Pour Une Culture Mathématique Accessible À Tous

Michel BALLIEU, Marie-France GUISSARD

Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM)
5 rue Émile Vandervelde, B1400 Nivelles, Belgique

marie-france.guissard@ulb.ac.be

Abstract

Le recours à des activités culturelles peut s'avérer une aide précieuse pour introduire et installer des notions abstraites. Cet atelier met l'accent sur deux registres susceptibles de rendre un certain plaisir d'apprendre aux élèves démotivés: l'histoire et les réalisations artistiques.

*L'approche historique des mathématiques permet d'aborder les concepts en montrant dans quel contexte et pourquoi ils sont nés, comment ils ont évolué. La découverte de la formule de résolution de l'équation du deuxième degré à partir d'un extrait du texte d'*AL-H̲WĀRIZMĪ *illustre ce propos. Un compte-rendu des expérimentations menées dans les classes complète l'analyse de cette séquence d'apprentissage.*

Quant aux décors géométriques, dont on trouve des exemples dans toutes les civilisations et à toutes les époques, ils peuvent servir de support à l'apprentissage de la géométrie, qui montre ainsi tout son attrait visuel. Des motifs répétitifs tels que les frises ou les pavages se prêtent à des activités qui allient intuition, créativité et analyse des structures mathématiques.

1 Introduction

L'une des dernières recherches du CREM, dont nous rendons compte ici, s'intitule « Pour une culture mathématique accessible à tous ». Elle tente de porter une réflexion sur ce qui pourrait constituer une culture mathématique de base. Compter, situer, mesurer, dessiner, jouer, expliquer sont des activités propres à tous les peuples. Elles permettent de développer, dès le plus jeune âge, des compétences mathématiques. Celles-ci devraient se compléter progressivement et s'enrichir tout au long de la scolarité. Or on constate que la culture mathématique échappe, de nos jours, à de nombreux adultes, même très cultivés dans d'autres domaines et/ou ayant un niveau d'études supérieures ou universitaires.

Combien de fois n'entend-on pas des réflexions du type « Oh, moi les maths, je n'y ai jamais rien compris... », parfois émises avec une certaine fierté? La répugnance à aborder un texte illustré de graphiques, les erreurs d'interprétation dans les problèmes de pourcentages, voire l'ignorance du principe fondamental de la numération de position sont autant d'exemples du rejet et de la méconnaissance des mathématiques de base. L'incompréhension augmente encore s'il est question d'analyser des représentations géométriques ou d'utiliser quelques rudiments de symbolisme algébrique. Parmi les causes probables de cet échec dans l'éducation mathématique, on peut sans doute relever d'une part, le choix inapproprié de certaines matières enseignées, mais surtout la manière de présenter celles-ci aux élèves.

Les mathématiques ont pour vocation de résoudre des problèmes. Elles nécessitent la mise en œuvre de processus d'abstraction et de raisonnements analytiques qui dicteront les opérations à effectuer; c'est en général l'interprétation des résultats qui fournit alors la solution.

Très souvent, dans l'enseignement, l'accent est mis sur les processus opératoires, alors que ceux-ci constituent la phase dévolue aux machines dans notre société moderne. Presque toujours, on impose aux élèves l'apprentissage d'algorithmes de calcul, sans dire à quelles occasions ces méthodes ont été mises au point, sans justifier leur pertinence ni exhiber des classes de problèmes qu'elles permettent de résoudre. De plus, sous prétexte d'exercer les élèves à utiliser ces algorithmes, on leur soumet des listes de calculs à effectuer hors de tout contexte. Ces pratiques conduisent inévitablement à faire percevoir les mathématiques comme un ensemble de procédures vides de sens, fournissant des réponses vides de sens à des questions vides de sens.

Dans cette recherche, comme dans les précédents travaux du CREM, on a tenté de donner du sens aux activités mathématiques proposées. Pour rendre un certain plaisir d'apprendre aux élèves démotivés, nous avons travaillé sur quatre registres:

- les mathématiques au quotidien;
- les récréations mathématiques;
- l'histoire des mathématiques;
- les réalisations artistiques.

Suivant la tradition du CREM, la scolarité est envisagée dans son ensemble, de la maternelle jusqu'à 18 ans. Il s'agit d'un travail de synthèse, qui dégage des fils conducteurs soulignant les étapes successives de l'apprentissage des mathématiques, tant sur le plan de la numération (calcul, formalisation) que sur celui de la manipulation de figures, d'objets géométriques (symétries, structures, ...).

Dans le cadre de cet atelier, nous allons illustrer deux des moyens préalablement cités: l'histoire et les réalisations artistiques. L'enseignement traditionnel – en tout cas, ici en Belgique – exhibe rarement ces aspects culturels des mathématiques.

2 Le recours aux sources historiques

2.1 L'apport de l'histoire

Nombreux sont ceux qui pensent que le rôle de l'histoire dans le cours de mathématiques est multiple. Citons par exemple, le courant représenté par le regretté John Fauvel.

En premier lieu, une approche historique contribue à faire connaître les apports des différentes cultures à l'évolution des mathématiques. L'histoire des sciences est trop souvent négligée dans le cours d'histoire. Or, l'influence des connaissances scientifiques égyptienne, mésopotamienne, indienne, arabe, ... et du rationalisme mathématique grec a été prépondérante dans la construction de notre mode de pensée occidental.

Par ailleurs, les obstacles épistémologiques que doit franchir l'élève sont souvent ceux-là mêmes qui ont posé problème dans le passé. Contrairement à une idée que défendait la « mathématique moderne », on a compris aujourd'hui qu'on n'enseigne pas directement des notions abstraites dans leur forme définitive, telles qu'elles sont publiées[1]. Elles doivent mûrir, muter, et cela, l'histoire encore le montre fort bien.

Lorsque l'élève assiste à la naissance d'un concept au travers des circonstances dans lesquelles celui-ci apparaît et se développe, il perçoit mieux le côté profondément humain des

[1] Comme le dit H. Freudenthal, « Aucune idée mathématique n'a jamais été publiée telle qu'elle fut découverte ».

mathématiques ainsi que leur utilité. L'histoire permet ainsi d'observer les mécanismes qui mettent en marche la pensée mathématique.

Ajoutons encore qu'il y a un certain réconfort pour l'élève à resituer ses propres difficultés dans une continuité historique: d'autres avant lui ont dû faire face à des problèmes, affronter des défis; ils ont obtenu des résultats...

Dans notre recherche, l'apport de l'histoire est illustré à travers des activités sur la numération (des débuts jusqu'aux nombres irrationnels), sur l'introduction à la trigonométrie et sur la résolution des équations. C'est ce dernier point qui va être développé dans l'atelier. Il s'agit de faire découvrir la formule de résolution de l'équation du deuxième degré à partir d'un extrait du texte d'al-Ḫwārizmī sur le *calcul par le ǧabr et la muqābala*, généralement considéré comme le texte fondateur de l'algèbre.

2.2 Découverte de la formule de résolution de l'équation du deuxième degré à travers un extrait du texte d'al-Ḫwārizmī

Ne disposant pas des nombres négatifs ni du nombre zéro, al-Ḫwārizmī a classé les équations de degré au plus deux en six types, dont il donne et démontre la formule de résolution. L'extrait proposé explique la méthode pour l'équation du type $ax^2 + bx = c$.

Notre traduction est très fidèle, nous avons seulement jugé utile d'ajouter entre <> les mots <carrée> et <ce cinq> qui ne figurent pas dans le texte arabe. Pour éviter toute confusion entre le « carré x^2 » et le « carré figure géométrique », nous avons délibérément choisi de garder le terme arabe *māl*, qui désigne x^2, au lieu de le traduire.

L'activité en classe commence par une lecture commentée de ce texte, dans lequel al-Ḫwārizmī donne de l'algorithme qu'il a décrit précédemment, deux démonstrations qui s'appuient sur deux figures différentes. La première démonstration proposée, qui n'est pas reproduite ici, intervient dans l'espace noté [...] entre les deux paragraphes. C'est la deuxième approche, basée sur la figure la plus simple, qui est proposée en lecture aux élèves.

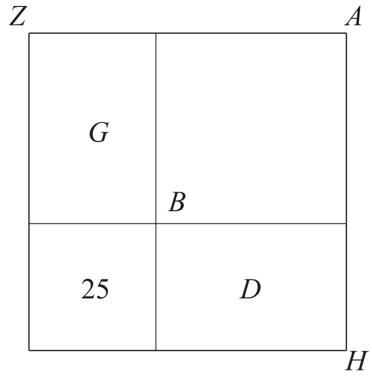
Démonstration du cas « un māl et dix de ses racines égalent trente-neuf dirhams. »

La figure pour expliquer ceci est une surface ¡carrée¿ dont les côtés sont inconnus. Elle représente le *māl* qu'on veut connaître ou dont on veut connaître la racine. C'est la surface $\overline{AB}$, dont chaque côté peut être considéré comme une de ses racines; et si on multiplie un de ces côtés par un nombre quelconque, alors le résultat obtenu peut être considéré comme le nombre des racines qui sont ajoutées à la surface. [...]

Mais il y a aussi une autre figure qui mène à ce résultat, et c'est la surface <carrée> $\overline{AB}$ qui représente le *māl*. Nous voulons lui ajouter l'équivalent de dix de ses racines. Nous avons pris la moitié de ces dix, c'est-à-dire cinq. Nous avons transformé ceci en deux surfaces $\overline{G}$ et $\overline{D}$ sur les flancs de la première surface. La longueur de chacune de ces deux surfaces devient cinq, qui est la moitié des dix racines, et la largeur est comme le côté de la surface $\overline{AB}$. Il nous reste le carré dans l'angle[2] de la surface $\overline{AB}$, et c'est cinq par cinq, et <ce cinq> est la moitié des racines que nous avons ajoutées sur les flancs de la première surface.

Nous savons donc que la première surface est le *māl*, et que les deux surfaces qui sont sur ses deux flancs sont les dix racines. Tout cela vaut trente-neuf, et il reste, pour compléter la surface la plus grande, le carré cinq par cinq, soit vingt-cinq.

Nous l'avons ajouté à trente-neuf pour que la surface la plus grande se complète, c'est la surface $\overline{ZH}$, et tout cela vaut soixante-quatre. Nous prenons sa racine, huit, et c'est l'un des côtés de la surface la plus grande. Si on lui retranche l'égal de ce que nous lui avons ajouté, à savoir cinq, il reste trois. C'est le côté de la surface $\overline{AB}$, qui est le *māl*, et c'est sa racine. Et le *māl* est neuf. Voici sa figure.



La découverte de la formule de résolution de l'équation du deuxième degré se fera en trois étapes, à partir de ce texte accompagné du dessin.

Analyse du texte

On demande aux élèves de transposer les explications fournies par le texte en utilisant le symbolisme mathématique actuel et de compléter la figure en y reportant les mesures des côtés et des aires des carrés et des rectangles.

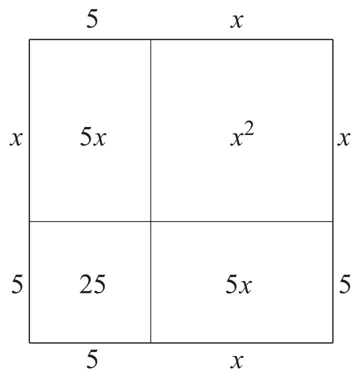
La lecture du texte appelle quelques commentaires. Le terme *māl* signifie le bien, l'argent, la richesse, le capital, la fortune, le troupeau… Dans l'algèbre rhétorique, ce mot désigne la quantité qui a une racine. En fait on recherche X le *māl* et $\sqrt{X}$ le *ǧiḏr* qui est sa racine, et non une inconnue x et son carré x^2. Quant à l'expression *trente-neuf dirhams*, elle désigne une quantité positive connue, qui n'est ni un nombre de carrés, ni un nombre de racines. C'est ce que nous appelons aujourd'hui le terme indépendant. L'équation à résoudre est donc

$$X + 10\sqrt{X} = 39 \qquad \text{ou} \qquad x^2 + 10x = 39.$$

La première forme est plus proche de l'esprit du texte arabe, mais nous lui substituons la seconde, mieux adaptée au travail à effectuer avec les élèves.

C'est le recours au dessin qui montre clairement pourquoi l'auteur recommande de diviser en deux le nombre des racines (10 dans l'exemple choisi), le terme $10x$ de l'équation étant obtenu par l'adjonction au carré de deux rectangles de $5x$ chacun. AL-ḪWĀRIZMĪ insiste sur le fait que la longueur cinq de chacun des deux rectangles est la moitié du nombre des racines. C'est cette précision qui va permettre de passer du cas particulier, où on ajoute dix racines, au cas général, où on ajoute un nombre quelconque de racines.

$$\begin{aligned}
x^2 + 10x &= 39\\
x^2 + 10x + 25 &= 39 + 25\\
x^2 + 10x + 25 &= 64\\
(x+5)^2 &= 64\\
(x+5) &= 8\\
x &= 8 - 5\\
x &= 3
\end{aligned}$$



---

[2]Littéralement, « le carré des angles de la surface $\overline{AB}$ ».

Après avoir complété le dessin, comme on le voit dans la figure ci-dessus, les élèves sont en mesure de transposer, sous forme d'équations, les opérations décrites dans le dernier paragraphe.

Pour les mathématiciens de l'époque, qui ne concevaient pas les quantités négatives en tant que nombres, la seule valeur dont le carré vaut 64 est 8. Dans le contexte actuel, nous considérons aussi la valeur -8, ce qui nous permet de compléter la résolution d'AL-ḪWĀRIZMĪ. Dans le domaine des nombres positifs et négatifs, l'équation $(x+5)^2 = 64$ est équivalente à

$$x + 5 = 8 \qquad \text{ou} \qquad x + 5 = -8,$$

ce qui donne les solutions

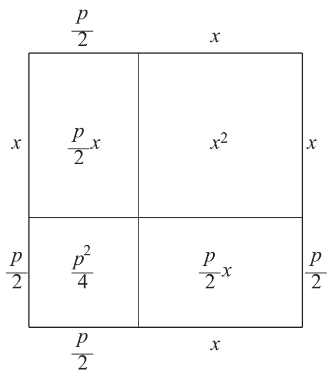
$$x = 3 \qquad \text{ou} \qquad x = -13.$$

DE L'EXEMPLE À L'ALGORITHME

L'étape suivante consiste à se dégager de l'exemple numérique, à franchir un pas vers l'abstraction. On demande aux élèves de recommencer le même raisonnement pour l'équation $x^2 + px = q$ (où p et q sont ce que nous appelons aujourd'hui des rationnels positifs).

Il s'agit donc de remplacer 10 par p, 5 par $\dfrac{p}{2}$ et 39 par q. Les calculs littéraux qui s'ensuivent mènent à une première formule.

$$\begin{aligned}
x^2 + px &= q \\
x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\
\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\
\left(x + \frac{p}{2}\right) &= \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \\
x &= -\frac{p}{2} + \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}
\end{aligned}$$



Complétons à nouveau la résolution en ajoutant la racine carrée négative de $q + \left(\dfrac{p}{2}\right)^2$.

L'équation $(x + \dfrac{p}{2})^2 = q + \left(\dfrac{p}{2}\right)^2$ est équivalente à

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \qquad \text{ou} \qquad x + \frac{p}{2} = -\sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2},$$

ce qui donne les solutions

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \qquad \text{ou} \qquad x = -\frac{p}{2} - \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}.$$

En fait, nous avons obtenu une formule générale de résolution de l'équation de deuxième degré $x^2 + px = q$. En effet, alors que la démonstration géométrique ne s'applique qu'aux seuls cas où p et q sont strictement positifs, le développement algébrique, qui consiste à compléter le membre de gauche pour obtenir un carré parfait, peut être effectué avec n'importe quelle valeur de p et q.

La formule actuelle

Dans la troisième étape, il reste à dégager la formule qui donne la solution de l'équation sous la forme générale utilisée actuellement, à savoir $ax^2+bx+c=0$. Les élèves doivent modifier les résultats obtenus pour exprimer les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ en fonction des coefficients a, b et c, où a est non nul. Nous avons supposé a non nul de manière à ce que l'équation ne soit pas réduite à une équation de premier degré. Dans ce cas, nous pouvons diviser tous les termes par a, ce qui donne

$$x^2+\frac{b}{a}x=\frac{-c}{a},$$

forme facilement comparable à

$$x^2+px=q.$$

Les élèves verront qu'il suffit de remplacer p par $\frac{b}{a}$ et q par $\frac{-c}{a}$. On leur demande d'effectuer cette transformation de formule:

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q} \qquad \text{devient} \qquad x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}.$$

En réduisant au même dénominateur, ils obtiennent

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \qquad \text{et finalement} \qquad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Cette unique formule nous permet de résoudre toute équation du type $ax^2+bx+c=0$, avec des coefficients a, b et c positifs ou négatifs, b et c éventuellement nuls.

On remarquera que le nombre de solutions dépend du signe de l'expression b^2-4ac, habituellement notée Δ,

si $\Delta>0$, il y a deux racines réelles distinctes,

si $\Delta=0$, il y a une seule racine qui vaut $\frac{-b}{2a}$,

si $\Delta<0$, il n'y a pas de racine réelle.

Prolongements

Si les élèves manifestent un certain intérêt pour la manière dont les Arabes résolvaient les équations de types autres que celui dont il est question dans le texte, le professeur peut compléter leur information historique.

al-Ḫwārizmī classe les équations de degré inférieur ou égal à 2 en six types dont trois sont des équations trinômes, puis il les réduit à leur forme normale, où le coefficient de la plus haute puissance de x vaut 1. Il établit ensuite les algorithmes de résolution des différents cas. Il obtient des formules équivalentes aux expressions reprises dans le tableau suivant.

type	équation	solution
(1)	$x^2+px=q$	$x=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}$
(2)	$x^2=px+q$	$x=\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}$
(3)	$x^2+q=px$	$x=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$

Dans le dernier cas (3), il précise:

si $\left(\frac{p}{2}\right)^2<q$, « alors le problème est impossible »,

si $\left(\frac{p}{2}\right)^2=q$, « alors la racine du carré est égale à la moitié du nombre des racines, exactement, sans aucune addition ni soustraction ».

Ce dernier passage fait état d'une connaissance complète du calcul et des conditions d'existence des *racines positives* d'une équation du deuxième degré.

Pour faire comprendre ces formules, le professeur propose quelques équations bien choisies, par exemple celles qui figurent dans le tableau ci-après, et donne des consignes précises.

> Pour chacune de ces équations:
>
> résoudre l'équation par la formule générale,
>
> écrire l'équation sous la forme normale d'AL-ḪWĀRIZMĪ, identifier à quel type elle appartient et la résoudre par la formule adéquate,
>
> reprendre les résultats dans un tableau qui permette une comparaison aisée.

Cette activité, qui fournit aux élèves des exercices de fixation des formules, permet en outre de dresser un tableau comparatif très éclairant. Celui-ci montre bien que les formules énoncées par AL-ḪWĀRIZMĪ permettent de calculer toutes les solutions positives, quel que soit leur nombre. Notre formule actuelle donne, en plus des solutions positives, les solutions négatives éventuelles.

On constate en outre que certaines équations ne sont jamais prises en compte dans le traité arabe. Par exemple, l'équation $x^2 + 2x + 1 = 0$ ne se rattache à aucun des types répertoriés. En effet, il est impossible de l'écrire sous une forme où les deux membres ne contiennent que des quantités strictement positives. Cette équation est équivalente à $(x + 1)^2 = 0$, dont la solution est -1, solution qui n'a aucun sens pour les mathématiciens du IX$^{\text{e}}$ siècle. Il en va de même pour les équations $x^2 + 5x + 6 = 0$, $x^2 + 3x = 0$, $x^2 + 4 = 0$, et pour toute équation $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b, c sont tous les trois positifs. De telles équations n'admettent que des solutions négatives ou nulles.

Résolution actuelle		Résolution d'AL-ḪWĀRIZMĪ		
équation	solution	équation	type	solution
$x^2 + x - 2 = 0$	$x = 1,\ x = -2$	$x^2 + x = 2$	(1)	$x = 1$
$x^2 - 2x - 3 = 0$	$x = 3,\ x = -1$	$x^2 = 2x + 3$	(2)	$x = 3$
$x^2 - 2x + 1 = 0$	$x = 1$	$x^2 + 1 = 2x$	(3)	$x = 1$
$x^2 - 5x + 6 = 0$	$x = 2,\ x = 3$	$x^2 + 6 = 5x$	(3)	$x = 2,\ x = 3$
$x^2 - x + 7 = 0$	–	$x^2 + 7 = x$	(3)	–
$4x^2 - 8x + 3 = 0$	$x = \frac{1}{2},\ x = \frac{3}{2}$	$x^2 + \frac{3}{4} = 2x$	(3)	$x = \frac{1}{2},\ x = \frac{3}{2}$
$x^2 + 5x + 6 = 0$	$x = -2,\ x = -3$	–	–	–
$x^2 + 2x + 1 = 0$	$x = -1$	–	–	–

2.3 ÉCHOS DES CLASSES

Tout d'abord, nous avons été invités à présenter, à des élèves de cinquième de l'enseignement général (environ 16 ans), un exposé sur les méthodes de résolution des équations des deuxième et troisième degrés chez les auteurs arabes.

Bien sûr, l'expérience s'est déroulée dans des circonstances assez différentes de celles que nous préconisons, puisque le groupe comportait une centaine d'élèves, et que ceux-ci connaissaient déjà la formule de l'équation du deuxième degré. Il ne s'agissait donc plus de découvrir la formule, mais plutôt de la redécouvrir dans un autre contexte. Les professeurs ont assuré le suivi de cet exposé dans leurs classes et nous ont communiqué les réactions les plus significatives.

Les élèves se sont montré très intéressés par l'aspect culturel permettant de faire le lien entre la situation géographique, les contextes historique, politique et religieux et les démarches scientifiques des « savants » de l'époque. Certains d'entre eux ont décidé d'approfondir le sujet dans le cadre d'un travail de fin d'études. Ils ont apprécié de recevoir, par le biais du cours de mathématiques, des informations qui éclairent sous un jour différent des problèmes d'actualité comme la situation au Moyen-Orient, la guerre en Irak. . .

Ces élèves étaient manifestement peu habitués à établir des passages entre l'algèbre et la géométrie. Le recours à des raisonnements géométriques pour résoudre des équations leur a paru surprenant. Ils ont pris conscience que le décloisonnement entre les différentes branches des mathématiques permet de varier les approches d'un problème et d'élargir le choix des modes de raisonnement pour le résoudre. Certains se sont inquiétés de savoir « depuis quand on séparait les maths ».

Ils sont étonnés d'apprendre que les méthodes de résolution des équations sont le fruit d'une longue évolution, qu'on n'a pas toujours procédé comme on le fait maintenant. La résolution algébrique formalisée dont nous disposons actuellement leur paraît un progrès sur le plan pratique, par rapport à « l'algèbre rhétorique ».

Par la suite, nous avons eu l'occasion de tester l'activité de découverte de la formule, telle qu'elle est présentée dans ce chapitre, dans de nombreuses classes de quatrième de l'enseignement général (environ 15 ans).

Dans certaines classes, les élèves avaient manifesté de l'intérêt pour une approche historique d'un sujet mathématique; dans l'autre, ils étaient plus réticents. Malgré cette différence d'attitude *a priori*, l'expérience a été chaque fois plutôt positive. Les disparités entre les classes n'ont pas été perçues lors de l'analyse du texte; elles se sont manifestées uniquement dans l'aisance à exécuter des calculs formels.

Après un exposé relativement bref, d'une dizaine de minutes environ, destiné à situer l'ouvrage d'AL-H̱WĀRIZMĪ dans son cadre géographique, historique et culturel, les élèves ont été invités à lire le texte et à transposer les explications sous forme graphique (compléter le dessin) et algébrique.

Ce travail, réalisé collectivement, n'a pas posé problème aux élèves qui avaient déjà été familiarisés avec l'aspect géométrique des produits remarquables. Nous leur avons alors demandé de reproduire le même raisonnement pour résoudre l'équation $x^2+px=q$, en suivant les indications suggérées dans le texte pour passer de l'équation particulière $x^2+10x=39$ à cette forme plus générale. Nous avons remarqué à cette occasion que certains élèves n'étaient pas capables de franchir le pas vers une forme plus abstraite à ce stade de l'activité. Nous avons donc jugé opportun de leur soumettre une autre équation particulière ($x^2+8x=65$), qu'ils devaient résoudre seuls avant de généraliser.

Dans les classes, cette consigne a suscité deux types de comportements. Certains élèves ont réalisé un nouveau dessin pour servir de support au raisonnement algébrique; d'autres ont travaillé directement sur l'équation, en ajoutant aux deux membres la quantité adéquate pour obtenir, dans le membre de gauche, le développement d'un carré parfait. De nombreux élèves sont arrivés seuls au bout des calculs littéraux, mais nous avons dû remettre sur rail ceux qui avaient ajouté p^2 au lieu de $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ pour compléter le carré. Il a aussi fallu intervenir pour éviter quelques simplifications erronées de l'expression $\sqrt{q+\left(\frac{p}{2}\right)^2}$, ainsi que pour obtenir la deuxième racine.

L'élaboration de la formule pour l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a posé que des problèmes calculatoires aux élèves les plus faibles. La séquence d'apprentissage s'est terminée par la résolution d'une série d'équations, en l'occurence celles qui figurent dans le tableau de la page 243. Seuls les élèves les plus rapides se sont intéressés à établir une comparaison avec la solution qu'aurait obtenue AL-ḪWĀRIZMĪ.

À l'issue des deux heures de cours consacrées à l'expérimentation, les élèves disposaient de la formule, en avaient compris la démonstration, et étaient capables de l'utiliser pour résoudre des équations; l'objectif fixé avec le professeur était ainsi atteint. Nous avions par ailleurs relevé d'autres enjeux liés à cette activité:

- donner du sens aux développements algébriques en les confrontant à une représentation géométrique,
- montrer que les systèmes de notation et la pensée formelle ont été introduits très lentement et beaucoup plus tardivement qu'on ne l'imagine souvent,
- faire comprendre que l'élaboration d'une notation appropriée peut être très utile et par là même, assurer une meilleure appréhension du symbolisme actuel.

Ce dernier point surtout nous a paru important. La perception que les élèves ont du symbolisme algébrique évolue radicalement au cours de cette activité. Au lieu de le voir comme un langage difficile et abstrait qui leur est imposé, ils en comprennent soudain le côté « pratique » par comparaison avec la lourdeur d'expression de l'algèbre rhétorique. C'est tout naturellement qu'ils transposent les phrases du texte en équations, parce que « c'est tout de même plus facile à dire avec les maths. »

3 Les réalisations artistiques

3.1 L'apport de l'art

Les liens entre mathématiques et art, en peinture, architecture, musique, ... sont nombreux. En particulier, les réalisations artistiques de nature géométrique, dont on retrouve des exemples dans toutes les civilisations et à toutes les époques, peuvent servir de support à l'apprentissage de la géométrie. On peut exploiter les peintures murales dans l'art africain, les zelliges de l'art hispano-musulman, mais aussi les pavages qui décorent les cuisines et les salles de bain, les frises qui ornent la vaisselle et le linge de maison...

Par des activités alliant le côté créatif à l'analyse des structures mathématiques, il est possible de stimuler le besoin de comprendre par le désir de créer. Un tel apprentissage développe l'intuition et aiguise le sens de l'observation, tout en procurant à la fois une satisfaction intellectuelle et un plaisir esthétique. La géométrie, qui a souvent été cantonnée à l'enseignement du raisonnement logique et de la méthode hypothético-déductive, montre ainsi tout son attrait visuel et l'un de ses rôles fondamentaux, l'organisation et la structuration de l'espace.

Pour certains élèves de l'enseignement technique ou professionnel, la motivation à la pratique d'activités géométriques peut être directement liée au travail en atelier. L'apprentissage peut encore être enrichi par l'utilisation de logiciels de dessin. C'est l'occasion d'un premier contact avec le DAO[3], un des nombreux domaines où mathématiques, techniques et arts se rencontrent.

Élaborer des techniques de production de frises et de pavages sont des activités que l'on peut déployer à tous âges, de l'école primaire à la fin du secondaire, et qui développent des compétences multiples.

[3]Dessin assisté par ordinateur.

Les frises, en particulier, sont une source inépuisable de situations d'apprentissage qui peuvent être exploitées à différents niveaux de la scolarité. L'immense diversité de ces bandes décorées, que l'on rencontre un peu partout, incite à les répertorier, les classer, en dégageant des structures communes à des objets apparemment très différents. La structure de groupe qui émerge tout naturellement dans ce cadre géométrique, à partir des groupes de symétries, peut être dégagée dans les classes plus avancées de l'enseignement général. C'est ce thème qui est développé dans l'atelier.

3.2 Les frises: de la symétrie aux structures

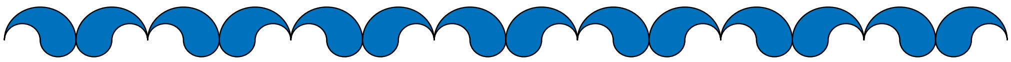
Le propos est de montrer que les frises permettent de travailler la géométrie des transformations à plusieurs niveaux d'abstraction, relevant de différents aspects de la pensée géométrique.

Intuition (observation, analyse, compréhension)

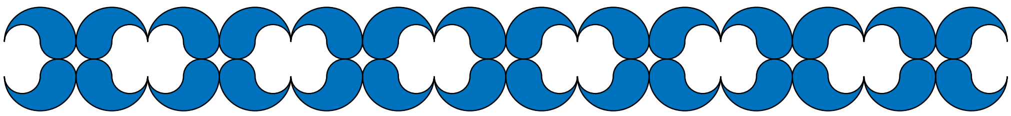
Une première phase d'observation révèle sans trop de peine qu'une frise est un décor sur bande et que ce décor est obtenu par reproduction d'un « motif de base » qui se répète tout au long de la bande.

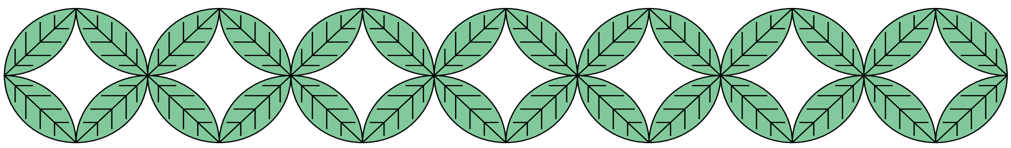
Une activité avec des frises de papier et leurs photocopies sur transparents permet de travailler la notion d'infini dans un contexte géométrique. À partir d'un certain nombre de frises de gouttes comme celle-ci,

photocopiées sur transparents, on peut faire découvrir de nouvelles frises aux élèves, leur demander d'identifier les mouvements qui permettent de fabriquer ces nouvelles frises à partir du matériel et finalement d'y associer l'isométrie correspondante.



Par la suite, des ressemblances de structure entre des frises différentes construites en utilisant les mêmes mouvements (à partir des mêmes symétries) seront mises en évidence.





Classement (raisonnement, conjecture, justification, démonstration)

Les frises sont répertoriées en fonction des isométries qui les conservent globalement. On adopte une définition plus précise:

une frise est une bande décorée invariante par les translations d'une famille infinie de translations, toutes multiples d'une translation minimale.

Les élèves doivent prendre conscience que l'invariance par translation implique le caractère infini de la frise. Ils identifient les mouvements susceptibles d'appliquer une frise sur elle-même:

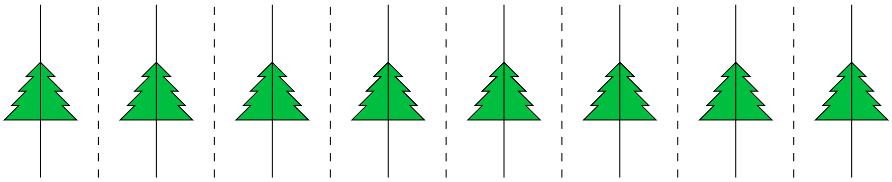
1. des translations dans la direction de la bande,
2. une symétrie d'axe médian,
3. des symétries d'axes perpendiculaires à la direction de la bande,
4. des symétries centrales dont le centre est sur l'axe médian.

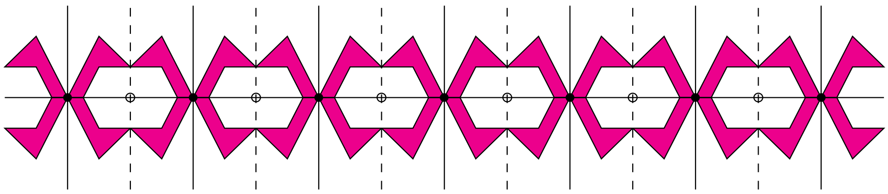
En ajoutant à cette liste les composées des isométries ainsi répertoriées, les élèves rencontrent la symétrie glissée.

Pour réaliser le classement, on leur demande de trouver parmi une collection de frises celles qui sont invariantes pour

- uniquement des translations;
- des translations et un seul type de symétries;
- des translations et plusieurs types de symétries.

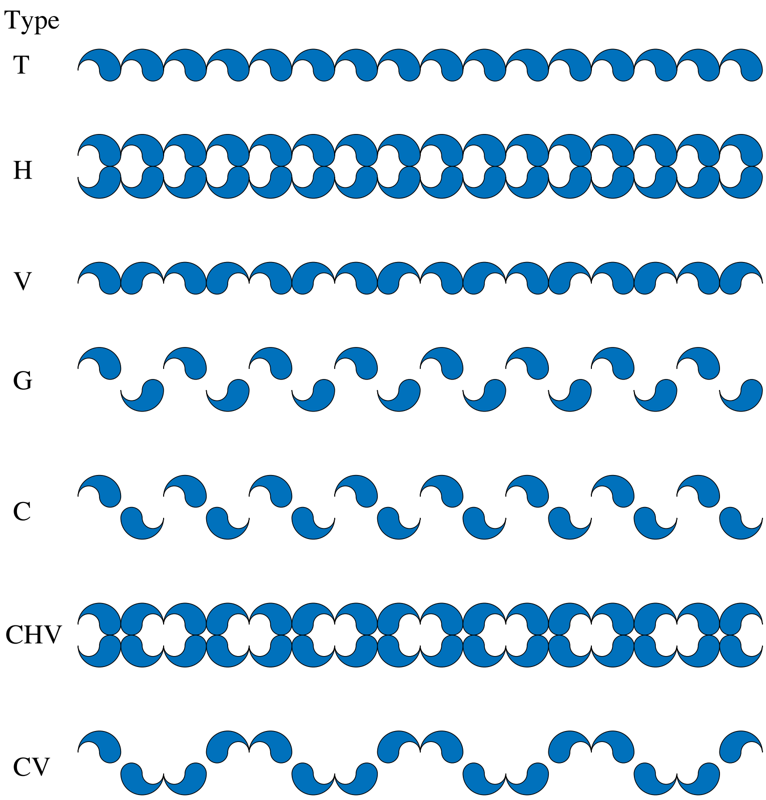
Tout en effectuant ce travail de classement, on démontre quelques propriétés de la composition des isométries. Par exemple, la première des deux figures ci-après se prête à la découverte de la composée de deux symétries d'axes parallèles, la seconde à la composée de deux symétries d'axes perpendiculaires. On y découvre aussi les composées des symétries avec des translations ou avec des demi-tours.





On en arrive ainsi à classer les frises en 7 types et à se convaincre qu'il n'y en a pas d'autres.

Sept types de frises

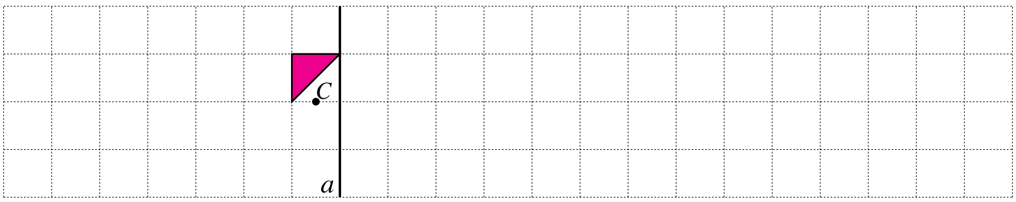


Les frises de type **T** sont invariantes par translations seulement; celles de type **H**, **V**, **G**, **C** sont invariantes par symétries d'axe horizontal, d'axes verticaux, par symétries glissées, par symétries centrales (outre les translations). Les frises des types **CHV** et **CV** sont invariantes par plusieurs symétries différentes. Les élèves complètent un tableau récapitulatif en indiquant les isométries qui conservent les frises de chaque type.

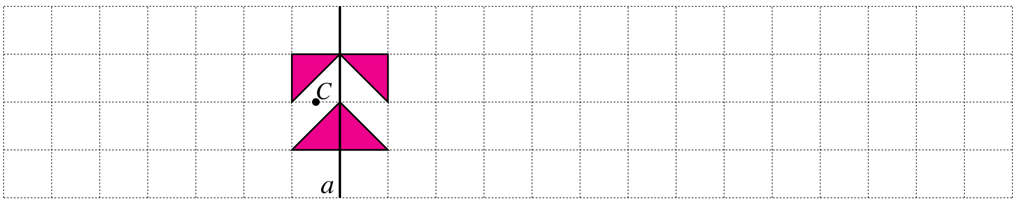
Type	Translations	Symétrie d'axe horizontal	Symétries d'axe vertical	Symétries centrales	Symétries glissées
T	×				
H	×	×			×
V	×		×		
G	×				×
C	×			×	
CHV	×	×	×	×	×
CV	×		×	×	×

STRUCTURATION

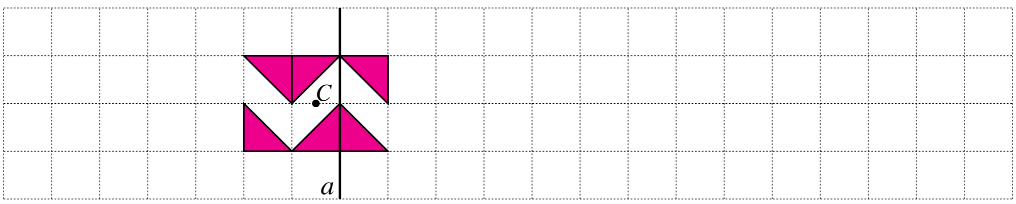
La structure de groupe est introduite à partir des ensembles d'isométries qui conservent chaque type de frise. Ces groupes sont infinis mais peuvent être engendrés par composition d'une, deux ou trois isométries (génératrices) bien choisies. À titre d'exemple, montrons comment on peut engendrer le groupe $\mathcal{CV}$ des frises du type **CV**. Les élèves sont invités à compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie de centre C et par la symétrie s_a d'axe a.

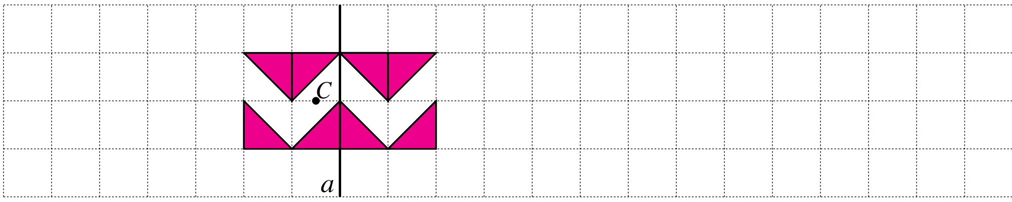


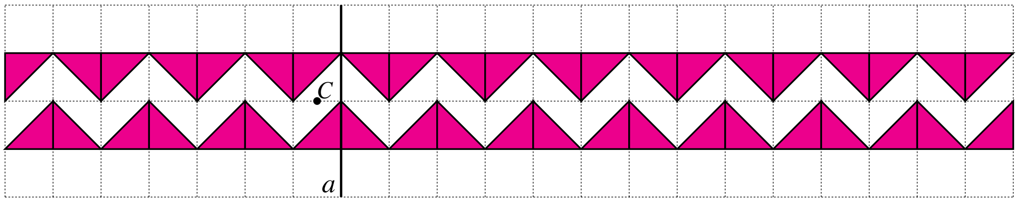
On complète tout d'abord la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie centrale s_C, puis par la symétrie s_a d'axe a,



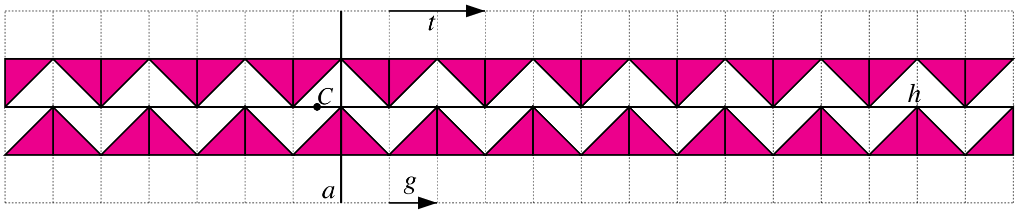
et on recommence indéfiniment en alternant les symétries s_C et s_a, jusqu'à l'obtention de la frise des figures suivantes.







Ajoutons sur la figure l'axe médian h, la translation de glissement g et la translation t. La symétrie glissée $s_g = s_h \circ g = g \circ s_h$ applique la frise sur elle-même, ainsi que la translation $t = s_g^2$.



On a $s_g = s_a \circ s_C$, ce qui permet de conclure que $\mathcal{CV} =< s_C, s_a >$:

- par la composition de s_a et s_C, on obtient la symétrie glissée s_g,
- les symétries glissées sont obtenues comme puissance à exposant impair de s_g,
- les translations kt sont obtenues comme puissance à exposant pair de s_g,
- les symétries d'axe vertical sont obtenues par composition de s_a avec les translations,
- les symétries centrales sont obtenues par composition de s_C avec les translations.

C'est l'occasion, pour les élèves de ces classes, de rencontrer une idée fondamentale de la géométrie moderne: on n'étudie plus les figures dans l'espace, mais les figures considérées comme des espaces, c'est-à-dire des ensembles organisés, structurés.

Références

– al-Ḫwārizmī, sans date, *The Algebra of Mohammed ben Musa*, Hildesheim : G. Olms. Ed. and translated by F. Rosen. Rééd. 1986.

– Ballieu, M., 2001, "Quelques « étapes » de l'histoire des mathématiques dans les pays arabes", *Mathématiques et Pédagogie*, 131: 5–24.

– Bishop, A. J., 1988, *Mathematical Enculturation*, Dordrecht : Kluwer.

– CREM, 2004, *Pour une culture mathématique accessible à tous. Élaboration d'outils pédagogiques pour développer des compétences citoyennes*, M. Ballieu et M. F. Guissard coordinateurs, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques : Nivelles.

– Culus, C., Persoens, C., 1995, *Les transformations dans le secondaire inférieur*, Document pédagogique, UREM, Université Libre de Bruxelles, Campus Plaine CP216, Bld Triomphe, B1050 Bruxelles.

– de Vecchi, G., 1992, *Aider les élèves à apprendre*, Paris : Hachette.

– de Vecchi, G., Carmona-Magnaldi, N., 1996, *Faire construire des savoirs*, Paris : Hachette.

– Deledicq, A., 1993, "Le monde des symétries", in *Collection Maths pour tous*, Paris : ACL-Éditions.

– Djebbar, A., 1988, "Quelques aspects de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe d'orient", in *Actes de l'Université d'été,* IREM de Toulouse, pages 259–286.

– Elkhadem, H., 1997, *La transmission des connaissances scientifiques au Moyen-Âge entre l'Orient et l'Occident*, Les Cahiers du CeDoP, Histoire des sciences et de la civilisation arabes. Centre de documentation pédagogique de l'Université Libre de Bruxelles, avenue Jeanne 44, 1050 Bruxelles.

– Fauvel, J., van Maanen, J., (éditeurs), 2000, *History in Mathematics Education, The ICMI Study*, Dordrecht–Boston–London : Kluwer.

– Freudenthal, H., 1983, *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Dordrecht : D. Reidel.

– Høyrup, J., 1992, "« Algèbre d'Al-ǧabr » et « algèbre d'arpentage » au neuvième siècle islamique et la question de l'influence babylonienne", in F. Mawet et Ph. Talon (éditeurs), *D'Imhotep à Copernic, Actes du colloque international, Université Libre de Bruxelles, 3–4 novembre 1989*, pages 23–38, Leuven : Peeters.

– Joseph, G. G., 1994, *The Crest of the Peacock (Non-European Roots of Mathematics)*, London : Penguin Books.

– Klein, F., 1872, *Le programme d'Erlangen (Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes)*, Paris : Jacques Gabay, rééd. 1991.

– Mahammed, N., 1995, *Sur la résolution des équations algébriques*, IREM de Lille.

– Martin, G. E., 1982, *Transformation Geometry, An Introduction to Symmetry*, New York : Springer.

– Sesiano, J., 1999, *Une introduction à l'histoire de l'algèbre*, Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes.

– Wittmann, E. C., Müller, G., 1990, 1994, *Handbuch produktiver Rechenübungen*, 2 vol., Stuttgart : Ernst Klett.

Pour une culture mathématique accessible à tous. Élaboration d'outils pédagogiques pour développer des compétences citoyennes est un ouvrage collectif dont les auteurs sont Michel Ballieu, Jean-Michel Delire, Marie-France Guissard, Amélie Jonkers, Philippe Mairesse, Bénédicte Mestag, Jules Miéwis, Laure Mourlon Beernaert, Jacques Vandekerckhove et Françoise Van Dieren.

Le texte de cette recherche est disponible sur Internet à l'adresse
http://www.enseignement.be/prof/dossiers/recheduc/rech1.asp
en introduisant le mot-clé « mathématiques ».