

LE PROBLEME D'OISEAUX: PROCEDES DE RESOLUTION DANS L'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES

Eva CAIANIELLO

Doctorante en histoire de science à l'EHESS 54, bd Raspail 75006 Paris, France

eva.caianiello@fastwebnet.it

Abstract

Under the naming the « fowls problem » we refer to purchasing different types of birds with a known amount of money. We also know the total number of birds and the price of a simple one. Problems about birds were a kind of mathematical game, of very ancient origin. We meet them at first in China, in the works of Zhang Qiujian (middle of the 5th c. of our age), in India in the Bakhshālī manuscript (7th c.?) and in the Ganita-Sāra-Sangraha by Mahāvīra (middle of the 8th c.), in Egypt towards the beginning of 9th c. by Abu Kāmīl and in Europe by Alcuin of York around the 9th c. In the Muslim word it was part of the Mu'āmalāt, i.e. the science of the calculation applied to commerce and to transaction problems. The problem was widely diffused as a recreational activity in all the ages. This could justify the interest shown by important personages of emperor Frederic II of Hohenstaufen (1184–1250) as master Théodore of Antioche, philosopher of the emperor and addressed of a bookelet composed after 1228 by Leonard from Pisa, called Fibonacci (1170?–1240?), the Epistola ad Magistrum Théodorum, where the mathematician deals with this problem. We'll deal here with the history of problem and its solution procedures starting from Zhang Qiujian.

1 HISTOIRE COMPARÉE DES PROCÉDÉS DE RÉOLUTION

« Si un coq se vend 5 sapèques l'unité, une poule 3 sapèques et 3 poussins une sapèque et si 100 sapèques permettent d'acheter 100 volailles, combien y-a-t-il de coqs, de poules et de poussins? ». La formulation ci-dessus (d'origine chinoise) est probablement la formulation la plus ancienne du problème qui nous est parvenue (Voir 1.1). Connus en Orient comme « problèmes d'oiseaux ou de volailles » car leur sujet est le plus souvent l'achat, avec une somme connue, de divers types de volatiles dont on connaît le nombre (entier) total et le prix à la pièce, ces problèmes pénètrent en Europe au début du IX^e siècle, apparaissant sous d'autres formes aussi, avec porcs, porcelets, bœufs, chevaux, chameaux, hommes, femmes, enfants au lieu de volailles (Voir 1.4).

La formulation la plus générale du problème d'oiseaux est donc la suivante:

Il y a n types de créatures vivantes et a_i du type i -ème au prix b_i . Si p est le nombre total de celles qui ont été achetées pour q , combien de créatures de chaque type ont été obtenues? En notation moderne, le problème peut être traduit par un système linéaire indéterminé à solutions entières et positives:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = p \\ \frac{b_1}{a_1}x_1 + \frac{b_2}{a_2}x_2 + \dots + \frac{b_n}{a_n}x_n = q \end{cases} \quad (1)$$

Comme cas particulier, on a parfois $p = q$.

1.1 PROBLÈME DES VOLAILLES EN CHINE

Dans les mathématiques chinoises, les problèmes des volailles ou des 100 volailles¹ (parce qu'en général on retrouve $p = q = 100$) n'appartiennent pas à la catégorie des problèmes réels (avec des données géographiques, économiques, techniques à valeur locale, touchant aux finances, aux négoce, aux transports etc.), catégorie qui est très bien représentée dans la tradition chinoise. Ils ne sont néanmoins du type pseudo-réel², fruit du remaniement de problèmes d'anciennes collections dont on a modifié les structures. Usuellement, ils qualifient, suivant la classification de Martzloff³, une des deux classes des problèmes indéterminés, c'est à dire celle des problèmes qui se traduisent par des systèmes d'équations linéaires du premier degré du type reporté plus haut; l'autre classe étant constituée par des problèmes qui se ramènent à des systèmes de congruences simultanées:

$$x \equiv r_1 \pmod{m_1} \equiv r_2 \pmod{m_2} \equiv r_3 \pmod{m_3} \dots$$

Zhang Qiujian vers la deuxième moitié du V^e siècle (468–486) écrit le *Zhang Qiujian suanjian* (Classique de calcul de Zhang Qiujian). On y retrouve le problème des 100 volailles. Youschkevitch⁴ souligne que la formulation du problème pourrait être encore plus ancienne; effectivement, selon Chên Luan, elle est attribuée à Hsüeh Yüeh, vers 190. Cette opinion n'est pas partagée par d'autres historiens chinois modernes. La formulation dans le *Zhang Qiujian suanjian* est la suivante:

Si un coq se vend 5 sapèques l'unité, une poule 3 sapèques et 3 poussins une sapèque et si 100 sapèques permettent d'acheter 100 volailles, combien y-a-t-il de coqs, de poules et de poussins?

Réponse: 4 coqs valant (au total) 20 sapèques, 18 poules valant 54 sapèques et 78 poussins valant 26 sapèques.

Autre réponse: 8 coqs, 11 poules et 81 poussins valant respectivement 40, 33 et 27 sapèques.

Autre réponse: 12 coqs, 4 poules et 84 poussins valant respectivement 60, 12 et 28 sapèques.

Comme explication, Zhang dit seulement:

« Quand les coqs augmentent de 4, les poules diminuent de 7 et les poussins augmentent de 4 ».

En notation moderne, si on appelle x le nombre des coqs, y le nombre des poules et z celui des poussins, on aura:

$$\begin{cases} 5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

En effet, en écrivant $z = 100 - x - y$ et en remplaçant cette valeur dans la première équation on obtient: $7x + 4y = 100$ d'où $y = 25 - \frac{7}{4}x$. Il en suit, comme y doit être entier, que x est un multiple de 4. Donc la solution générale est:

$$x = 4t, \quad y = 25 - 4t, \quad z = 75 + 3t$$

¹Le révérend L. Van Hée donna, le premier, cette appellation au problème dans son œuvre « Les cent volailles ou l'analyse indéterminée en Chine », *T'oung Pao*, Vol. 14, pp. 435–450, Leyde, 1913.

²Cfr. Libbrecht, U. *Chinese Mathematics in the thirteenth century*, Cambridge, Mass., 1973, p. 416.

³Cfr. Martzloff J. C. *Histoire des mathématiques chinoises*, Masson, Paris, 1987, p. 293.

⁴“The problem of the fowls was probably formulated no later than the beginning of the third century. According to Chên Luan, when in 570 wrote a commentary on the work of Hsüeh Yüeh of about 190, this work contains the solution of the following problem...” Cfr. Youschkevitch, A. P., *Geschichte der Mathematik in Mittelalter*, Leipzig, 1964, p. 74, dans la traduction de Libbrecht, *Op. cit.*, p. 279.

Pour $t = 0, 1, 2, 3$ les solutions sont:

$x = \text{coqs}$	$y = \text{poules}$	$z = \text{poussins}$
0	25	75
4	18	78
8	11	81
12	4	84

Zhang donne pourtant les solutions correctes, sauf la première, parce qu'il ne considère pas la solution égale à zéro, mais il n'explique pas la méthode de résolution, qui probablement a été trouvée par tâtonnements. Aucun auteur chinois⁵ ne réussit à reconstruire le procédé rationnel jusqu'au XIX^e siècle; il faut attendre le temps de Shih Yüeh-Shun (1861) pour l'explication correcte, qui est reportée dans Van Hée (*op. cit.*, pp. 445–447).

1.2 PROBLÈMES DE VOLAILLES EN INDE

Le « problème des cent volailles » apparaît pour la première fois en Inde dans le manuscrit de Bakhshālī⁶ (c. 7^e siècle, sans l'explication de la règle, puis dans le *Ganita-Sāra-Sangraha* de Mahāvīrā⁷ (c. 850), dans le *Pātiganita*⁸ de Śrīdharā (9^e siècle) et dans le *Bījaganita*⁹ de Bhāskara II (12^e siècle). L'algorithme de Śrīdharā est fondé sur un changement de variables, celui de Bhāskara II sur l'utilisation de *anekavarnasamīkaraṇa* ou d'une équation à plusieurs inconnues et il est mathématiquement équivalent à celui de Śrīdharā¹⁰, tandis que les deux algorithmes de Mahāvīrā sont très différents par rapport aux premiers deux. On donnera trois exemples: deux extraits du *Ganita-Sāra-Sangraha* de Mahāvīrā et un extrait du *Pātiganita* de Śrīdharā :

Formulation du problème d'après Mahāvīrā

Mahāvīrā traite du sujet dans le chapitre VI « Problèmes mélangés », consacré à la division proportionnelle, où il se réfère non seulement aux oiseaux, mais aussi à des différentes collections d'objets, comme fruits, épices, etc. Le nombre total des objets n'est pas toujours égal au prix total. Il est intéressant de souligner que Mahāvīrā donne, dans ce chapitre, des règles, qui sont toutes issues de la division proportionnelle, mais qui sont différentes entre elles en fonction des problèmes qu'on doit résoudre (problèmes de mélange de métaux et des monnaies, problèmes d'intérêt etc.).

Premier exemple¹¹

Mahāvīrā donne, en premier, la règle¹² pour déterminer les prix des espèces du type le plus cher et le moins cher; ensuite il formule le problème suivant, sans le résoudre:

⁵Zhen Luan (c. 570) fait un essai vain; Liu Hiaoxun (fin 6^e sec.) idem; Li Shunfeng (7^e sec.) commentateur de Zhang idem; Hsieh Ch'an-wei fait les mêmes erreurs que Zhen-Luan . Cfr. Libbrecht, U. *Op. cit.* pp. 267–293.

⁶Cfr. Hayashi Takao, *The Bakhshālī Manuscript*, Ed. Egbert Forsten, Groningen, 1995.

⁷Cfr. Mahāvīrācārya, *The Ganita-Sara-Sangraha*, traduit en anglais par Rangācārya M.A., Madras, 1912, p. 325.

⁸Cfr. Kripa Shankar Shukla, *The Patiganita of Sridharacarya with an ancient sanskrit commentary*, Lucknow University (Departement of mathematics and astronomy), 1959, p. 50.

⁹Cfr. Colebrooke, H. T., *Algebra with Arithmetic and Mensuration From the Sanscrit of Brahmagupta and Bhāscara* – 1973, Reprint of 1817 ed., p. 378.

¹⁰Cfr. Hayashi Takao, *Op. cit.*, p. 419.

¹¹Cfr Mahāvīrācārya, *Op. cit.*, pp. 132–133.

¹²“The rule for arriving at the numerical value of the prices of dearer and cheaper things (respectively) from the given mixed value (of their total price): divide (the rate-quantities of the given things) by their rate-prices. Diminish (these resulting quantities separately) by the least (of the above-mentioned quotient-quantities) the given mixed price of all the things; and subtract (this product) from the given (total number of the various) things. Then split up (the remainder optionally) into as many (bits as there are remainders of the above quotient quantities left after subtraction); and then divide (these bits by those remainders of the quotient-quantities. Thus the prices of the various cheaper things are arrived at). These, separated from the total price, give rise to the price of the dearest article of purchase.” Cfr Mahāvīrācārya, *Op. cit.*, pp. 132–133.

Au prix de 2 *panas* les 3 paons, de 3 *panas* les 4 pigeons, de 4 *panas* les 5 cygnes et de 5 *panas* les 6 oiseaux-*sarasa*, achète, mon ami, 72 oiseaux au prix de 56 *panas* et emmène-les chez moi. Ainsi disant, l'homme donna son porte-monnaie à son ami. Calcule vite et découvre combien d'oiseaux il y a pour autant de *panas*.

Suivant le commentaire de Rangācārya, les données du problème sont, en notation moderne, les quantités a_1, a_2, a_3 et a_4 d'oiseaux de chaque espèce qu'on peut acheter respectivement aux prix b_1, b_2, b_3 et b_4 ; le nombre total d'oiseaux p et leur prix q . Les inconnues x_1, x_2, x_3, x_4 sont les prix de chaque groupe d'oiseaux. Mahāvīrā pose les rapports $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \frac{a_4}{b_4}$ qui donnent le nombre d'oiseaux de chaque espèce d'oiseaux qu'on peut acheter par l'unité de monnaie (1 *pana*). Il choisit la fraction la plus petite $\frac{a_4}{b_4}$ (correspondante à l'espèce d'oiseaux la plus chère) et il la soustraie des fractions restantes:

$$\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_4}{b_4} = \Delta_1; \quad \frac{a_2}{b_2} - \frac{a_4}{b_4} = \Delta_2; \quad \frac{a_3}{b_3} - \frac{a_4}{b_4} = \Delta_3$$

Puis, en multipliant le prix total q des oiseaux par la fraction $\frac{a_4}{b_4}$, il calcule le nombre d'oiseaux qu'on obtiendrait au prix q , si tous étaient de l'espèce la plus chère.

Finalement, en soustrayant du nombre total d'oiseaux p le produit $q \frac{a_4}{b_4}$, il obtient la différence Δ , laquelle est partagée ensuite en trois parties au choix ξ_1, ξ_2 et ξ_3 , proportionnelles respectivement à Δ_1, Δ_2 et Δ_3 .

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = \Delta$$

En divisant chaque partie respectivement par les différences connues Δ_1, Δ_2 et Δ_3 , il obtient les prix des premiers trois oiseaux qui sont au prix plus bas, tandis que le prix de la quatrième espèce est obtenu par différence.

EXPLICATION

Il s'agit de résoudre le système des équations:

$$\frac{a_1}{b_1}x_1 + \frac{a_2}{b_2}x_2 + \frac{a_3}{b_3}x_3 + \frac{a_4}{b_4}x_4 = p \quad (2)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = q \quad (3)$$

En multipliant la deuxième équation par $\left(-\frac{a_4}{b_4}\right)$ et en l'ajoutant à la première on obtient l'équation:

$$\left(\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_4}{b_4}\right)x_1 + \left(\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_4}{b_4}\right)x_2 + \left(\frac{a_3}{b_3} - \frac{a_4}{b_4}\right)x_3 = p - q\frac{a_4}{b_4}$$

qu'on peut écrire:

$$x_1\Delta_1 + x_2\Delta_2 + x_3\Delta_3 = \Delta$$

On partage Δ en trois parties au choix ξ_1, ξ_2 et ξ_3 , qui soient divisibles respectivement par Δ_1, Δ_2 et Δ_3 . En les divisant par ces mêmes quantités on obtient x_1, x_2 et x_3 , tandis que x_4 est trouvée par différence. Un ensemble des solutions est:

	Paons	Pigeons	Cygnes	Oiseaux- <i>sarasa</i>
Nombre	7	16	45	4
Prix	$\frac{14}{3}$	12	36	$\frac{10}{3}$

On verra ensuite que le procédé de Fibonacci pour la résolution du même type de problème est très semblable à celui décrit ci-dessus.

Deuxième exemple:¹³

5 pigeons ont été vendus pour 3 *panas*; 7 oiseaux *sarasa* pour 5 *panas*, 9 cygnes pour 7 *panas* et 3 paons les 9 *panas*. Quelqu'un fut chargé de conduire 100 oiseaux au prix de 100 *panas* pour l'amusement du fils du roi. Combien d'oiseaux de chaque variété a-t-il emmenés?

L'application de la règle de Mahāvīrā¹⁴ d'après Rangācārya est la suivante:

1. Ecris les quantités de chaque variété et les prix correspondants sur deux lignes, l'une au-dessous de l'autre; 2. Multiplie la première par le prix total et la deuxième par le nombre total des objets; 3. Puis soustrais l'une de l'autre et élimine le facteur commun, 100; 4. Multiplie les résultats par les nombres 3, 4, 5, 6; 5. Ajoute les nombres sur chaque ligne horizontale et élimine le facteur commun, 6; 6. Change de position aux résultats obtenus et écris sur la ligne qui est au-dessous chaque chiffre autant de fois que sont les addenda dans les sommes changées de position; 7. Multiplie les nombres sur les deux lignes par les prix de chaque objet et, respectivement, par la quantité de chaque variété; 8. Elimine le facteur commun 6; 9. Multiplie par les nombres 3, 4, 5 et 6 Les nombres sur chaque ligne représentent, respectivement, la répartition du prix total et du nombre total des objets, selon les données du problème.	5	7	9	3
	3	5	7	9
	500	700	900	300
	300	500	700	900
	0	0	0	600
	200	200	200	0
	0	0	0	6
	2	2	2	0
	0	0	0	36
	6	8	10	0
	6			
	4			
	4			
	6			
	6	6	6	4
	6	6	6	4
	18	30	42	36
	30	42	54	12
	3	5	7	6
	5	7	9	2
	9	20	35	36
	15	28	45	12

« Cette règle » — observe Rangācārya — « se ramène aux problèmes traduits par des équations indéterminées et il y a pourtant un grand nombre d'ensembles des solutions. Pour

¹³ Cfr. Mahāvīrācārya, *Op. cit.*, pp. 133–134.

¹⁴ «The rate-values (of the various things purchased are each separately) multiplied by the total value (of the purchase-money), and the various values of the rate-money are (alike separately) multiplied by the total number of things purchased; (the latter products are subtracted in order from the former products); the positive remainders are all written down in a line below, the negative remainders in a line above; and all these are reduced to their lowest terms by the removal of the factors which are common to all of them. Then each of these (reduced differences) is multiplied by (a separate) optionally chosen quantity < (then those products which are in a line below as well as those which are so above are separately added together); and the sums are written upside down, (the sum of the lower row of numbers being written above and the sum of the upper row being written below). These sums are also reduced to the lowest terms by means of the removal of common factors, if any; and the resulting quantities are each of them written down twice, (so as to make one be below the other, as often as there are component elements in the corresponding alternate sum. These numbers (thus arranged in two rows) are multiplied by their respective rate-prices and rate-values of things, (the rate-price multiplication being conducted with one row of figures and the rate-number multiplication being in relation to the other row of figures). The products so obtained are again reduced to their lowest terms by the removal of such factors as are common to all of them. The resulting figures in each vertical row are (separately) multiplied (each) by (means of its corresponding originally chosen) optional multiplier. The numbers in the upper row of products give the proportion in which the purchase money is distributed; those in the lower row of products give the proportion in which the corresponding things purchased are distributed. Therefore what remains thereafter is only the operation of *praksēpaka-karana* (proportionate distribution in accordance with rule of three).” Cfr. Mahāvīrācārya, *Op. cit.*, pp. 133–134.

avoir des solutions entières, il faut choisir des multiplicateurs bien déterminés ». Mais la règle, à notre avis, reste assez obscure.

Formulation du problème d'après Srīdharā:

5 pigeons ont été vendus pour 3 *rûpas*, 7 grues pour 5 *rûpas*, 9 cygnes pour 7 *rûpas* et 3 paons pour 9 *rûpas*. Un tel fut chargé de conduire 100 oiseaux au prix de 100 *rûpas* pour l'amusement du fils du roi. Combien d'oiseaux de chaque variété a-t-il emmenés?

Srīdharā donne une méthode¹⁵ encore différente par rapport à Mahāvīrā. Suivons son explication algébrique, d'après T. Hayashi¹⁶.

Si on part de la formulation la plus générale du problème:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = p \\ \frac{b_1}{a_1}x_1 + \frac{b_2}{a_2}x_2 + \dots + \frac{b_n}{a_n}x_n = q \end{cases} \quad (4)$$

on peut réécrire (1), en faisant un changement de variable:

$$\begin{cases} a_1y_1 + \dots + a_ny_n = p \\ b_1y_1 + \dots + b_ny_n = q \end{cases} \quad (5)$$

où $\frac{x_i}{a_i} = y_i$. De ces équations on obtient une seule équation, en éliminant y_j :

$$\begin{aligned} & y_1 \left(a_1 - \frac{a_j b_1}{b_j} \right) + \dots + y_{j-1} \left(a_{j-1} - \frac{a_j b_{j-1}}{b_j} \right) \\ & + y_{j+1} \left(a_{j+1} - \frac{a_j b_{j+1}}{b_j} \right) + \dots + y_n \left(a_n - \frac{a_j}{b_j} \right) = \left(p - \frac{a_j}{b_j} q \right) \end{aligned}$$

En résolvant cette équation indéterminée par tâtonnements, une fois trouvé un ensemble de solutions entières et positives: $(y_i)_{i \neq j} = (u_i)_{i \neq j}$, on obtient un ensemble de solutions des équations primitives de la forme (6):

$$\begin{aligned} x_i &= a_i u_i \text{ per } i \neq j \\ x_j &= p - (x_1 + \dots + x_{j-1} + x_{j+1} + \dots + x_n) \end{aligned} \quad (6)$$

En revenant aux données numériques du problème, Srīdharā pose le nombre des pigeons, grues, cygnes et paons achetés au prix de 100 *rupas* et à la fois les prix payés pour les différents oiseaux, comme il suit:

¹⁵ "By the price of one creature of any variety multiply the rate-creatures (of others varieties) in the order in which they have been stated (in the problem) (and also the number of creatures to be bought). From the products (corresponding to the rate creatures) severally subtract the respective rate-prices of the creatures (and from the product corresponding to the number of creatures to be bought subtract the specified price). Now multiply the various remainders, excepting that obtained by subtracting the specified price, by optional numbers (multipliers) which are to be chosen in such a way that (i) the resulting products when added together may yield (the remainder obtained by subtracting) the specified price as sum, and (ii) on taking the products of those multipliers and the respective rate-prices, a negative number or zero may no be obtained for the multiplier of the creature which is without a multiplier. (The multipliers for the various creatures, obtained in this way, when multiplied by the respective rate-creatures, will give the number of creatures of different varieties that will be bought for the specified price; and the same multipliers when multiplied by the rate-prices of the respective creatures will give the prices that will be paid for the creatures of the respective varieties)." Cfr. Kripa Shankar Shukla, *op cit.* p. 50-51.

¹⁶ Cfr. Hayashi Takao, *Op. cit.*, pp. 418-419.

	pigeons	grues	cygnes	paons
Nombre	$5y_1$	$7y_2$	$9y_3$	$3y_4$
Prix	$3y_1$	$5y_2$	$7y_3$	$9y_4$

Il obtient:

$$5y_1 + 7y_2 + 9y_3 + 3y_4 = 100 \quad (7)$$

$$3y_1 + 5y_2 + 7y_3 + 9y_4 = 100 \quad (8)$$

En multipliant (7) par le coefficient 3 et en soustrayant (8) on a:

$$12y_1 + 16y_2 + 20y_3 = 200 \quad (9)$$

Il cherche les solutions positives et entières, en trouvant par tâtonnements 16 solutions:

y_1	y_2	y_3		y_1	y_2	y_3
3	4	5		4	7	2
11	3	1		8	4	2
1	8	3		12	1	2
6	3	4		5	5	3
2	6	4		9	2	3
4	2	6		7	1	5
3	9	1		1	3	7
7	6	1		2	1	8

Les valeurs correspondantes de y_4 sont issues de (6) ou (7). Une fois trouvé un ensemble de solutions entières et positives: $y_i = u_i$, un ensemble de solutions des équations primitives est issu de $\frac{x_i}{a_i} = u_i$.

1.3 PROBLÈMES DES VOLAILLES DANS L'ISLAM

Apparition du problème en Egypte, (Abū Kāmīl, IX^e siècle).

Abū Kāmīl, dans *Le livre des choses rares du calcul* résout¹⁷ une série des problèmes d'oiseaux, qui se laissent traduire par des systèmes indéterminés du premier degré de difficulté croissante dont le plus complexe est un système à 5 inconnues. Il utilise la méthode algébrique, qui amène au traitement des systèmes indéterminés et à l'analyse combinatoire: il dénombre les solutions entières du problème en tenant compte de certaines contraintes. Après des calculs, il trouve 2676 solutions.

Ibn al-Bannā (XIV^esiècle) résout¹⁸ le problème par la "méthode des plateaux"¹⁹, c'est-à-dire de double fausse position. Voyons la formulation d'après Ibn Bannā:

40 volatiles composés d'oies, de poulets et d'étourneaux sont au prix de quarante dirhams: huit étourneaux pour un dirham, un poulet pour deux dirhams et une oie pour trois dirhams. Combien a-t-on de volatiles de chaque espèce?

¹⁷Cfr. Suter H., "Das buch der Seltenheiten der Rechenkunst von Abū Kāmīl el Misri", *Bibliotheca Mathematica* (3), 11, (1910/1911), p. 102. Voir aussi Sesiano J., *Une introduction à l'histoire de l'algèbre*, Lausanne, 2001, pp. 79–83.

¹⁸Cfr. Djebbar A. « **Les Transactions dans les mathématiques arabes: Classification, résolution et circulation** », dans *Actes du Colloque International « Commerce et mathématiques du Moyen Age à la Renaissance, autour de la Méditerranée »*, Editions du C.I.H.S.O, Toulouse, 2001, pp. 335–336

¹⁹Pour une explication de la méthode voir Souissi M., « Le talkhis d' Ibn al-Bannā », dans *Histoire d'Algoritmes. Du caillou à la puce* par Jean-Luc Chabert et alii, Belin, Paris, 1991, pp. 116–118, voir aussi Djebbar A., *Op. cit.*, p. 337–338.

Résolution

Dans ce type (de problème), les valeurs (trouvées) ne conviennent pas toutes. Il y a en effet deux conditions: l'une d'elles est que le nombre doit être un entier ne contenant pas de fractions; et la seconde est que si on multiplie le prix de l'unité de la moins chère (des espèces) par le nombre de volatiles, le résultat doit être inférieur au prix total, et que si on multiplie également l'unité de la plus chère (par ce nombre), le résultat doit être supérieur au prix (total). Il est clair que, dans ce problème, le nombre d'étourneaux doit être **huit** ou **seize** ou **vingt-quatre** ou **trente-deux** et rien d'autre. S'il est égal à huit, il reste trente deux volatiles et trente neuf dirhams. Si nous vérifions cela à l'aide de la seconde condition, le produit du nombre de volatiles (restants) par le prix unitaire le plus petit, est plus grand que le prix total. Ce qui ne convient donc pas. Si nous prenons le (nombre) d'étourneaux égal à seize et si nous vérifions sur le reste des volatiles et sur le reste du prix, cela ne convient pas non plus.

Si nous prenons le (nombre) d'étourneaux égal à vingt-quatre, et nous prenons le (nombre de) poulets égal à ce que nous voulons, par exemple huit, le (nombre d') oies sera donc huit, le reste du nombre de (volatiles). Nous commençons ainsi une erreur par excès de trois dirhams sur le prix.

Puis, nous prenons un autre plateau dans lequel nous mettons vingt-quatre, (le nombre d') étourneaux qui étaient dans le premier plateau. C'est une condition de la résolution qu'un même nombre soit répété dans les deux plateaux. Puis, nous prenons comme (nombre de) poulets ce que nous voulons, qui soit autre que le premier (nombre): par exemple quatorze. Le nombre d'oies sera alors deux. Nous commençons une erreur par défaut de trois dirhams.

Nous procédons alors selon ce qui a précédé et il résultera ce qui était cherché, soit le nombre de volatiles de chaque espèce, soit le prix de chaque espèce, selon ce que tu veux déterminer en premier.

Notation

Soit x = nombre d'étourneaux; y = nombre des poulets ; z = nombre d'oies;

$$p_x = \frac{1}{8} = \text{prix unitaire des étourneaux};$$

$$p_y = 2 = \text{prix unitaire des poulets};$$

$$p_z = 3 = \text{prix unitaire des oies}$$

avec $p_x < p_y < p_z$;

N = nombre total de volatiles

P = prix total de volatiles

avec $N = P = 40$;

La formulation du problème est donc en notation moderne:

$$\begin{cases} \frac{1}{8}x + 2y + 3z = 40; \\ x + y + z = 40 \end{cases}$$

Les conditions suivantes doivent être vérifiées:

1. x, y et z doivent être de nombres entiers avec $x \in [8, 16, 24, 32]$
2. $N \cdot p_x < P$ et $N \cdot p_z > P$

En substituant les valeurs numériques on a:

$$\begin{aligned} 40 \cdot \frac{1}{8} &= 5 < 40; \\ 40 \cdot 3 &= 120 > 40 \end{aligned}$$

Début de la fausse position:

- Si on pose $x = 8$ alors

$$2y + 3z = 39; \quad y + z = 32$$

On calcule le produit du nombre de volatiles restants par le prix unitaire le plus petit:

$$32 \cdot 2 = 64, \text{ mais } 64 > 39.$$

La deuxième condition n'est pas vérifiée.

- Si on pose $x = 16$ alors $2y + 3z = 38$; $y + z = 24$;

On calcule le produit du nombre de volatiles restants par le prix unitaire le plus petit:

$$24 \cdot 2 = 48 > 38$$

La deuxième condition n'est pas vérifiée.

- Si on pose, les deux conditions sont vérifiées et Si on choisit $y_1 = 8$ alors $z = 40 - (24 + 8) = 8$ mais $\frac{1}{8} \cdot 24 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 8 = 43 > 40$;

Le prix total est 43 au lieu de 40 et nous commençons une erreur par excès de 3 dirhams.

- Si on pose $x = 24$ et si on choisit $y_2 = 14$ alors $z = 2$, mais $\frac{1}{8} \cdot 24 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 2 = 37 < 40$;

Le prix total est 37 au lieu de 40 et nous commençons une erreur par défaut de 3 dirhams.

Si on avait posé $x = 32$, la deuxième condition du problème n'aurait pas été valable.

On applique la méthode de deux plateaux et on trouve le résultat cherché.

La résolution par la méthode de deux plateaux est la suivante: les fausses positions (y_1 et y_2) sont placées dans les deux plateaux de la balance, les erreurs (e_1 et e_2) au-dessus, si elles sont par excès, en dessous si elles sont par défaut, si l'une est par excès et l'autre par défaut, elles sont placées respectivement au-dessus et en — dessous des plateaux. Dans ce dernier cas, la solution est donnée par la formule:

$$y = \frac{y_1 e_2 + y_2 e_1}{e_2 + e_1} \text{ avec } y_1 = 8, \quad y_2 = 14 \text{ et } e_2 = e_1 = 3;$$

$$y = . \text{ On a une solution: } x = 24; \quad y = 11; \quad z = 5.$$

1.4 PROBLÈMES DES VOLAILLES EN EUROPE

Alcuin (735–804)

Dans les *Propositiones Alcuini doctoris Carolo Magni Imperatori ad acuendos juvenes*²⁰ Alcuin donne la formulation suivante du problème:

Un maître de maison à 100 personnes à son service auxquelles il prévoit de donner 100 boisseaux de blé: 3 boisseaux par homme, 2 boisseaux par femme et $\frac{1}{2}$ boisseau par enfant. Que celui qui le peut, dise combien il y avait d'hommes, de femmes et d'enfants.

Il s'agit d'un problème qui se traduit par un système indéterminé à deux équations linéaires:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 3x + 2y + \frac{1}{2}z = 100 \end{cases}$$

Il donne, sans justification, la solution: (11,15,74). Dans le même recueil il y a 6 autres problèmes du même type²¹.

La diversité des méthodes résolutoires que nous avons vu se succéder jusqu'ici, telles que la recherche des solutions par tâtonnements en Chine; la résolution d'une équation à plusieurs inconnues ou par des algorithmes particuliers en Inde; l'utilisation de la méthode algébrique jusqu'à 5 inconnues et de l'analyse combinatoire ou de la double fausse position dans le monde musulman, reflète les différentes techniques visées à la résolution d'un problème diophantien linéaire. Léonard de Pise a été le premier mathématicien qui a introduit une méthode de résolution qui est liée aux règles d'alliage des monnaies²²

Les problèmes d'alliages étaient très diffusés au temps de Léonard et pour les trois siècles suivants. Etant donné qu'une monnaie était évaluée pour son titre ou contenu en métal précieux (argent ou or) et que plusieurs monnaies avec titres différents étaient en circulation et en compétition entre elles — particulièrement

²⁰Cfr. Martzloff J. C, *Op. Cit.*, 1987, pp. 293–296. Voir aussi Migne I. M., *Propositiones Alcuini doctoris Carolo Magni Imperatori ad acuendos juvenes*, No 34, p. 1154, in *Alcuini Opera Omnia*, t. 101, vol. 3, Paris, 1851 et Folkerts M., *Die alteste mathematische Aufgabensammlung in lat. Sprache: Die Alkuin zugeschriebenen Propositiones ad acuendos iuvenes*, Vienne, 1977.

²¹Dans l'énoncé de trois de ces problèmes, il y a porcs, truies, porcelets; chevaux, bœufs et moutons; chameaux, ânes et moutons au lieu de volatiles. Cfr. Martzloff, *Op. cit.*, p. 295.

²²Pour Léonard « La monnaie est une quantité quelconque de deniers produite par le mélange de l'argent avec le cuivre. Une monnaie est dite majeure quand une livre de la même contient plus d'argent par rapport à la monnaie qu'on désire produire, mineure s'il y en a moins » (*Moneta quidem dicitur quelibet denariorum quantitas; et efficitur ex quavis argenti, et eris commixione. Maior autem moneta dicitur, in cuius libra fuerit plus argenti, quam in ea, que fieri desideratur. Minor vero, in qua minus.*).Cfr. Buoncompagni B, *Op. Cit.*, 2 vols., Vol. I, p. 143, fol. 60 r., lg. 32–43.

en Italie — un bon marchand du XIII^e siècle devait savoir calculer la composition de chaque monnaie.

Dans le *Liber Abbaci*, Fibonacci décrit sept procédures ou règles d'alliage avec les problèmes relatifs, qu'il appelle distinctions²³. Citons comme exemple la sixième: comme mélanger, dans certaines conditions, deux ou plus monnaies, chacune avec un titre préétabli, pour obtenir une monnaie dont nous voulons connaître le titre.

Une fois trouvée la règle mathématique pour la détermination des poids de chaque monnaie de l'alliage, « les monnaies deviennent oiseaux »... et notre problème est résolu.

2 LÉONARD DE PISE ET L'ALLIAGE DES MONNAIES

Léonard traite des volailles dans deux problèmes du Chp. XI du *Liber Abbaci*²⁴ (1202) « Sur l'alliage²⁵ des monnaies »: le premier avec 30 oiseaux de trois types différents pour 30 deniers et le deuxième avec trente oiseaux de 4 types différents pour les mêmes deniers. Il utilise une méthode qui découle des règles de l'alliage des monnaies, précisément de la 6^{ième} distinction²⁶, comme on verra plus haut. Les susdites règles sont issues de la division proportionnelle, qui en Europe était connue comme « règle de compagnie²⁷ ». Fibonacci, dans la 7^{ième} distinction²⁸, étend la même procédure de résolution à des problèmes similaires. Il formule une méthode plus générale dans la *Lettre à maître Théodore*²⁹.

A propos de cette dernière procédure, il est intéressant de souligner que la même résolution est appliquée aux problèmes des monnaies dans le *Traité d'algorisme*³⁰ de Jacob de Florence et dans d'autres traités des maîtres de calcul.

2.1 LA SIXIÈME DISTINCTION

La 6^{ième} distinction concerne l'alliage obtenu par l'introduction de monnaies qui sont, respectivement, majeures et mineures par rapport à celles qu'on désire produire, sans adjonction de cuivre ou d'argent

Voyons la règle³¹ (p. 151, *L.A*):

Si quelqu'un a deux monnaies, et l'une d'elles est majeure et l'autre mineure (pour le contenu en argent), par rapport à une monnaie qu'il désire faire,

alors il sera en mesure de la réaliser sans adjonction de cuivre ou d'argent, s'il prend note, dans l'ordre inverse, des différences entre les onces d'argent de la monnaie à faire et les onces d'argent des deux monnaies de départ.

²³Cfr. Buoncompagni B, *Op. Cit.*, 2 vols., Vol. I, p. 143–144.

²⁴Boncompagni, B., *Scritti di Leonardo Pisano*, 2 vols., Vol I, Rome 1857–1862, pp. 143–166.

²⁵On a traduit ici le mot latin “consolamine” par alliage; en italien ancien on dit « allegazione ou alligazione » qui découle d' « allegare ou alligare ». Dans les traités italiens d'abbaco on dit « alegare et consolare les monnaies ». Cfr. Van Egmont, 1976, p. 176.

²⁶Cfr. Boncompagni, B., *Op. cit.*, Vol. I, pp. 151–159.

²⁷Simi Annalisa, « La compagnia mercantile negli abacisti italiani del '300 » dans *Actes du Colloque International « Commerce et mathématiques du Moyen Age à la Renaissance, autour de la Méditerranée »*, Editions du C.I.H.S.O, Toulouse, 2001, pp. 75–103.

²⁸“Septima vero differentia erit de regulis ad consolamen pertinentibus”. Cfr. Buoncompagni, B., *Op. Cit.*, Vol. I, p. 144, fol. 60 v., lg. 10–11.

²⁹Cfr. Boncompagni, B., *Scritti di Leonardo Pisano*, 2 vols., Vol II, Rome 1857–1862, pp. 44–54. 1999, p. 48.

³⁰Cfr. Hoyrup, J., *VAT. LAT. 4826, Iacopo da Firenze*, Roskilde University; 1999, p. 48

³¹On retrouve la même règle dans la section *suvarna-kuttikāra* (calculs sur l'or) dans *Ganita-Sara-Sangraha*. de. Mahāvīrācārya, p. 139.

Par exemple, il a des monnaies à 2 onces et des monnaies à 9 onces, dont il désire faire de la monnaie à 5 onces.

(Traduction du latin de l'auteur)

Suivons la procédure de Fibonacci, dans une transposition très près du texte³²:

- Alors écris 2 et 9 dans une ligne, et au-dessous et entre les deux écris 5;
- Et, dans l'ordre inverse, indique la différence entre 2 et 5, c'est-à-dire 3, sur 9;
- Et après, toujours dans l'ordre inverse, tu indiqueras au-dessus de 2 la différence entre 5 et 9, c'est-à-dire 4;

3		4
9		2
	5	

- Et tu devras mettre: 4 parties de la monnaie mineure et 3 parties de la monnaie majeure.

En effet. . .

Si une livre de la monnaie majeure dépasse de 4 onces d'argent, 3 livres dépasseront de 3 fois 4, c'est-à-dire 12 onces, qui sont le résultat de la multiplication de 3, placé au-dessus de 9, par 4, placé au-dessus de 2.

Et si à une livre de la monnaie mineure il manque 3 onces d'argent, à 4 livres il en manquera 4 par 3, c'est-à-dire 12 onces d'argent qui sont le résultat de la multiplication de 3, placé au-dessus de 9, par 4, placé au-dessus de 2.

Ainsi pour toutes les 4 livres de la monnaie mineure que tu mettras, tu en mettras 3 de la monnaie majeure.

De manière analogue

Quelle que soit la ou les parts que tu auras posées des 4 livres de la monnaie mineure, la même part ou parts tu poseras des 3 livres de la majeure. En effet la proportion est: 4 est à 3 comme ce qui a été mis de la monnaie mineure est à ce qui doit être mis de la monnaie majeure.

Donc, si tu veux obtenir 12 onces de l'alliage:

- Tu sommeras les nombres proportionnels 3 et 4, et tu auras 7 livres;
- Nombre par lequel tu diviseras respectivement le résultat du produit de 4 (livres de la monnaie mineure) par 12 onces; et de 3 (livres de la monnaie majeure) par 12 onces.
- Le premier résultat³³ $6 + \frac{6}{7} = \frac{48}{7}$ représente le nombre d'onces nécessaires pour la monnaie mineure, tandis que

³²Pour la terminologie des opérations élémentaires utilisée par Fibonacci., cfr. Smith, D. E., *History of Mathematics*, Vol. II, The Atheneum Press, Boston, 1925, pp. 88–154.

³³Dans l'écriture de Fibonacci, la somme d'un nombre n et d'une fraction $\frac{1}{a}$, est indiquée par la notation $\frac{1}{a}n$.

- Le second résultat, $5 + \frac{1}{7} = \frac{36}{7}$, représente le nombre d'onces nécessaires pour la monnaie majeure.

En effet: $\frac{48}{7} + \frac{36}{7} = 12$ onces.

De cette règle-observe Fibonacci — découle une procédure souvent très utile aux monnayeurs, parce que la monnaie qu'ils produisent présente parfois un excès, parfois un défaut en argent¹...

EN NOTATION MODERNE

Soit p_1 et p_2 les poids inconnus des monnaies que l'on veut introduire, $f_1 = 2$ onces/livre et $f_2 = 9$ onces/livre les titres préétablis de chaque monnaie, $p = 12$ onces le poids préétabli de l'alliage et $f = 5$ onces/livre le titre préétabli de la monnaie que l'on veut produire.

On peut introduire les deux variables auxiliaires:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= 3 = f - f_1 \\ \delta_2 &= 4 = f_2 - f\end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation qui exprime l'alliage i.e.

$$p_1 f_1 + p_2 f_2 = (p_1 + p_2) \cdot f$$

On a:

$$P_2(f_2 - f) = p_1(f - f_1) +$$

d'où

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{f_2 - f}{f - f_1} \Rightarrow \frac{p_1}{\delta_1} = \frac{p_2}{\delta_2} \quad (10)$$

$$\text{Ainsi } p_1 \approx f'_1 = k\delta_2 \text{ et } p_2 \approx f'_2 = k\delta_1$$

En considérant δ_1 et δ_2 comme les poids préétablis du fin de chaque monnaie qui correspondent respectivement aux poids p_1 et p_2 des monnaies, nous pouvons appliquer la méthode de compagnies avec un changement de variables.

Dans les conditions susdites, (1') devient

$$p_k = \frac{p \cdot \delta_j}{\sum_1^n \delta_k} \text{ pour } k \text{ et } j \in [1 \dots n] \text{ et } k \neq j$$

Dans notre cas $n = 2$, $\delta_1 = 3$ et $\delta_2 = 4$. On a:

$$\begin{aligned}p_1 &= \frac{12 \text{ onces} \cdot 4 \text{ onces/livre}}{7 \text{ onces/livre}} = 6 + \frac{6}{7} = \frac{48}{7} \text{ onces;} \\ p_2 &= \frac{12 \text{ onces} \cdot 3 \text{ onces/livre}}{7 \text{ onces/livre}} = 5 + \frac{1}{7} = \frac{36}{7} \text{ onces.}\end{aligned}$$

Cela porte à $x = 2$ et $y = 7$.

2.2 LE PROBLÈME DE 30 OISEAUX

De l'homme qui acheta 30 oiseaux de trois types différents au prix de 30 deniers
(extrait de la 7^{ième} distinction, p. 165, *L.A.*)

Un homme acheta 30 oiseaux pour 30 deniers. Il y avait des perdrix, des colombes et des moineaux. Une perdrix coûtait 3 deniers, une colombe 2 deniers et deux moineaux 1 denier, c'est-à-dire qu'un moineau coûtait $\frac{1}{2}$ denier. On demande combien d'oiseaux de chaque type il acheta.

- Divise les 30 deniers par les 30 oiseaux; il résultera qu'un oiseau coûte 1 denier.
- Donc, je dis: j'ai de la monnaie à, à 2 et à 3; et je veux faire de la monnaie à 1.

perdrix	colombes	moineaux
3	2 1	$\frac{1}{2}$

Quand l'on passe aux nombres entiers, parce qu'on traite d'oiseaux, l'énoncé du problème devient:

J'ai de la monnaie à 1, à 4 et à 6 et je veux faire de la monnaie à 2.

perdrix	colombes	moineaux
6	4	1

- Fais un premier alliage des perdrix et des moineaux (c'est à dire du type le plus cher et du moins cher):

1^o alliage, 1^o fois:

perdrix		moineaux
1 6		4 1
	2	

et il résultera:

5 oiseaux pour 5 deniers, c'est à dire 4 moineaux et 1 perdrix:

- Fais un second alliage des moineaux et des colombes:

2^o alliage, 1^o fois:

colombes		moineaux
1 4		2 1
	2	

Et tu auras **3 oiseaux pour 3 deniers, autrement dit 2 moineaux et 1 colombe.**

Etant donné que tu dois obtenir un total de 30 oiseaux, et non 8 qui dérive de la somme de 5 (1^o alliage) et 3 (2^o alliage),

- Répète trois fois le premier alliage:

1^o alliage, trois fois:

perdrix		moineaux
$1 \times 3 = 3$	$4 \times 3 = 12$ 2	

Tu obtiendras **15 oiseaux** dont **12 sont les moineaux** et **3 les perdrix**;

- Ensuite calcule³⁴ $30 - 15 = 15$
- Si tu divises 15 par le nombre d’oiseaux du 2° alliage, c’est-à-dire 3, tu auras comme résultat 5.

Ainsi, si tu répètes le 2° alliage **5 fois**, tu auras comme résultat **15** et ce nombre indique le total d’oiseaux dont 10 sont les moineaux et 5 sont les colombes.

2° alliage, 5° fois :

colombes		moineaux
$1 \times 5 = 5$ 4		$2 \times 5 = 10$ 1
	2	

La somme totale des deux alliages sera:

- 1° alliage :**12 moineaux et 3 perdrix**;
- 2° alliage :**10 moineaux et 5 colombes**;

Tu auras, au total: **22 moineaux, 5 colombes et 3 perdrix**, pour un total de 30 oiseaux.

2.3 UNE MÉTHODE GÉNÉRALE (EXTRAITE DE LA *Lettre à Maître Théodore*)

L’achat de volatiles

Dans la *Lettre à Maître Théodore*, Fibonacci présente une méthode générale pour résoudre tant les problèmes de volatiles que ceux d’alliage. Il propose d’abord un problème qui est une version semblable au problème de 30 oiseaux; il ensuite présente plusieurs cas du même problème: 29 oiseaux qui valent 29 deniers, 15 oiseaux qui valent 15 deniers (cas d’impossibilité avec des résultats fractionnaires pour les oiseaux), 15 oiseaux qui valent 16 deniers.

Enfin, il donne un exemple avec 4 espèces d’oiseaux:

Il s’agit de 24 oiseaux qui valent 24 deniers : 5 moineaux pour 1 denier, 3 tourterelles pour 1 denier, 1 palombe pour 2 deniers et 1 perdrix pour 3 deniers.

Il compose une table où il dispose sur 4 lignes:

perdrix x_4	palombes x_3	tourterelles x_2	moineaux x_1	
3	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	Les prix unitaires de chaque oiseau
$2 + \frac{4}{5} = \frac{42}{15}$	$1 + \frac{4}{5} = \frac{27}{15}$	$\frac{2}{15}$	0	La différence entre le prix unitaire de chaque oiseau et celui du moineau
4	4	6	10	Premier ensemble des solutions
5	2	12	5	Deuxième ensemble des solutions

³⁴Si p et q sont les nombres de livres du premier et deuxième alliage, x et y le nombre de fois qu’on doit répéter respectivement le premier et le deuxième alliage pour obtenir l’alliage total T , on a l’équation: $T = xp + yq \rightarrow T - xp = yq \rightarrow \frac{T - xp}{q} = y$. On cherche par tâtonnements le nombre x jusqu’ à obtenir que y soit un nombre entier.

Il calcule la différence $A = 24 - \frac{24}{5} = \frac{96}{5} = 19 + \frac{1}{5}$ entre la valeur totale des oiseaux et la valeur qu'ils auraient s'ils étaient tous de l'espèce la moins chère (moineau);

Il rend entières la valeur de A et les différences des prix unitaires en les multipliant par le p.p.c.m. de leurs dénominateurs, i.e. 15.

Il obtient respectivement 2, 27, 42 et $A = 288$;

Il décompose la différence $A = 288$, ainsi obtenue, en 3 parties qui sont divisibles par les différences des prix unitaires:

$$A = 288 = 42x_4 + 27x_3 + 2x_2$$

Il faut trouver les trois parties d'un nombre satisfaisant l'équation (4) et avec la condition supplémentaire:

$$x_4 + x_3 + x_2 < 24.$$

Fibonacci donne à x_4 et x_3 la même valeur 4 et il calcule par différence x_2 d'où

$$288 - (42 \cdot 4 + 27 \cdot 4) = 2x_2$$

et donc

$$x_2 = \frac{12}{2} = 6$$

I° Ensemble des solutions:

perdrix x_4	palombes x_3	tourterelles x_2	moineaux x_1
4	4	6	10

où ce dernier nombre est obtenu par différence entre 24 et 14.

II° Ensemble des solutions:

perdrix x_4	palombes x_3	tourterelles x_2	moineaux x_1
5	2	12	5

Il donne à x_4 (nombre de perdrix) la valeur 5, à x_3 (nombre de palombes) la valeur 2 et par conséquent, puisque $2x_2 = 288 - (5 \cdot 42 + 2 \cdot 27) = 24$, le nombre de tourterelles est $x_2 = 12$.

Le nombre de moineaux est donc $24 - (5 + 2 + 12) = 24 - 19 = 5$.

Ce procédé, conclut Fibonacci, peut être appliqué dans les problèmes de mélange des monnaies.

La méthode de résolution du premier problème de Mahāvīrī nous paraît très semblable à celle qu'utilise Fibonacci dans la lettre à maître Théodore, sauf pour les noms des volatiles et les valeurs numériques. En outre, Fibonacci donne en premier le nombre d'oiseaux, tandis que Mahāvīrā, donne d'abord les prix.

2.4 JACOB DE FLORENCE

Comparons la résolution de Fibonacci avec celle de Jacob de Florence (1307):

Un tel a des florins vieux et nouveaux. Un florin vieux vaut 35 sous, le nouveau en vaut 37. J'ai changé 100 monnaies et j'ai obtenu 178 livres. On demande combien de florins vieux et nouveaux j'avais.

Résolution:

- Tu fais comme si tous les florins étaient d'un même type, par exemple comme le florin vieux. Fais donc comme si tu avais seulement des florins vieux.

- Multiplie la valeur unitaire d'un florin vieux, c'est à dire 35 sous par 100 et tu obtiendras 350 sous, c'est à dire 175 livres (divisés par 20);
- Fais la différence entre 178 livres et 175 livres, et tu obtiendras 3 livres = 60 sous.
- Divise 60 par la différence des valeurs unitaires (*pregio*) des deux florins, c'est à dire $(37 - 35) = 2$; tu obtiendras 30.

30 sera le nombre des florins nouveaux et le complément à 100 de 30 qui est égal à 70 sera le nombre des florins vieux.

CONCLUSION

« Comme l'ont noté de nombreux historiens- observe Martzloff³⁵ — on retrouve, au Moyen Age, d'innombrables problèmes analogues à celui de Zhang Qiuqian, aussi bien dans les mathématiques indiennes que dans les arabes ou les européennes. » Du point de vue des techniques résolutives, on a cherché d'exposer ici la variété des algorithmes utilisés. Quant à Fibonacci, on retrouvera ses procédés de résolution appliqués aux problèmes de mélange des monnaies dans presque toutes les oeuvres des « maîtres d' abbaco » des siècles suivants³⁶.

L'utilisation de la part de Fibonacci d'une pratique résolutive (la méthode de l'alliage) reliée aux exigences de production de la monnaie (exigence très pressante aux temps de l'auteur et généralement depuis le X^e siècle en Europe) est, à notre avis, le témoignage précis d'un conditionnement socio-économique sur l'activité du mathématicien. D'autre part, cette même méthode de l'alliage, représente pour Léonard un modèle pour la résolution de problèmes de types très différents³⁷ tels que la recherche des parts qui composent un nombre donné et qui sont dans une certaine relation entre elles (*Divisi 20 in duas partes*, p. 161 lg. 7–31, *L. A.*) ou du salaire d'un ouvrier qui un peu travaille et un peu non (*De labore laborante in quodam*, p. 160, lg. 33–43, *L.A.*). En conclusion, on pourrait supposer que, derrière une règle apparemment marchande, est celée une technique mathématique, qui est orientée, au même titre de la règle des compagnies, vers les mathématiques abstraites et visée à la résolution de certains types d'équations diophantiennes linéaires.

³⁵Cfr. Martzloff, J.-C., *Op.cit.*, p. 194. Voir aussi Suter, H., *Op. cit.*, p. 102.

³⁶Cfr. Arrighi, G., *La matematica dell'età di mezzo. Scritti scelti* par F. Barbieri, R. Franci, L. Toti Rigatelli, Editions ETS, Pise 2004, p. 232.

³⁷Fibonacci, dans la 7^{ième} distinction, étend la même procédure de résolution à des problèmes similaires, Voir note 30.