limite numérique; un nouveau type de nombre, fictif, doit être proposé à fin d'obtenir une définition semblable pour tous les cas.

L'objectif de Méray devient plus clair dans son traité de 1872, *Nouveau Précis d'Analyse Infinitésimale*. Les variables progressives seront rebaptisées « variantes », et il énonce une propriété fondamentale sur les variantes ayant des limites numériquement assignables (rationnels pour nous) : la somme, le produit (ou produit de puissances) d'un nombre déterminé quelconque de variantes pourvues de limites et de quantités invariables, ont pour limites les résultats qu'on obtient en substituant, dans les mêmes calculs, les limites aux variantes (Méray, 1872, p.2).

Il passe ensuite à la définition des quantités incommensurables comme des limites des variantes convergentes, de la même manière que dans le mémoire de 1869 (seulement en rendant l'exposé plus clair et détaillée). La définition des variantes équivalentes joue ici un rôle tout aussi fondamental. Les quantités incommensurables permettent d'étendre la proposition citée ci-dessus aux cas des variantes qui ne tendent pas vers des limites numériquement assignables : la somme, le produit (ou produit de puissances) d'un nombre déterminé quelconque de variantes convergentes et de quantités invariables, est une variante convergente qui reste équivalente à elle-même quand on substitue aux variantes proposées d'autres qui leur soient respectivement équivalentes (Méray, 1872, p.3). Il ajoute ensuite que cette proposition exprime la même chose que le théorème précédant lorsque quelques variantes ne tendent pas vers des limites numériquement assignables.

> « Toutefois, précise-t-il, on peut convenir de dire au figuré qu'une variante tend vers une limite fictive *incommensurable*, quand elle est convergente et n'a point de limite numériquement assignable » (Méray, 1872, p.3, italique de lui).

Les limites incommensurables de deux variantes convergentes sont égales quand celles-ci sont équivalentes et cela permet d'étendre à toutes les variantes les propriétés sur la somme et le produit des variantes ayant des limites numériquement assignables. Méray explicite que cette généralisation n'est possible qu'à l'aide d'une « convention » :

> « Telle est pour nous la nature des nombres incommensurables ; ce sont des fictions permettant d'énoncer d'une manière uniforme et plus pittoresque toutes les propositions relatives aux variantes convergentes » (Méray, 1872, p. 4).

3 Une définition conforme à la nature des choses

Dès la préface de ses Leçons, Méray affirmait que sa motivation était de proposer des définitions plus naturelles. En se référant à la définition qu'on vient d'exposer, il ajoute que « si singulière qu'elle puisse paraître, comparée aux traditions classiques », il la croit « plus conforme à la nature des choses que des exemples physiques dont il faut illustrer les autres».

Il témoigne du sentiment commun à son époque qu'il faut aller au-delà des arguments physiques afin de justifier des définitions mathématiques. Mais dans quel sens peut-on dire que la définition qu'on vient de voir est plus conforme à la nature des choses ? Dit autrement, comment expliquer aux étudiants par rapport à quelle « nature des choses » la définition exposée ci-dessus peut être considérée comme la plus adaptée ?

Selon l'avis de Méray le problème est d'amener les propositions sur des nombres incommensurables à exprimer des relations existantes entre des nombres au sens propre (c'est-à-dire, des nombres rationnels). La question pour lui est donc celle d'énoncer pour des nombres incommensurables, des nombres au sens figuré, des propriétés connues des nombres au sens propre.

La définition d'un nombre incommensurable proposée par Méray est considérée comme la plus naturelle parce qu'elle garantit le plus d'homogénéité, le plus d'uniformité dans les énoncés mathématiques. La « nature de choses » dont il est question reflète une conception des mathématiques selon laquelle les objets doivent être les plus uniformes et les propositions doivent être les plus générales possibles. Cela implique une notion particilière de nombre. D'ailleurs une conception qui n'est absolument pas facile à comprendre comme étant la plus naturelle.

Ayant considéré l'exposition des nombres incommensurables fournie dans les écrits précédents trop mélangée aux principes de l'analyse, Méray a publié en 1887 un autre article afin d'éclaircir le sens qu'il faut attribuer à la notion de « nombre incommensurable ». Le titre de cet article, paru dans les Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, exprime bien son but « Sur le sens qu'il convient d'attacher à l'expression nombre incommensurable et sur le critérium de l'existence d'une limite pour une quantité variable de nature donnée ». Il a proposé la même définition déjà donnée dans les Nouveaux Précis ayant pour but d'éclaircir un point clef de la théorie des incommensurables:

> « En examinant attentivement les divers points de cette théorie, on constatera qu'il n'existe aucune propriété des nombres incommensurables qui ne soit la traduction, dans un autre langage, de quelque propriété intéressant exclusivement des nombres proprement dits variables.
>
> En dehors de cette conception, rien ne semble satisfaire pleinement l'esprit ».

Il s'agit surtout, à son avis, d'étendre le concept de nombre, et des opérations sur des nombres, aux incommensurables. Il faut uniformiser les opérations de l'algèbre et les faire valoir pour tout type de nombre qui peut servir de limite à une suite convergente de rationnels.

Quelques années après, en 1894, Méray a publié un deuxième traité d'analyse *Leçons nouvelles de l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques*. Dans la préface il affirme que la conception des quantités incommensurables comme des fictions utiles appartient entièrement au domaine de l'analyse pure. Si l'on définit le nombre de la manière usuelle, on ne peut pas affirmer que toute suite convergente ait une limite. Il faut donc introduire la notion de limite idéale (ou fictive) pour aboutir à un langage uniforme pour l'analyse. Méray exprime la convergence d'une variante quelconque en disant qu'elle tend vers une limite effective ou idéale (suivant le cas) et procède à une extension de toutes les opérations de l'analyse à tous types de nombre :

> « Nous n'avons donc plus aucune raison pour maintenir la restriction faite jusqu'ici tacitement par nous sur le sens du mot *quantité* ; désormais nous l'appliquerons aussi bien aux limites idéales de variantes convergentes qu'aux quantités positives et

négatives ayant exclusivement des nombre entiers ou fractionnaires pour valeurs absolues » (Méray, 1894, p. 36, italique de lui).

On pourrait résumer ainsi les principaux aspects concernant la nouvelle définition :

1) Il est nécessaire de définir un nouveau type de nombre, dit autrement, de considérer comme étant un nombre un nouveau type d'objet (de nature fictive), afin d'uniformiser la notion de convergence. Toute suite convergente doit avoir une limite.
2) Le nombre est ainsi défini, par le moyen d'une relation d'équivalence, comme étant la limite elle-même (la suite convergente *est* le nombre).
3) Cela permet d'étendre les opérations ordinaires aux nouveaux nombres et d'avoir une définition uniforme des limites comme des nombres

Aucun de ces aspects ne peut être facilement admis comme plus naturel, ni plus conforme à la nature des choses, sans que cette nature soit explicitement choisie, sans qu'on soit convaincu que *uniformité* et *généralité* sont des traits obligatoires d'une mathématique qui se veut rigoureuse.

4 Les réactions à la définition de Méray

En 1873, H. Laurent a publié une analyse des *Nouveaux Précis* dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques*. Il voit dans le titre une indication de l'intention de Méray d'exposer les bases du Calcul infinitésimal. Mais à son avis il est impossible d'admettre que l'auteur ait atteint ce but, vu que « les méthodes employées dans cet Ouvrage sont tellement subtiles, tellement délicates, qu'elles ne sauraient être bien comprises que par des personnes déjà familiarisées avec les spéculations de la haute Analyse (…) et il faut ne pas rompre brusquement avec des habitudes consacrées par une longue expérience » (Laurent, 1873, p. 25).

Méray a répondu dans la préface du nouveau traité de 1894. Il affirme que ces appréhensions sur la valeur didactique de ses méthodes ont été contredites par le résultat de sa propre expérience. Méray témoigne avoir eu, depuis 1872, une bonne réception de la part de ses étudiants. Au départ, dit-il, il a été un peu gênant de rompre avec les habitudes consacrées, mais il ajoute « ce n'est pas ma faute si elles sont mauvaises au point de rendre une rupture nécessaire » (Méray, 1894, p. xxxii).

Le rôle de Méray dans la communauté mathématique française des années 1870-1890 est mineur. Le souci de fonder autrement le Calcul infinitésimal, qui animait l'école de Weierstrass en Allemagne depuis 1860[3], n'a été ressenti vraiment en France qu'à partir des années 1885. Dans l'ouvrage de Tannery *Introduction à la Théorie des fonctions d'une variable*, publié en 1886, on trouve des références aux travaux des allemands sur les fondements, mais ce n'est qu'avec la publication du deuxième mémoire de Jordan en 1893 que l'analyse sera exposée d'une façon plus conforme à la nouvelle conception de rigueur proposée par Weierstrass et son école, comme Gispert le montre dans (Gispert, 1982)[4]. La grande majorité des traités d'analyse publiés en France entre 1870 et 1893 se basait sur les

[3] Sur la conception de Weierstrass concernant le fondement de l'analyse comme étant basé sur la notion de nombre, voir (Ullrich, 1989).

[4] On trouve aussi une analyse de la réception des travaux allemands en France dans (Schubring, 2005, p.603).

principes traditionnels, hérités de Cauchy. L'étude de la convergence des séries et des principes concernant l'existence des limites des suites suivait les pas de Cauchy, sans besoin de définir les nombres irrationnels.

En examinant les lettres échangées entre Darboux et Houel, de 1872 à 1882 (Gispert, 1982), on voit que dès 1873 le premier insiste sur la nécessité de rendre les démonstrations de l'analyse plus rigoureuses, par le moyen des critères solides qu'on trouve depuis longtemps en géométrie euclidienne. Mais Darboux sera lui-même déçu par la faible réception de son appel dans la communauté mathématique française (Gispert, 1982 ; 1983).

On repère très peu de références à Méray dans des textes publiés à son époque. Même Darboux ne le cite pas, peut-être parce que la question de la définition des irrationnels ne semble pas l'inquiéter autant que les fonctions continues.

Du côté de l'enseignement il ne semble pas que cela soit différent. Aucun mémoire ne fait référence à la définition des incommensurables proposée par Méray dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, journal qui servait à la préparation des étudiants au concours d'entrée à l'École Polytechnique et à l'École Normale et dont les articles ne se souciaient pas des questions de fondements.

Des rares exemples de mathématiciens à avoir cité Méray sont Riquier, Tannery et Poincaré. Comme on peut voir dans (Dugac, 2003, p.149), ce dernier mentionne Méray seulement pour faire justice au caractère novateur de sa définition des irrationnels et tient à souligner la superiorité de Weierstrass.

Charles Riquier a été élève de Méray et s'est occupé des différentes extensions de la notion de nombre à la manière de son professeur. Il a écrit un article sur le sujet avec Méray (Méray et Riquier, 1889).

Dans le premier tome des *Éléments des fonctions elliptiques*, Tannery et Molk mentionnent la priorité de Méray au sujet de la définition des irrationnels, mais leur inspiration est weierstrassienne. A. Pringsheim et J. Molk observent, dans *l'Encyclopédie des Sciences Mathématiques* (Molk, 1904, p.147), que quelques mathématiciens cherchaient, indépendamment les uns des autres, à édifier une théorie nouvelle entièrement dégagée de toute considération impliquant des grandeurs concrètes et étaient ainsi amenés à approfondir la notion de nombre irrationnel ; Méray est le premier qui a élaboré une telle théorie.

Pour plus de détails au sujet du contexte des travaux de Méray en France, voir (Dugac, 1970). Notre but dans cet article n'est pas d'analyser l'histoire de l'analyse en France à la fin du XIXème siècle[5], mais seulement d'explorer, par le moyen d'un exemple historique, la question du rapport entre la rigueur d'une nouvelle définition et la manière de l'intégrer dans l'enseignement.

5 La rigueur et l'enseignement

Des notions et des outils forgés dans la recherche des nouveaux fondements pour l'analyse ont été utiles et nécessaires aux progrès cette discipline[6]. Nous savons que ce mouvement est à l'origine des notions clefs en mathématiques aujourd'hui. Mais qu'elles ont été ses

[5] Des reférences sur l'histoire des traités à cette époque sont (Gispert 1982;1983) et (Zerner, 1994).

[6] Comme montre (Gispert, 1982, p.36).

motivations ? Est-ce que ce mouvement s’explique seulement par la volonté gratuite et formelle de fournir des démonstrations correctes des théorèmes sur les principes de l’analyse ? Bien sûr que non.

Au delà de l'utilité des concepts pour l'avancement de la recherche mathématique, il y a aussi le besoin de mieux enseigner des notions complexes qui constituent les principes de l'analyse. Méray tenait à justifier par des raisons didactiques la portée de ses nouvelles définitions. Néanmoins, il ne va pas de soi que les principes exposés de la manière la plus rigoureuse (selon ses critères) soient effectivement plus faciles à comprendre, et nous donnerons des exemples des mathématiciens de l'époque qui pensaient autrement.

Vers 1880, Mittag-Leffler devient un des principaux divulgateurs des travaux de l’école de Weierstrass en France. Picard et Molk sont, à cette époque, les seuls mathématiciens français à avoir lu les notes des cours de Weierstrass, envoyées par Mittag-Leffler (Dugac, 2003). Certains mathématiciens, pourtant, tout en admettant la nécessité des nouveaux fondements pour l’analyse, ne jugeaient pas que les résultats obtenus étaient indispensables à une bonne exposition des principes du Calcul. Le produit de la nouvelle recherche mathématique n’était pas considéré comme pouvant profiter à un meilleur enseignement.

En 1881, suite à l’annonce faite par Mittag-Leffler qu’il allait enseigner le nombres irrationnels à la façon de Weierstrass, Charles Hermite a écrit:

> « Je crois, mon cher Ami, qu'il ne serait point sans péril d'exposer à des commençants ces mathématiques nouvelles, si incontestablement meilleures et plus rigoureuses que les anciennes. Mon sentiment est qu'il faut d'abord *préparer* à ces nouvelles théories, et suivre l'ancienne route, en montrant soit des erreurs, soit des insuffisances des démonstrations restées longtemps inaperçues, et annonçant que d'autres méthodes les feront disparaître. Et la raison est que quelque chose du développement historique de la science doit se trouver dans l'enseignement. Je m’explique. C’est un fait d’expérience absolument certain que l’erreur a été bien souvent plus utile que des vérités parfaites pour la marche de l’esprit et le progrès de la science.(…)
>
> J’en tire, peut-être en me trompant, la conclusion que l'appareil si complexe de la rigueur moderne, et le caractère abstrait qu'elle revêt, peut n'être pas absolument profitable pour les commençants, ou du moins qu'il est utile de reléguer à la fin, en la réservant pour le couronnement de l'édifice, cette rigueur, qui n'est point toujours *suffisamment instructive* » (Dugac, 2003, p.199, italiques de Hermite).

En octobre 1881, Mittag-Leffler a répondu :

> « C’est vrai que les erreurs ont profité à la science, mais alors on a été naïf et on croyait à l’erreur. Mais comment voulez-vous enseigner une erreur quand vous savez que c’est une erreur? (…) Je ne crois pas non plus qu'il soit juste de regarder le système de Monsieur Weierstrass comme compliqué. C'est au contraire simple et naturel, en même temps que rigoureux, mais c’est vrai qu’il faut beaucoup de temps pour le développer » (Dugac, 2003, p.199).

L’adjectif « naturel » intervient ici à nouveau pour qualifier un raisonnement rigoureux. Le sens n’est pas loin de celui employé par Méray.

En 1892, Méray a publié un mémoire dans lequel son point sur l'enseignement de vue se clarifie, en conformité avec des principes mathématiques alors déjà connus dans le milieux français. Dans ses *Considérations sur l'enseignement des mathématiques*, il expose dans quel sens un raisonnement mathématique doit être considéré « artificiel » :

> « Les principes de chaque démonstration doivent être puisés dans la théorie à laquelle se rattache la proposition correspondante et non en dehors, encore moins dans des théories subséquentes. Il faut épuiser les conséquences qui doivent être tirées d'un principe avant d'en introduire un nouveau. Autrement les théories s'enchevêtrent et perdent à la fois leur clarté et leur indépendance (...)
> Ce qu'on nomme des *artifices* sont des infractions à cette règle; ils peuvent séduire par leur facilité et leur imprévu; mais ils n'ont point de véritable portée, et leur emploi habituel ne produit que des théories décousues, ne donne que l'apparence du savoir » (Méray, 1892, pp.15-16, italique de lui).

C'est pour cette raison qu'il faut enseigner de la façon la plus naturelle : « Les raisonnements bien construits finissent toujours, malgré des complications, par pénétrer dans l'esprit des élèves qui les reproduisent facilement ensuite ».

Naturel est donc l'attribut de ce qu'on peut déduire par démonstration d'une suite d'axiomes, ou des principes, qu'on énonce explicitement au commencement d'une théorie. Par conséquent, dire qu'une définition est naturel revient à la déduire des principes d'une théorie, sans avoir recours à aucune connaissance venue de l'extérieur.

Mais pour quoi les définitions les plus naturelles, dans ce sens, sont les plus adaptées à être enseignées ? On comprend du point de vue de Méray qu'enseigner l'analyse d'une façon naturelle consiste à énoncer d'abord les principes et ensuite les théorèmes qu'on peut en déduire. Ce type de raisonnement, selon lui, finit par pénétrer dans l'esprit des élèves justement parce qu'il est bien construit, c'est-à-dire, il nous permet d'oublier les chemins entrepris dans sa construction.

Comment expose-t-on la définition des nombres réels aujourd'hui ? En fait, dans la plupart des cas l'on définit les corps des réels comme étant un corps complet bien ordonné, et l'on se passe de construire les réels. Mais si l'on veut enseigner comment construire les réels, on peut commencer par la définition d'un réel à la manière de Cantor (qui est essentiellement la même que celle de Méray) ou de Dedekind.

Notre but ici a été d'expliciter que la définition d'un réel comme classe d'équivalence des suites de Cauchy n'est pas si naturelle qu'on le croit, même si elle est très conforme à la nature – mathématique – des choses. Il n'est jamais assez explicité par l'enseignement que cette « nature des choses » implique un choix qui a été déterminé historiquement, un choix sur le type de mathématique qu'on a convenu être la meilleure. Tel pourrait être, à notre avis, l'importance de l'histoire dans l'enseignement de la construction des réels : rendre ce choix explicite; ce qu'implique montrer le rôle prépondérant des critères d'uniformité et de généralité.

REFÉRENCES

– Dugac, P., 1970, « Charles Méray (1835-1911) et la notion de limite », *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, **23 (4)**, 333-350.
– Dugac, P., 2003, *Histoire de l'Analyse*, Paris : Vuibert.
– Gispert, H., 1982, *Camille Jordan et les fondements de l'analyse (comparaison de la 1ère édition (1882-1887) et de la 2ème (1893) de son cours d 'Analyse de l'Ecole Polytechnique)* , Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud.

– Gispert, H., 1983, « Sur les fondements de l’analyse en France (à partir de lettres inédites de G. Darboux et de l'étude des différentes éditions du Cours d'analyse de C. Jordan) », *Archive for History of Exact Sciences*, **28**, 37-106.
– Hermite, C., 1984-1989, « Lettres à Gösta Mittag-Leffler, publiées et annotées par P. Dugac », *Cahiers du Séminaire d’Histoire des Mathématiques*, **5**,49-285 ; **6**, 79-217; **10**, 1-82.
– Laurent, H., 1873, « Ch. Méray. Nouveau précis d'analyse infinitésimale », *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **4**, 24-28.
– Méray, C., 1869, « Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données », *Revue des Sociétés Savantes*, **(2) 4**, 280-289.
– Méray, C., 1872, *Nouveau précis d'analyse infinitésimale*, Paris : Savy.
– Méray, C., 1887, « Sur le sens qu'il convient d'attacher à l'expression nombre incommensurable et sur le critérium de l'existence d'une limite pour une quantité variable de nature donnée », *Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure*, **(3) 4**, 341-360.
– Méray, C., 1892, « Considérations sur l'enseignement des mathématiques », *Revue bourguignonne de l’Enseignement Supérieure*, **2**, 105-129, 269-295.
– Méray, C., 1894-1898, *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques,* Paris : Gauthier-Villars.
– Méray, C. et Riquier, C., 1889, « Théorie élémentaire des fractions dégagée de toute considération impliquant soit la subdivision de l'unité abstraite, soit l'intervention des grandeurs concrètes. Son application à la spécification mathématique de ces dernières », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, **3(8)**, 421-435.
– Molk, J., 1904, *Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées*, t. I, vol. 1., Paris : Gauthier-Villars.
– Pionchon, J., 1912, « Notice sur la vie et les travaux de Charles Méray », *Revue bourguignone d’Enseignement Supérieur*, **22**, 1-158.
– Schubring, G., 2005, *Conflicts between generalization, rigor and intuition: number concepts underlying the development of analysis in 17 - 19th century France and Germany,* New York: Springer.
– Tall, D., 2010, “A Sensible Approach to the Calculus”. Plenary conference at *The National and International Meeting on the Teaching of Calculus*, 23-25th September 2010, Puebla, Mexico. Accessible dans http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/calculus.html
– Tannery, J., 1886,
– Tannery, J., 1894, « Méray Ch. Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques, Première partie : Principes généraux », *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **(2)18**, 80-90.
– Ullrich, P., 1989, “Weierstraß' Vorlesung zur "Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen”, *Archive for History of Exact Sciences*, **40**, 143-172.
– Zerner, M., 1994, *La transformation des traités français d’analyse*, Publications mathématiques du laboratoire Dieudonné, Université de Nice. Accessible à l’adresse http://hal-unice.archives-ouvertes.fr/docs/00/34/77/40/PDF/zernertransformation.pdf