L'HISTOIRE DE LA REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES ET L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE.

Gérard E. GRIMBERG
Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil
gerard.emile@terra.com.br

ABSTRACT

Dans cet article, nous essayerons d'abord de souligner la diversité des conceptions qui ont mené des mathématiciens vers la fin de la XVIIIème et le commencement du XIXème à développer une représentation géométrique des nombres complexes. La présente partie sera basée, sur les travaux récents et sur une lecture personnelle des sources historiques. Nous discuterons dans une deuxième partie de la manière dont ces diverses conceptions ont été diffusées et pratiquées par les mathématiciens et l'importance que la représentation géométrique du complexe a prise dans la seconde moitié du XIXème siècle dans certaines disciplines des mathématiques. Une troisième partie est une tentative de déterminer la place que peut avoir la géométrie des nombres complexes dans la formation des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire au Brésil.

1 Introduction

Ce travail est issue d'une réflexion visant à déterminer le contenu d'un enseignement centré sur la géométrie des nombres complexes destiné à la formation des professeurs de l'enseignement secondaire, à l'Institut de Mathématiques de l'Université fédérale de Rio de Janeiro. Avant d'évoquer ce problème, il est bon de voir comment cette vision géométrique des nombres complexes est apparue, et comment elle est devenue dans bien des recherches un outil incomparable.

2 L'émergence d'une vision géométrique des nombres complexes

Ce que nous entendons dans l'histoire des mathématiques comme la représentation géométrique des nombres complexes recouvre en fait différentes conceptions élaborées par différents mathématiciens à la fin du XVIIIème et dans la première moitié du XIXème siècle. L'article de Study traduit par Cartan en 1908 dans *l'Encyclopédie des Sciences mathématiques* cite presque toutes les références des ouvrages et articles où figurent ces différents points de vue (Cartan & Study 1908, pp.339-354). Notre intention n'est pas de faire un exposé exhaustif, mais seulement de tenter de classer ces différentes représentations suivant leur problématique.

Wessel, Warren et Hamilton:

Le travail Wessel n'a pas été connu de la communauté des mathématiciens avant la fin du 19ème siècle quand il fut découvert et traduit en Français en 1897 (Wessel 1897). Dans son mémoire, Wessel tente de déterminer comment on peut concevoir un calcul de segments orientés. Il définit ainsi les opérations sur ces segments, et démontre alors que ces opérations sur ces objets géométriques peuvent êtres réinterprétés en associant à chaque segment un nombre complexe (Flament 2003 p.110 and sq.). Avec Wessel nous avons donc plutôt une représentation analytique de grandeurs géométriques par les nombres complexes. Wessel tente par ailleurs de déterminer des nombres qui correspondraient aux segments orientés de l’espace, mais il échoue dans sa tentative. La problématique de Warren est analogue (Andersen 1999, p.83), son point de départ est aussi un calcul géométrique, et il s’agit de représenter les objets géométriques et leurs opérations au moyens des nombres complexes. Son originalité la plus marquable est le lien qu’il établit entre les rotations du plan et le produit de deux nombres complexes.

La démarche d’Hamilton (1837) est plus générale et son support intuitif n’est pas l’espace mais le temps. A partir d’une notion intuitive du temps, il construit tous les nombres, partant des nombres entiers jusqu’aux irrationnels qu’il conçoit comme limite de nombres rationnels. Pour introduire les nombres imaginaires, il a recourt à des couples de moments, définit les opérations sur ces couples et montre qu’elles ont les mêmes propriétés que celles des opérations sur les quantités imaginaires. En fait il reconnait dans les complexes un plan de dimension deux, puisque que le problème qu’il se pose dans les années qui suivent est de savoir si l’espace possède lui aussi un calcul analogue à celui des complexes, ainsi qu’il le raconte (Hamilton 1853, p.31):

> «il y avait toutefois un motif qui me poussait à attacher une importance particulière à la considération de triplets, séparés d’ensembles plus généraux, desquels on a rendu compte. C’était le désir de connecter, suivant une méthode utile et nouvelle (ou pour le moins intéressante), calcul et géométrie, au travers de quelque extension non découverte, à l’espace de trois dimensions d’une méthode de construction ou de représentation, qui a été employée avec succès par Mr. Warren et en fait par bien d’autres auteurs» (notre traduction).

Mais en ce sens la démarche d’Hamilton rejoint celle de Wessel, il s’agit de représenter analytiquement les mouvements du plan et de l’espace au moyen d’un calcul algébrique.

Argand et Cauchy:

La démarche d’Argand (1806) et le but de son travail témoignent dune perspective différente. Il s’agit de donner une légitimé des nombres négatifs et imaginaires au moyen d’une représentation géométrique. Il fait correspondre à chaque nombre imaginaire une ligne orientée, et explique la signification géométrique que l’on peut tirer des opérations sur les grandeurs imaginaires (pour une analyse précise de ce travail, Flamment 2003, pp. 165-195). On sait la succession d’articles dans les *Annales* de Gergonne que l’ouvrage suscitera, après la divulgation de ses principaux résultats par Français dans ce journal. Il est particulièrement significatif que ces articles n’aient eu de développements immédiats dans les écrits des principaux mathématiciens de l’époque, même si Legendre avait été impressioné par le travail de d’Argand (Schubring 2001, p. 128-129). Cauchy attendra 1847 pour en venir explicitement à une représentation géométrique des quantités imaginaires, rappelant

> «que dans mon Analyse algébrique publiée en 1821, je m’étais contenté de faire voir qu’on peut rendre rigoureuse la thérorie des expressions et des équations imaginaires, en considérant ces expressions et ces équations comme symboliques» (Cauchy 1847, pp.175-176).

Suivant Bourbaki 1984, p.203, il y a un écart entre la définition à caractère formel que donne Cauchy et la pratique dans la mesure où dans beaucoup de ses travaux il y a un lien entre expressions imaginaires et points du plan. Nous pouvons difficilement imaginer aujourd’hui les méthodes du calcul des résidus sans une vision géométrique sous-jacente des nombres imaginaires. Dahan Dalmenico a analysé en détail cet écart et l’explique par une tension entre différents programmes de recherches dans lesquels s'est engagé Cauchy. Elle oppose le programme fondationnel de Cauchy, 1821 (Dahan Dalmenico 1997, pp.30-32) où les quantités imaginaires sont définies formellement, et participent d'une construction et d'une définition du champs de l'analyse, aux différentes méthodes et pratiques qu'il développe dans l'analyse de la variable complexe dans les mémoires des années 1820 et 1830 (Dahan Dalmenico, 1997, pp.33-36), où elle discerne, certes, une évolution dans les formulations, mais qui, selon elle, ne permettent pas d'affirmer que Cauchy utilise une vision géométrique (Dahan 1997, p.35). Toujours est-il qu'aprés son Mémoire sur les quantités géométriques de 1847 (Cauchy 1847), il est difficile de nier le caractère géométrique dans ses travaux postérieurs sur les fonctions de la variable complexe, puisque dans ce mémoire, il montre comment appliquer cette conception géométrique à la démonstration du théorème fondamental de l'algèbre (Gilain 1897, p. 68).

Gauss

Avec son mémoire *Theoria residuorum biquadraticorum*, K. F. Gauss (1831a) développe une nouvelle perspective de recherches pour l'arithmétique et l'algèbre. Afin de démontrer dans toute sa généralité la loi de réciprocité quadratique, il réalise une extension du domaine de l'arithmétique aux nombres qu'il qualifie de complexes, une nouvelle terminologie qui sera vite adoptée par la communauté des mathématiciens, et associe à tout nombre complexe un point du plan. Il revient dans le compte-rendu de son travail sur cette présentation:

> «Par contre l'arithmétique des nombres complexes est susceptible de la plus compréhensible saisie par les sens (anschaulichsten Versinnlichung), et même si l'auteur dans son exposé a observé cette fois un traitement arithmétique pur, néanmoins pour rendre ainsi cette compréhension plus vivante, et pour cette saisie par les sens fortement recommandée (empfehlende Versinnlichung), il a donné aussi les indications nécessaires, lesquelles seront suffisantes pour le lecteur qui pense par lui-même» (Gauss 1831b, p.174, notre traduction).

Gauss ne cherche pas à donner un statut ontologique aux nombres complexes par le biais de cette présentation sensible. En évoquant le traitement arithmétique pur, Gauss suggère que l'existence des nombres complexes vient de l'algèbre pure. Il est d'ailleurs remarquable qu'il utilise le terme Versinnlichung qui signifie l'acte de rendre sensible, plutôt que Vorstellung (terme qui correspond à représentation). La nécessité d'une telle présentation sensible est plutôt liée à l'art de l'invention. Comme il l'indique (ibid. p.175),

> «L'auteur a abordé il y a bien des années cette partie importante de la mathématique avec un point de vue différent, suivant lequel un objet pouvait être attribué aux grandeurs imaginaires tout aussi bien qu'aux négatives: mais il a manqué jusqu'ici une occasion d'exprimer de manière précise celui-ci publiquement, même si le lecteur attentif en retrouverait facilement les traces dans l'écrit de 1799 sur les équations et dans l'écrit du Prix sur les transformations des surfaces» (notre traduction).

Il est clair que cette vision des nombres complexes l'a souvent guidé dans ses recherches, comme en témoigne, au-delà des textes qu'il cite dans son compte-rendu, la fameuse lettre à Bessel de 1811 (Gauss W. B. X, p.367) où il explique à propos de l'intégrale d'une fonction de la variable $x = a + bi$, qu'il faut associer à ce nombre un point du plan dont les coordonnées sont prises à partir d'un axe réel et d'un axe imaginaire. Ce point de vue accompagne ainsi ses raisonnements dans tous les domaines où intervient la variable complexe.

La démarche de Gauss est ainsi bien différente de celle de Cauchy. En effet, il n'y a pas de tension entre vision géométrique et caractère symbolique des nombres complexes. Cette vision géométrique accompagne ses recherches et est mise à contribution dans ses découvertes.

3 Diffusion et pratiques liées à la représentation géométrique des nombres complexes

Il est aussi intéressant de noter l'impressionnante suite d'articles et d'ouvrages en langue allemande portant sur une conception géométrique des nombres complexes qui suit ce travail de Gauss. W. Matzca ne dénombre pas moins de dix publications s'étalant entre 1834 et 1847 (Matzca 1850, pp.150-151). Si ces travaux n'apportent pas d'éléments essentiellement nouveaux, ils ont permis, comme le remarque (Flament 2003, pp.272-273) une divulgation rapide de cette conception.

La fécondité de cette approche des nombres complexes sera encore confirmée par les travaux de Riemann. Dans les Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions d'une variable complexe (Riemann 1851), il considère dès les premières pages les fonctions complexes comme une relation entre deux points de deux plans complexes, puis presqu'immédiatement (p.6) comme des fonctions du plan dans lui-même. Tout son travail verse sur des considérations géométriques, la dérivée d'une fonction de la variable complexe est conçue comme une transformation linéaire conservant les angles, les représentations des fonctions multiformes utilisent des plans multiples reliés par les ramifications. L'ouvrage s'achève sur le problème des représentations d'une surface sur une autre avec en conclusion une référence aux deux travaux les plus importants de Gauss sur ce dernier sujet.

Riemann situe donc sa recherche dans la continuité de l'oeuvre de Gauss. C'est aussi le cas de sa thèse d'habilitation (Riemann 1854), où l'on peut lire (pp.281-182): « ... à l'exception de quelques brèves indications données par M. Gauss dans son second Mémoire sur les résidus quadratiques, dans les Gelehrte Anzeigen de Göttingen et dans son Mémoire de Jubilé, et quelques recherches philosophiques de Herbart, je n'ai pu m'aider d'aucun travail antérieur ». La source d'inspiration est encore ici le compte-rendu de Gauss de 1831 où, en conclusion, il évoque une extension du plan complexe à des variétés de dimension supérieure (Gauss 1831b, p. 178).

Un autre aspect qui apparaît dans les années qui suivent est l'étude des propriétés des transformations géométriques planes au moyen des nombres complexes. Siebeck semble être le premier qui ait développé ce type d'étude dans un article *Über die Graphische Darstellung imaginär Functionen* (Cartan & Study, n. p.364). Il expose les propriétés des complexes et quelques fonctions élémentaires comme les similitudes à l'aide des nombres complexes. L'exemple peut-être le plus significatif est l'étude de quelques transformations circulaires (Siebeck 1858, pp.243-244), où il retrouve les résultats trouvés par Möbius (1855) qu'il cite explicitement. Möbius avait étudié ces transformations du point de vue de la géométrie synthétique. Ici l'analyse complexe s'en approprie le contenu.

Ces transformations circulaires, joue aussi un rôle déterminant dans la géométrie projective (homographies) ainsi que le souligne F. Klein dans le programme d'Erlangen de 1872 (Klein 1974, pp.18-21) à propos de ce qu'il appelle « la géométrie des rayons vecteurs réciproques » (nom que l'on donne alors à ce type de transformation). Ces transformations jouent aussi un rôle dans la construction de modèles de la géométrie hyperbolique comme l'a mis en évidence Poincaré dans ses mémoires sur les fonctions Fuchsiennes (Gray & Walter 1997).

4 L'enseignement des nombres complexes et la géométrie

Ce qui apparaît aussi nettement dans la conception de Klein est que l'approche analytique et synthétique fusionnent lorsqu'on parvient à caractériser les géométries au travers des groupes de transformations et de leurs invariants. Or cette opposition (analytique/synthétique) est demeurée longtemps dans le domaine de l'enseignement secondaire et supérieur. C'est encore le cas dans les programmes brésiliens de l'enseignement secondaire, où géométrie synthétique et analytique sont souvent enseignées de manière séparée au cours des trois années du lycée, cette division se reproduisant dans les cours de Licence qui forment les professeurs de l'enseignement secondaire. Pour changer ce cadre, il faut d'abord poser le problème de la formation des professeurs, et fournir des outils afin de concevoir une application des programmes qui ne soit pas aussi dogmatique. Nous pensons que la géométrie des nombres complexes peut contribuer à changer ce cadre.

Nous avons souligné l'importance des homographies et antihomographies du plan complexe, qui ont joué un rôle important dans la compréhension des différentes géométrie et dans leur classification.

C'est aussi ce que souligne (entre autres considérations) le rapport d'étape de la commission Kahane (2000), rédigé pour l'essentiel par Daniel Perrin, (puisque le contenu de ce rapport se retrouve déjà dans Perrin (1999). Dans sa lecture du Programme d'Erlangen et les perspectives qu'il trace à l'enseignement de la géométrie, il préconise l'enseignement de géométrie «riche», en particulier la géométrie de l'inversion. Daniel Perrin définit une géométrie riche comme une géométrie donnant lieu à une double lecture des propriétés par le biais d'un isomorphisme (Kahane 2000, p.370 et aussi Perrin 1999, pp.11-12):

> « L'exemple le plus spectaculaire de tel isomorphisme concerne la géométrie anallag-matique plane cf. §i). Algébriquement l'isomorphisme s'exprime ainsi: si q désigne la forme de Lorentz sur R en 4 variables: $q(X, Y, Z, T) = X^2 + Y^2 + Z^2 – T^2$ on a un isomorphisme de son groupe orthogonal direct avec le groupe des homographies à coefficients complexes: $O^+(q) \cong \mathrm{PGL}(2, \mathrm{C})$. On peut penser que ces isomorphismes jouent un grand rôle dans la géométrie élémentaire et que les théories dans lesquelles on rencontre un isomorphisme de ce type sont particulièrement riches. Dite de manière grossière, l'idée est la suivante: le fait que le groupe admette ainsi deux variantes fait que la géométrie en question cumule les deux types d'invariants "naturels" correspondant à ces variantes, dans l'exemple précédent l'invariant birapport de PGL(2,C) et l'invariant φ de $O(q)$ (la forme polaire de q qui donne les notions d'orthogonalité ou de contact des cercles-droites) et donc produit deux fois plus de théorèmes "intéressants". Cet isomorphisme explique sans doute la richesse de la géométrie anallagmatique (que l'on vérifie en parcourant les vieux manuels)».

Ce point de vue éclaire l'importance essentielle que revêt l'enseignement de la géométrie anallagmatique, du fait de la richesse des configurations qu'elle permet d'étudier.

Nous pouvons ajouter à cet aspect, ce qui partiellement en découle, c'est-à-dire le fait qu'elle représente le pont d'une part entre la géométrie du plan euclidien et la géométrie projective et aussi, un élément essentiel dans la construction de modèles euclidiens des géométries non-euclidiennes. Pour donner un exemple, on peut citer l'ouvrage de Lyon (Lyon [2001]) qui propose dans ses premiers chapitres, un parallèle en géométrie pré-euclidienne (sans l'axiome des parallèles) entre le modèle habituel de représentation et le demi-plan de Poincaré où les isométries sont les homographies.

Si nous considérons maintenant les homographies et anti-homographies simplement comme transformations du plan complexe, elles ont comme sous-groupes les similitudes et les isométries du plan, ce qui permet en fait de traiter aussi bien la géométrie de l'inversion que la géométrie euclidienne. Ces groupes donnent par ailleurs des exemples assez riches d'applications conformes, notion destinée à être développée au niveau infinitésimal dans le cours d'analyse complexe. Ils permettent aussi de sortir du tout linéaire dans la mesure où l'objet qui est préservé est un cercle-droite.

Comment organiser un contenu centré sur la géométrie des complexes susceptible d'être enseigné ? Nous pensons que la perspective suivie dans cet article est un des éléments qui permettent de le définir. En effet, on a trop souvent, dans la conception des programmes, situé l'enjeu de l'enseignement autour d'une énumération de notions qui doivent être enseignées dans un certain ordre (en partant souvent du plus élémentaire au plus élaboré.) de l'affine au projectif, du linéaire au non-linéaire. Nous pensons qu'il faut d'abord réfléchir aux notions décisives qui sont au carrefour des théories et qui devraient être au cœur de notre enseignement, tout d'abord à l'université et dans la formation des futurs professeurs de l'enseignement secondaire, afin d'avoir ensuite dans un deuxième temps, les moyens de promouvoir un véritable changement des programmes dans l'enseignement secondaire.

Il faut sans doute aussi se livrer à quelques expériences didactiques au niveau de la formation des professeurs, et privilégier par exemple certaines notions décisives quitte à ne pas en rendre compte de manière exhaustive. Pourquoi ne pourrait-on, après avoir présenté les propriétés géométriques du plan complexe, initier l'étude de la géométrie des complexes par le groupe des homographies et leurs propriétés générales, privilégiant dans cette étude certaines configurations liées à des problèmes ? C'est d'ailleurs la démarche choisie par Eiden (2009), dans son chapitre V.

5 Pour ne pas conclure

L'histoire de la représentation géométrique des complexes permet de comprendre l'importance de certains concepts qui doivent être l'enjeu d'un enseignement de la géométrie des nombres complexes. Elle raconte aussi que cette vision géométrique est directement liée à la pratique des mathématiques dans différentes disciplines. Ce qui est en question dans la formation des professeurs, comme plus généralement dans l'enseignement, ne consiste pas seulement dans les notions que l'on enseigne, mais surtout dans les connections qui existent entre elles, la longue chaîne des raisons que constitue la pensée mathématique. En ce qui concerne les homographies, c'est moins la notion en elle-même qui importe que le fait qu'elle constitue un lien entre divers domaines de l'activité géométrique. Cela ne préjuge en rien de la forme dans laquelle elle doit être enseignée, car il est nécessaire ensuite de chercher les formes didactiques propres à transmettre cette notion et ses connections, en somme, à communiquer la vision géométrique des nombres complexes.

BIBLIOGRAPHIE

- Andersen K., 1999, “Wessel work on complex numbers and its place in History”, in Caspar Wessel, *On the Analytical Representation of Direction*, Branner B. –Jesper Lützen (ed.).
- Argand, J. R., 1806 *Essai sur une maniére de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, Paris, 1806.
- Bourbaki, N., 1984, *Elements d’histoire des mathématique*, Masson.
- Cartan, E., Study, E., 1908, "Les nombres complexes", *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, t. 1,vol. 1, fasc. 3. pp. 329-425.
- Cauchy, A. L., 1821, «Cours D'Analyse de L'École Royale Polytechnique, Analyse Algébrique», *Oeuvres Complètes D'Augustin Cauchy* Gauthier-Villars. Série 2, Volume 3. Paris, 1882.
- Cauchy, A. L., 1847, «Mémoire sur les quantités géométriques», *Oeuvres Complètes D'Augustin Cauchy* Gauthier-Villars. Série 2, Volume 14, pp. 175-202 Paris, 1882.
- Dahan, Dalmenico, Amy, 1997, «L’étoile « imaginaire » a-t-elle immuablement brillé ? Le nombre complexe et ses différentes interprétations dans l’oeuvre de Cauchy », in *Le nombre, une hydre à n visages*, D. Flament (ed.), Ed. De La Maison des sciences de l’Homme Paris.
- Eiden, J.D., 2009, *Géométrie analytique classique*, Calvage et Mounet Paris.
- Flament D., 2003, *Histoire des nombres complexes*, CNRS editions Paris 2003.
- Gauss, C. F., 1831a, «Theoria residuorum biquadraticorum », *Werke* II, p.93-148.
- Gauss, C. F., 1831b, “Selbstanzeige von Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda”, Goettingen gelehrte Anzeigen, 23 de abril de 1831, *Werke* II, p.169-178.
- Gilain, Ch., 1997, «Le théorème fondamental de l’algèbre et la thérie géométrique des nombres complexes au XIXème siècle», in *Le nombre, une hydre à n visages*, D. Flament (ed.), Ed. De La Maison des sciences de l’Homme Paris.
- Gray J. J., Walter Scott A., 1997, “Introduction to Poincaré’s Three Supplements” in *Three Supplements on Fuchsian Functions by Henri Poincaré*, J. J. Gray and Scott A.Walter (eds)., Berlin,, pp.1–25.
- Grimberg G. E, à paraître, “Formação do professor-aluno: o que ensinar em geometria?”.
- Hamilton, W. R., 1837, *Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary Essay on Algebra as the Science of Pure Time*, Royal Irish Academy.
- Hamilton W.R., 1853, *Lectures on Quaternions*, Dublin.
- Kahane (Commission), 2000, «Rapport d’étape sur la géométrie et son enseignement», disponible sur le site http://ups.prepas.org/maths/kahane/geometrie.pdf.
- Klein F., 1974, *Le programme d’ Erlangen*, Gauthier-Villars, Paris.
- Lyon G., 2001, *Géométrie du Plan*, Vuibert Paris.
- Matzca W., 1850, *Versuch einer Richtigen Lehre von der Realitaet der vorgeblichj imaginären Grössen der Algebra oder einer Grundlehre von der Ablenkung algebrischer Grössenbeziehungen*, Prag..
- Möbius, G.W. B., 1855, “Die Theorie der Kreisverwandschaft in rein geometrischer Darstellung“, in Möbius G.W. B. II. Leipzig 1886, pp. 243-341.
- Perrin, D., 1999, «Quelques réflexions sur la géométrie et son enseignement (conférence Cergy, janvier 1999», disponioble sur le site de l’auteur : http://www.math.u-psud.fr/~perrin/geometrie.html.
- Riemann, B., 1851, «Principes généraux pour une théorie générale des fonctions d’une variable complexe», in *Bertrand Riemann, Oeuvres mathématiques*, trad. L. Laugel Paris 1898 pp.1-60.
- Riemann, B., 1854, «Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie » in *Bertrand Riemann, Oeuvres mathématiques*, trad. L. Laugel Paris 1898, pp. 280-299.
- Schubring, G., 2001, “Argand and the Early Work on Graphical Representation: New Sources and Interpretations” in *Around Caspar Wessel and the Geometric Representation of Complex Numbers, Proceedings of the Wessel Symposium* at The Royal Danish Academy of Sciences and Letters. Jesper Lutzen (ed.) Copenhagen, pp. 125-146.
- Siebeck, P., 1858, “Ueber die Graphische Darstellung imaginär Funktionen“ in *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Berlin; 1826, pp. 221 – 253.
- Warren, J. A., 1828, *Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities*, Cambridge.
- Wessel, C., 1897, *Essai sur la Représentation Analytique de la Direction*, Copenhague et Paris.