Conq Coutbes Avec Leur Histoire: la Quadratrice, la Spirale, la Conchoïde, la Cissoïde et la Cycloïde

Carlos CORREIA DE SÁ

Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Centro de Matemática da Universidade do Porto, Portugal

csa@fc.up.pt

Abstract

L'atelier comporte l'étude de cinq courbes historiquement importantes (la Quadratrice d'Hippias et Dinostrate, la Spirale d'Archimède, la Conchoïde de Nicomède, la Cissoïde de Dioclès et la Cycloïde de Roberval) et la résolution de plusieurs problèmes géométriques au moyen de ces courbes. Les activités de l'atelier sont soutenues par la lecture de textes historiques au contenu mathématique. Je disponibilise une colléction abondante de textes, dont on choisit ceux qui seront lus en atelier, selon les goûts et les préférences des assistants.

Pour les quatre premières courbes, je fournis des textes d'Archimède, de Dioclès, de Pappus, de Proclus et d'Eutocius. Nous voyons les problèmes géométriques auxquels ces textes sont liés et comment ces courbes permettent de les résoudre.

Nous prenons contact avec les propriétés de la cycloïde à travers un texte de Roberval concernant le tracé des tangentes. Puis je propose de voir comment une cycloïde nous permet, elle aussi, de quadrer un cercle et de trissecter un angle.

Les textes utilisés sont les suivants.

Pour la Quadratrice:

- Pappus d'Alexandrie, *Colléction Mathématiques* IV, 30.
- Proclus de Lycie, *Commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide* (commentaire à la proposition I, 9 des *Éléments* d'Euclide).

Pour la Spirale:

- Archimède, *Des Spirales*, définitions, propositions 12, 14 et (18).

Pour la Conchoïde:

- Pappus d'Alexandrie, *Colléction Mathématiques* IV, 32.
- Eutocius d'Ascalon, *Commentaire sur le traité de la Sphère et du Cylindre* II (commentaire sur la synthèse de la proposition 1 — solution à la manière de Nicomède dans son livre sur les Lignes Conchoïdes).

Pour la Cissoïde:

- Dioclès, *Les Miroirs Ardents*, propositions 11, 12, 13, 14 et 15.
- Eutocius d'Ascalon, *Commentaire sur le traité de la Sphère et du Cylindre* II (commentaire sur la synthèse de la proposition 1 — solution à la manière de Dioclès dans son livre sur les Miroirs Ardents).

Pour la Cycloïde:

- Gilles Personne de Roberval, *Observations sur la Composition des Mouvements et sur les Moyens de trouver les Tangentes aux Lignes Courbes* (problème 1 — Onzième exemple de la Roulette ou Trochoïde de M. de Roberval).

J'utilise les suivantes traductions en français des textes grecs, latins et arabes:

Rashed, R., 2002, *Les Catoptriciens Grecs*, tome 1, *Les miroirs ardents.* Paris.

Ver Eecke, P., *Proclus de Lycie — Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide.* Bruges, 1948.

Ver Eecke, P., *Les Oeuvres Complètes d'Archimède, suivies des commentaires d'Eutocius d'Ascalon*, 2 volumes, Paris, 1960.

Ver Eecke, P., *Pappus d'Alexandrie — La Collection Mathématique*, 2 volumes, Paris, 1982.

Introduction

Le but de cet atelier est de suggérer des exercices de géométrie qu'on peut résoudre par l'intermédiaire de cinq courbes historiquement importantes: la *quadratrice* d'Hippias et de Dinostrate, la *spirale* d'Archimède, la *conchoïde* de Nicomède, la *cissoïde* de Dioclès et la *cycloïde* de Roberval. La lecture de textes historiques au contenu mathématique nous transmet le contexte de l'invention de ces courbes et les problèmes géométriques qui leur étaient associés. Mais il ne s'agit pas d'un atelier d'histoire des mathématiques, car les exercices suggérés dépassent beaucoup les cas enregistrés dans les documents historiques. L'histoire est ici simplement une inspiration pour la création de matériaux didactiques en géométrie.

Les exercices proposés, à l'exception de ceux où l'on demande de construire un angle d'un radian, sont pourtant dans "l'esprit" de l'ancienne géométrie grecque. Outre leur possible utilisation en classe de géométrie, ces exercices aideront, je l'espère, les étudiants de cours universitaires d'Histoire des Mathématiques à se familiariser avec une manipulation correcte des *grandeurs* (même si l'on traduit leurs relations dans une notation moderne au caractère algébrique[1]) et avec les enjeux du concept grec de *problème* géométrique.

La quadratrice d'Hippias et de Dinostrate

La *quadratrice* de Hippias (V$^{\text{e}}$ siècle avant J.–C.) et de Dinostrate (IV$^{\text{e}}$ siècle avant J.–C.) peut être décrite par deux mouvements uniformes et synchronisés, l'un rectiligne et l'autre circulaire. Soit un carré $ABCD$ et supposons que le côté BC se déplace parallèlement à lui-même jusqu'à ce qu'il coïncide avec AD, et qu'en même temps le côté AB tourne autour du point A jusqu'à ce qu'il coïncide aussi avec AD; il faut que les deux mouvements commencent au même instant et finissent au même instant. Pendant que les deux droites se meuvent, leur point d'intersection décrit la courbe quadratrice[2].

Puisque le mouvement de BC est uniforme, la hauteur de la bande balayée par ce côté est proportionnelle au temps écoulé dans le parcours. De même, puisque le mouvement de AB est uniforme, l'amplitude de l'angle balayé par ce côté est aussi proportionnelle au temps écoulé dans le parcours. Il y a donc proportionnalité entre la distance rectiligne parcourue par le côté BC et l'amplitude angulaireparcourue par le côté AB:

$$\frac{AF}{AB} = \frac{\operatorname{arc} ED}{\operatorname{arc} BD}$$

Pappus d'Alexandrie (III$^{\text{e}}$–IV$^{\text{e}}$ siècles après J.–C.) présente la quadratrice au chapitre XXX du Livre IV de sa *Collection Mathématique* (Ver Eecke 1933, tome I, page 192). Le chapitre

[1] Je le fais avec le seul but de rendre la lecture plus commode. Toutes les relations entre grandeurs envisagées dans cet atelier pourraient s'exprimer de façon tout à fait rétorique.

[2] La quadratrice peut évidemment àtre prolongée dans les deux sens, en considérant les deux droites illimitées et leurs mouvements éternels. Mais les géomètres anciens ne semblent avoir étudié que cette petite portion de la courbe.

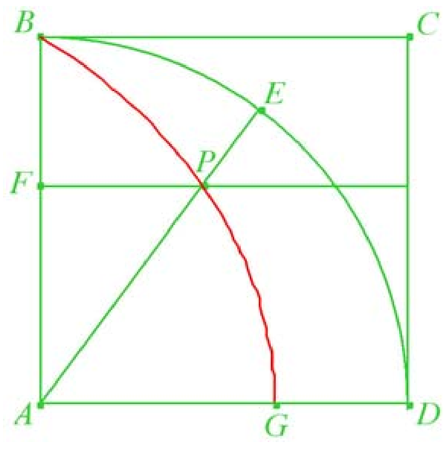

Figure 1

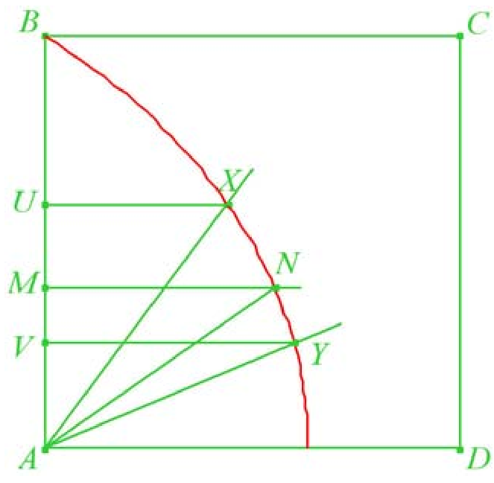

Figure 2

XXXI est consacré d'abord aux objections que Sporos de Nicée (III$^{\text{e}}$ siècle après J.–C.) aurait levées contre la courbe, et puis à son utilisation pour résoudre le problème de la quadrature du cercle. Il me semble plus propre de traiter d'abord la question de la trisection de l'angle, car elle fait appel à ce qu'il y a d'essentiel dans la génération de la courbe. Donc, après la présentation de la quadratrice, je propose de passer aux chapitres XLV–XLVII du même Livre IV (Ver Eecke 1933, tome I, pages 222–225).

Le texte de Pappus associe la courbe de Hippias et Dinostrate à la découpe de l'angle dans un rapport quelconque, et non pas seulement à sa trisection. Mais la courbe permet de résoudre un ensemble encore plus vaste de problèmes. En fait, elle peut être regardée comme une sorte de "dictionnaire bilingue" entre deux univers de grandeurs (au sens grec du terme *grandeur*): celui des amplitudes angulaires et celui des longueurs rectilignes. Si on veut résoudre un problème concernant des amplitudes d'angle (ou d'arc) et si l'on sait résoudre le problème "isomorphe" pour les longueurs, alors on n'a qu'à utiliser la quadratrice pour transformer les données (qui sont des amplitudes) en longueurs, à résoudre le problème pour celles-ci, et enfin à réutiliser la quadratrice pour transformer les objets construits (qui sont des longueurs) en amplitudes[3].

Voyons un exemple qui n'est pas considéré dans la *Collection Mathématique* de Pappus, mais qui pourrait l'être en classe. Soient donnés deux angles rectilignes aigus[4], α, β, et une quadratrice, et soit demandée la moyenne proportionnelle entre α et β. Plaçons ces angles-ci avec leurs sommets sur le point A, un des côtés sur le côté AD du carré associé à la courbe[5] et l'autre côté dans l'intérieur du carré (Figure 2). Soient X et Y les points où ces deux côtés coupent la quadratrice. Tirons par les points X et Y deux droites parallèles au côté AD, soient U et V les points où ces deux parallèles coupent le côté AB du carré, et soient $a = AU$ et $b = AV$. On a évidemment $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{a}{b}$. Or, la question de la moyenne proportionnelle entre deux segments de droite ne pose aucune difficulté dans le cadre de la géométrie élémentaire grecque; c'est le sujet de la proposition 13 du Livre VI des *Éléments* d'Euclide (Euclide 1994, pages 184–186). Construisons donc un segment de droite m qui soit la moyenne proportionnelle entre a et b, c'est-à-dire, tel que $\dfrac{a}{m} = \dfrac{m}{b}$, et soit M le point de

[3]On peut d'ailleurs faire exactement ces màmes observations à propos de la spirale d'Archimède, comme on le verra plus loin.

[4]La restriction que les angles soient aigus est nécessaire parce que la courbe n'est définie que pour des angles DAE plus petits que 1 droit. Si l'on prolonge la quadratrice pour tous les valeurs de l'angle DAE (ce que les géomètres anciens ne font pas), celle restriction-là ne sera plus nécessaire.

[5]On pourrait aussi choisir le côté AB.

AB tel que $m = AM$. Tirons par M une droite parallèle à AD, qui coupe la courbe au point N, et soit $\mu = \angle DAN$. L'angle μ sera la moyenne proportionnelle cherchée.

En effet, $\dfrac{\alpha}{\mu} = \dfrac{a}{m}$ et $\dfrac{\mu}{\beta} = \dfrac{m}{b}$. Mais $\dfrac{a}{m} = \dfrac{m}{b}$. Donc, $\dfrac{\alpha}{\mu} = \dfrac{\mu}{\beta}$, c'est-à-dire, l'angle μ est la moyenne proportionnelle entre α et β.

La courbe de Dinostrate s'appelle *quadratrice* parce qu'elle permet aussi de carrer un cercle. Son nom indique d'ailleurs que les anciens géomètres grecs considéraient ce dernier problème comme bien plus important que celui de la trisection de l'angle.

Dans la proposition 26 (au chapitre XXXI) du Livre IV de la *Collection Mathématique* (Ver Eecke 1933, tome I, pages 194–196), Pappus nous transmet le résultat, probablement dû au géomètre athénien Dinostrate, selon lequel la proportionnalité $\dfrac{AG}{AB} = \dfrac{AB}{\operatorname{arc} BD}$ subsiste (Figure 1). La démonstration, par double raisonnement par absurde, ne pose pas de difficultés pour les étudiants.[6]

Donc, en construisant le segment de droite quatrième proportionnelle de AG, AB, AB, on aura rectifié l'arc BD, c'est-à-dire, le quart de la circonférence du cercle de centre A e de rayon AB.

Remarquons que ce résultat de Dinostrate ne nous fournit de façon directe que la rectification de la circonférence du cercle, et non pas la quadrature. Pour parvenir à celle-ci (chapitre XXXI, proposition 27), Pappus fait évidemment appel à la première proposition du traité *De la Mesure du Cercle*, d'Archimède, selon laquelle un cercle est équivalent à un triangle rectangle dont les cathètes son égaux au rayon et à la circonférence du cercle (Ver Eecke 1960, tome I, pages 128–129). Par conséquent, le cercle est aussi équivalent à un rectangle dont les côtés sont égaux au diamètre et au quart de la circonférence du cercle. C'est-à-dire, dans le cas de la figure, le cercle de centre A et rayon AB est équivalent au rectangle de côtés $2AB$ et le quatrième proportionnel obtenu par construction (équivalent à l'arc BD). Une fois obtenue l'équivalence entre le cercle et un rectangle, la construction de la moyenne proportionnelle entre ces deux segments de droite nous fournira le côté du carré équivalent au cercle.

La quadrature d'un cercle de rayon différent de AB est alors un exercice élémentaire de géométrie grecque. Il y a deux procédures naturelles pour le résoudre. Soient donc donnés

- la quadratrice BEG associée au carré $ABCD$ et au cercle $\mathcal{K}_1$, de centre A et rayon AB,
- et un autre cercle $\mathcal{K}_2$, de rayon r_2,

et que la quadrature du cercle $\mathcal{K}_2$ soit demandée.

La première procédure passe par la préalable rectification de la circonférence de $\mathcal{K}_2$. Par la propriété de Dinostrate, on a $\dfrac{AG}{AB} = \dfrac{AB}{\operatorname{arc} BD}$, d'où $\dfrac{AG}{4AB} = \dfrac{AB}{\text{périmètre de } \mathcal{K}_1}$. Par la proportionnalité entre le périmètre d'un cercle et son rayon[7], on a $\dfrac{AB}{r_2} = \dfrac{\text{périmètre de } \mathcal{K}_1}{\text{périmètre de } \mathcal{K}_2}$, c'est-à-dire, $\dfrac{AB}{\text{périmètre de } \mathcal{K}_1} = \dfrac{r_2}{\text{périmètre de } \mathcal{K}_2}$. Donc, $\dfrac{AG}{4AB} = \dfrac{r_2}{\text{périmètre de } \mathcal{K}_2}$. Par conséquent, en construisant le quatrième proportionnel de AG, $4AB$, r_2, on obtient un segment de droite le longueur égale au périmètre du cercle $\mathcal{K}_2$. Pour enfin carrer le cercle $\mathcal{K}_2$, on fera appel à la première proposition de la *Mesure du Cercle* d'Archimède, comme plus haut.

La deuxième procédure passe par la quadrature du cercle $\mathcal{K}_1$. On construit, comme plus haut, le côté, c_1, du carré équivalent à $\mathcal{K}_1$, et ensuite on fait appel à la proposition 2 du

[6] Pourtant, ce résultat fait mention du point G, que Sporos ne trouverait pas légitime.

[7] Pappus d'Alexandrie démontre cette proportionnalité à deux reprises, dans sa *Collection Mathématique*: à la proposition 11 du chapitre XI du livre V (Ver Eecke 1933, tome I, pages 260–261) et à la proposition 22 du chapitre XXVI du livre VIII (Ver Eecke 1933, tome II, pages 866–867).

Livre XII des *Éléments* d'Euclide, selon laquelle deux cercles sont proportionnels aux carrés construits sur ses diamètres. Si d_1 et d_2 sont les diamètres de $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$ respectivement, alors (utilisant toujours une notation algébrique) $\dfrac{\mathcal{K}_1}{\mathcal{K}_2} = \dfrac{d_1^2}{d_2^2}$ ou, de façon équivalente, $\dfrac{\mathcal{K}_1}{\mathcal{K}_2} = \dfrac{r_1^2}{r_2^2}$. Soit c_2 la quatrième proportionnelle de r_1, r_2, c_1; on aura ainsi construit le côté du carré équivalent à $\mathcal{K}_2$. En effet, de $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$, on obtient $\dfrac{r_1^2}{r_2^2} = \dfrac{c_1^2}{c_2^2}$, et donc aussi $\dfrac{\mathcal{K}_1}{\mathcal{K}_2} = \dfrac{c_1^2}{c_2^2}$. Mais $\mathcal{K}_1 = c_1^2$. Par conséquent, $\mathcal{K}_2 = c_2^2$.

La spirale d'Archimède

Tout comme la quadratrice, la *spirale* peut aussi être décrite par deux mouvements uniformes, l'un rectiligne et l'autre circulaire. Imaginons qu'une demi-droite tourne uniformément autour de son origine, O, et qu'en même temps un point, P, se déplace uniformément sur la demi-droite, en partant de O à l'instant où la demi-droite part de sa position initiale (Figure 3). Le point P décrira une *spirale d'Archimède*.

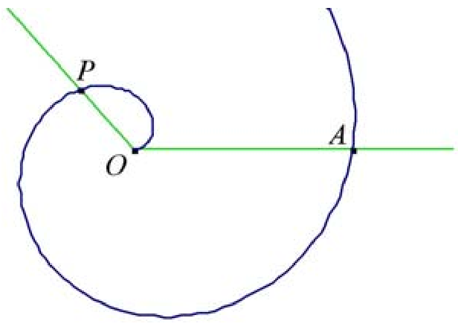

Figure 3

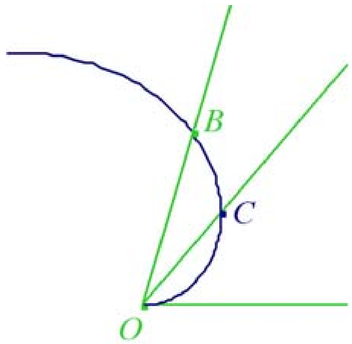

Figure 4

Le point O s'appelle l'*origine* de la spirale. Soit A la position du point P quand la demi-droite achève le premier tour; le segment OA s'appelle la *première droite* et le cercle de centre O et rayon OA s'appelle le *premier cercle*.

Cette courbe est l'objet d'un important traité d'Archimède de Syracuse, intitulé justement *Des Spirales*. Nous utilisons la traduction française de ce texte (Ver Eecke 1960, tome I, pages 239–299) pour la génération de la courbe et pour la terminologie associée à elle. Les passages importants pour l'atelier sont les définitions 1–4 et 7 et la proposition 12 (Ver Eecke 1960, tome I, pages 261–262).

Pappus d'Alexandrie nous parle aussi de la *spirale d'Archimède* dans le Livre IV de la *Collection Mathématique*. Il en donne la génération au chapitre XXI (Ver Eecke 1933, tome I, pages 177–179). Plus loin, au chapitre XLVI (Ver Eecke 1933, tome I, pages 223–224), Pappus reprend la courbe pour découper un angle dans un rapport quelconque, problème qu'il avait déjà résolu par l'intermédiaire d'une quadratrice au chapitre antérieur (proposition 35).

Tout comme la quadratrice, la spirale d'Archimède peut aussi être envisagée comme un "dictionnaire bilingue" entre l'angulaire et le rectiligne, au sens que, par son intermédiaire, tout problème résoluble dans l'un de ces contextes le sera aussi dans l'autre. On propose donc exactement les mêmes exemples d'exercices pour les deux courbes.

Voyons un exemple. Pour construire deux carrés qui soient entre eux comme β est à γ, on place les deux angles avec leurs sommets sur l'origine le la spirale, un des côtés sur la première droite et l'autre côté dans le sens de progression de la courbe (Figure 4). Soient B et C les points où ces deux côtés coupent la spirale[8] et soient $b = OB$ et $c = OC$.

[8]On considère ici l'intersection avec le premier tour de la spirale, puisque les angles ne sont pas censés dépasser un tour complet. La généralisation à des angles plus grands est évidente.

On a évidemment $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{b}{c}$. Soit m la moyenne proportionnelle entre b et c, c'est-à-dire, un segment de droite tel que $\frac{b}{m} = \frac{m}{c}$. Les carrés de côtés b et m sont proportionnels aux angles β est à γ, parce que $\frac{b^2}{m^2} = \frac{b}{m} \cdot \frac{b}{m} = \frac{b}{m} \cdot \frac{m}{c} = \frac{b}{c} = \frac{\beta}{\gamma}$.

Malgré la ressemblance entre la spirale et la quadratrice en ce qui concerne le problème de la trisection de l'angle, les deux courbes ont des rôles très différents dans la résolution du problème de la quadrature du cercle. En fait, une spirale ne suffit pas à rectifier une circonférence ni à quarrer un cercle. La proposition 18 du traité *Des Spirales*, d'Archimède, affirme que la droite tangente a une spirale au point, A, où s'achève le premier tour coupe la droite perpendiculaire à OA dans un point, T, tel que le segment de droite OT est équivalent à la circonférence du premier cercle (Ver Eecke 1960, tome I, pages 269–273). Une spirale étant donnée, il est donc équivalent de rectifier la circonférence du premier cercle et de tracer la tangente à la spirale au point où s'achève le premier tour.

Un problème possible serait alors le suivant:

On donne non pas seulement une spirale d'Archimède, mais aussi la droite tangente à la courbe au point où s'achève le premier tour (Figure 5), et on demande de carrer un cercle (éventuellement différent du premier cercle de la spirale).

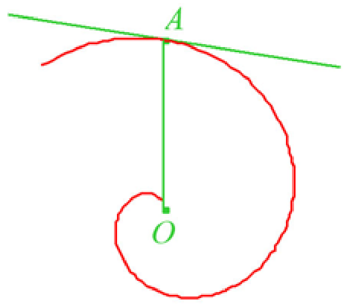

Figure 5

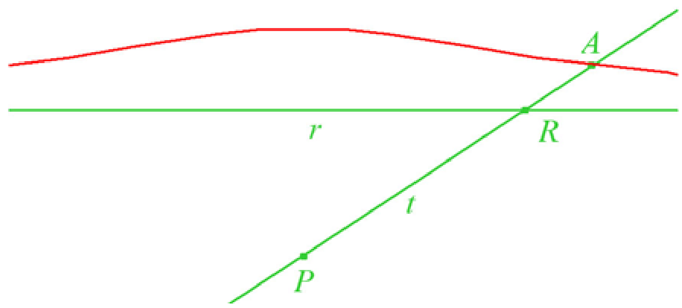

Figure 6

La conchoïde de Nicomède

Pour décrire la *conchoïde*, il faut considérer une droite fixe, r, qu'on appelle la *règle* ou la *base*, un point fixe, P, qu'on appelle le *pôle*, et une longueur, δ, qu'on appelle l'*intervalle* ou la *distance*. Quand une droite, t, tourne autour du pôle et coupe la règle en un point, R, et on marque sur t un point, A, de l'autre côté[9] de r par rapport à P, tel que la longueur du segment RA soit égal à l'intervalle, c'est-à-dire, tel que $RA = \delta$ (Figure 6), alors le point A décrit une *conchoïde de Nicomède*.

Nicomède, un géométre grec du III^e siècle avant J.–C., aurait écrit un livre, intitulé *Les Lignes Conchoïdes*, qui ne nous est pas parvenu. Pour faire connaître la *conchoïde*, j'utilise deux textes anciens dans les versions françaises de Paul Ver Eecke: l'un d'Eutocius d'Ascalon (Ver Eecke 1960, tome II) et l'autre de Pappus d'Alexandrie (Ver Eecke 1933, tome I). Le *Commentaire* d'Eutocius sur le traité d'Archimède *De la Sphère et du Cylindre* contient, à propos de la proposition 1 du Livre II du traité, une histoire détaillée du problème de la duplication du cube. Ce récit historique s'achève par la "Solution à la manière de Nicomède dans son livre sur *Les Lignes Conchoïdes*" (Ver Eecke 1960, tome II, pages 615–620), où Eutocius décrit un instrument mécanique pour tracer la conchoïde, avant d'étudier quelques

[9] On peut aussi prendre le point A du màme côté de r par rapport à P; la forme de la courbe dépendra alors de la relation d'ordre entre l'intervalle et la distance du pôle à la règle. Il est possible que ces conchoďdes aient aussi été connues dans l'Antiquité (Ver Eecke 1933, tome I, page 186, note 6).

propriétés de la courbe et de l'appliquer à la solution du problème mentionné. La description de cet instrument mécanique peut compléter la lecture de la génération de la conchoïde telle que la présente Pappus au chapitre XXVI du Livre IV de la *Collection Mathématique* (Ver Eecke 1933, tome I, pages 185–186).

L'importance historique de la conchoïde relève non seulement du problème de la duplication du cube, mais aussi de celui de la trisection de l'angle. En fait, l'utilisation didactique de la courbe est beaucoup plus simple par rapport à ce dernier problème que par rapport au premier. À l'atelier j'ai néanmoins donné les deux passages du Livre IV de la *Collection Mathématique*, où Pappus[10] fait mention de la conchoïde: les chapitres XXVI–XXVIII pour la duplication du cube (Ver Eecke 1933, tome I, pages 185–191) et les chapitres XXVI–XXVIII pour la trisection de l'angle (Ver Eecke 1933, tome I, pages 210–213).

La conchoïde de Nicomède a un rapport étroit avec un certain type de construction géométrique utilisée en Antiquité. Une construction par *neusis* ou *inclinaison* consiste à placer entre deux courbes données un segment de longueur donnée et qui passe (prolongé, s'il le faut) par un point donné. Cela peut s'obtenir par le moyen d'une règle coulissante, avec deux marques qui représentent les extrémités d'un segment de droite de la longueur requise, et que l'on fait glisser, toujours en passant par le point donné, jusqu'à ce que les deux marques se trouvent chacune sur l'une des courbes[11].

Dans les exemples les mieux connus (et les plus faciles) de construction par neusis, les deux courbes données sont, soit deux droites, soit une droite et un cercle. Le rapport entre ces constructions et la conchoïde de Nicomède est donc bien clair. Si l'on a une conchoïde dont la règle coïncide avec une droite donnée, dont le pôle coïncide avec le point donné et dont l'intervalle soit la longueur donnée, alors l'intersection de la conchoïde avec la deuxième courbe donnée montrera la position du segment que l'on cherche à construire. Pappus d'Alexandrie le démontre pour le cas de deux droites dans la proposition 23, au chapitre XXVII, du Livre IV de la *Collection Mathématique* (Ver Eecke 1933, tome I, pages 187–188).

Pour une première approche aux constructions par neusis, le meilleur exemple est celui présenté par Pappus d'Alexandrie dans la proposition 32 (au chapitre XXXVIII) du Livre IV de la *Collection Mathématique*, a propos du problème de la trisection d'un angle aigu quelconque[12]. Pour trisecter un angle aigu ABC, on trace, à partir d'un point, C, d'un de ses côtés, une parallèle et une perpendiculaire à l'autre côté (Figure 7). En suite, on intercale entre ces deux droites un segment DE de longueur double de BC. Pappus démontre que l'amplitude de l'angle ABD est un tiers de celle de l'angle ABC. C'est une démonstration très élémentaire, qui ne posera aucun problème aux étudiants.

La position du point E (et, par conséquent, de la droite BDE) sera déterminée par l'intersection de la droite CE avec la conchoïde de règle AC, pôle B et distance $2BC$.

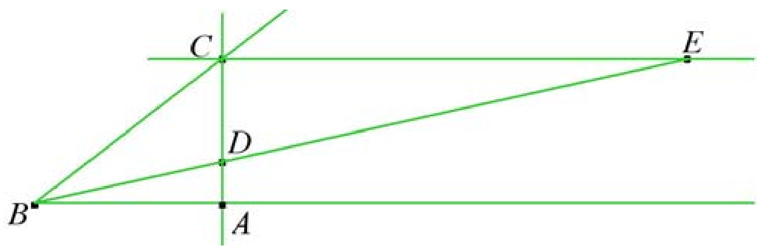

Figure 7

[10]Par contre, Eutocius d'Ascalon ne la mentionne bien entendu que par rapport au problème de la duplication du cube, le seul dont il s'occupe.

[11]C'est ce que nous dit aussi Pappus au chapitre XXVIII du Livre IV de la *Collection Mathématique* (page 188 de la traduction de Paul Ver Eecke).

[12]C'est l'exemple le plus pédagogique, ce n'est pourtant pas le plus ancien. Dans l'ordre chronologique, le premier cas d'une neusis est dû à Hippocrate de Chios (V^{e} siècle avant J.–C.), dans la construction de sa troisième lunule (de celles que nous transmet Eudème de Rhodes).

La cissoïde de Dioclès

De toutes les courbes étudiées dans l'Antiquité, la moins connue aujourd'hui est la *cissoïde de Dioclès*. Pour la décrire, on prend un cercle de centre O, deux diamètres perpendiculaires, AB et CD, et deux points, M et N, sur la circonférence du cercle, symétriques par rapport à CD (Figure 8). On joint M à A et on trace par N la parallèle à CD. Ces deux droites secoupent en un point, P. Quand M parcourt le quart de circonférence de cercle BC (et, par conséquent, N parcourt le quart de circonférence de cercle AC), le point P décrira la cissoïde[13].

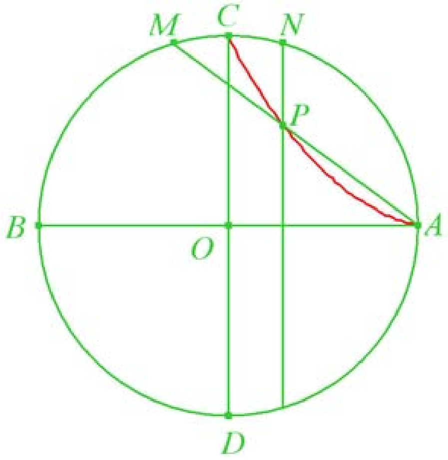

Figure 8

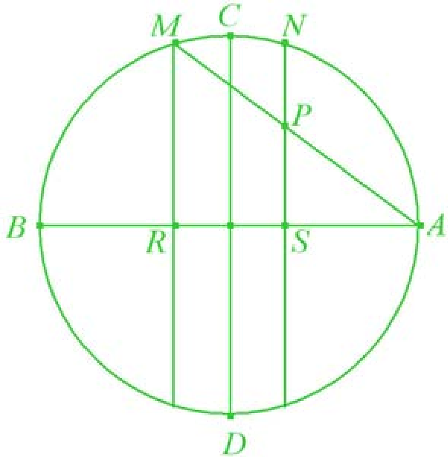

Figure 9

En complétant la figure (Figure 9), on aura, d'une part, $\dfrac{BS}{SN} = \dfrac{AR}{RM} = \dfrac{RM}{BR} = \dfrac{SN}{AS}$ (la proportionnalité du milieu étant la conséquence de la proposition 13 du Livre VI des *Éléments* d'Euclide, connue comme *construction de la moyenne proportionnelle*) et, d'autre part, $\dfrac{AR}{RM} = \dfrac{AS}{SP}$ (par la proposition 2 du Livre VI des *Éléments* d'Euclide, qu'on appelle souvent *Théorème de Thalés*). Puisque tous ces rapports sont égaux à $\dfrac{AR}{RM}$, on obtient la double proportionnalité

$$\frac{BS}{SN} = \frac{SN}{AS} = \frac{AS}{SP},$$

qui indique que SN et AS sont les deux moyennes proportionnelles entre BS et SP.

Dioclès, un géomètre du II^{e} siècle avant J.–C., aura défini et utilisé la cissoïde à la fin de son traité *Les Miroirs Ardents* pour résoudre le problème de l'insertion de deux moyennes proportionnelles entre deux segments de droite[14]. Le traité de Dioclès est perdu dans sa version originale, et on ne le connaît que par quelques commentaires d'Eutocius d'Ascalon et, plus récemment, par une traduction arabe découverte en Iran. Le texte utilisé à l'atelier est la traduction française de la version arabe, par Roshdi Rashed (Rashed 2002, pages 106–141). Le récit historique d'Eutocius sur le problème de la duplication du cube, qui se trouve dans son *Commentaire* à la proposition 1 du Livre II du traité *De la Sphère et du Cylindre* d'Archimède, contient aussi une partie intitulée "Solution à la manière de Dioclès dans son livre sur les *Miroirs Ardents*" (Ver Eecke 1960, tome II, pages 595–597). La cissoïde n'y joue pas un grand rôle (et elle n'y est jamais appelée par son nom), mais ce texte est un complément à celui, beaucoup plus tardif, en langue arabe.

[13] La cissoïde peut, elle aussi, àtre prolongée, en permettant à chacun des points M et N de parcourir toute la circonférence du cercle. Dioclès ne considère pas cette extension de la courbe.

[14] Comme on le sait bien, quand l'un de ces segments de droite est le double de l'autre, ce problème est équivalent au problème de la duplication du cube.

Le problème en fait résolu par Dioclès dans son livre est celui qu'on pourrait désigner par "la bissection du cube", c'est-à-dire, celui de construire l'arête d'un cube dont le volume soit la moitié du volume d'un cube donné. Ce problème est équivalent à celui, plus connu, de la duplication du cube. En effet, soit donné un cube d'arête a et admettons d'abord qu'on sache construire l'arête, b, du cube moitié. L'arête, c, du cube double s'obtient alors par un procédé très usuel de la *géométrie des aires* ancienne, à savoir, par un *application d'aire.* En appliquant le carré de côté a au segment de droite b, on obtient un autre segment de droite, disons c, tel que le rectangle de côtés b et c soit équivalent au carré de côté a. En symbolysme algébrique moderne, on aura

$$a^2 = b \cdot c.$$

Le segment de droite c est alors la solution du problème de duplication, parce qu'on a la proportionnalité $\frac{b}{a} = \frac{a}{c}$ et donc aussi $\frac{b^3}{a^3} = \frac{a^3}{c^3} = \frac{2}{1}$.

La réciproque se démontre de façon tout à fait analogue[15].

La cycloïde de Roberval

Tant qu'on le sache, les géomètres anciens n'ont pas connu la *cycloïde.* Mais cette courbe a été étudiée au XVII^{e} siècle par l'italien Evangelista Torricelli (1608–1647) et par le français Gilles Personne de Roberval (1602–1675). Le contexte scientifique du XVII^{e} siècle européen est très différent de celui de l'Antiquité et on ne pourra plus dire que la cycloïde ait été découverte en cherchant la solution de problèmes géométriques. Il n'y a pourtant aucune raison pour ne pas l'utiliser en classe avec les mêmes propos didactiques que les autres quatre courbes.

Le texte pour l'atelier est extrait de "Observations sur la Composition des Mouvements et sur le moyen de trouver les Touchantes des Lignes Courbes", plus exactement le passage "Onzième exemple, de la Roulette ou Trochoïde de M. de Roberval" (Roberval 1693, pages 105–108). Roberval considère un cercle assujetti à deux mouvements uniformes simultanés, l'un circulaire, au tour de son centre, et l'autre rectiligne, selon la direction d'une droite tangente; la *cycloïde* (que Roberval appelle plutôt *roulette* ou *trochoïde*) est la trajectoire d'un point de la circonférence du cercle quand ces deux mouvements sont tels que le temps d'un tour complet est égal au temps d'une translation égale à la circonférence du cercle[16] (Roberval 1693, pages 105–106). Mais la définition la plus suggestive de la cycloïde est celle que donne Blaise Pascal: "La roulette, ou cycloïde, ou trochoïde [...] est la courbe que décrit un clou fixé dans la jante d'une roue de charrette en marche ou, en termes plus rigoureux, un point de la circonférence d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite." ("Histoire de la Roulette", en Pascal 1992, volume IV, page 150).

De plusieurs propriétés qui peuvent servir à caractériser la cycloïde, celle qui nous intéresse est la suivante: si à l'instant où le point P de la courbe est engendré le cercle générateur de la courbe touche la base, AB, au point de contact C, alors l'arc de cercle CP équivaut au segment de droite CA. Grâce à cette propriété, l'ensemble de problèmes relatifs aux grandeurs et aux rapports de grandeurs rectilignes et angulaires qui ont été proposés pour la quadratrice et pour la spirale peuvent aussi bien se résoudre avec une cycloïde[17] (Figure 10).

[15] Ce procédé s'applique évidemment à un cas plus général: le cube C étant donné, si l'on connaît le cube qui est dans une certaine raison avec C, alors on connaîtra aussi le cube qui est avec C dans la raison inverse de celle-là.

[16] Roberval considère aussi la *cycloïde raccourcie* et la *cycloïde étendue*, où cette égalité n'a pas lieu.

[17] En donnant une cycloïde, on peut aussi demander la quadrature de n'importe quel cercle. Pour ce faire, il faut connaître le résultat selon lequel l'aire sous un arc de cyclodॅde équivaut au triple de celle du cercle générateur, un résultat découvert indépendamment par Roberval, Fermat et Descartes (Clero & Le Rest 1980, pages 49–67), et bien entendu aussi celui d'Archimède relatif à la quadrature du cercle (notons que la base de l'arc de la cycloïde est égale à la circonférence du cercle générateur).

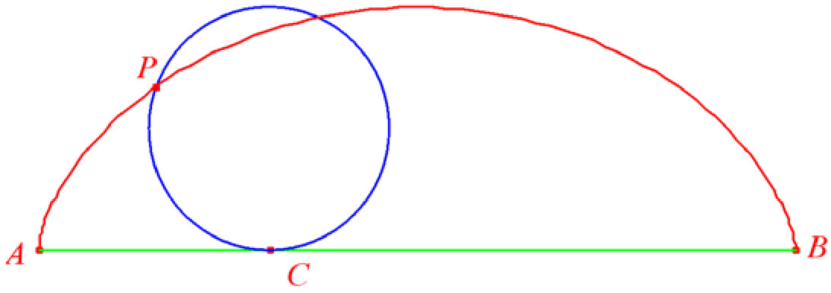

Figure 10

Construire un angle d'un radian

Quoique ce soit une question tout à fait étrangère à la pensée grecque, je ne résiste pas à suggérer ici un problème de géométrie qui ne me semble pas sans pertinence. On ne voit pas très souvent des contextes didactiques où il soit naturel de *construire* un angle d'un radian. Même quand les élèves ou les étudiants en savent la définition, cela reste d'habitude au niveau de la formulation théorique. Or, trois des cinq courbes étudiées à cet atelier fournissent justement l'opportunité de passer de l'énoncé abstrait à la manipulation et à la construction.

Avec la cycloïde, l'exercice est trivial (Figure 11). Il suffit de marquer sur AB un point C tel que la longueur de AC soit égale au rayon du cercle générateur, tracer ce cercle dans la position où son point de contact avec la base soit C, considérer le point P où le cercle coupe la cycloïde et joindre son centre, O, aux points C et P. L'angle COP vaudra évidemment un radian.

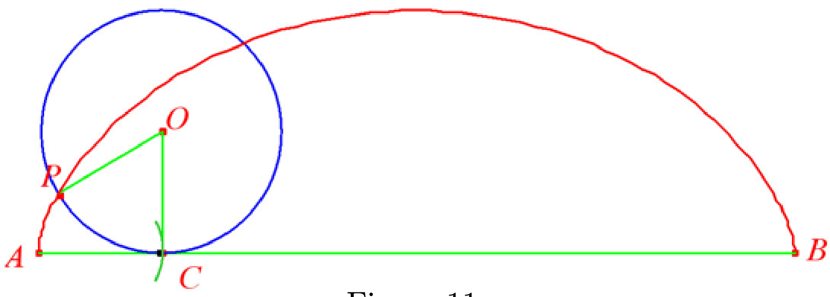

Figure 11

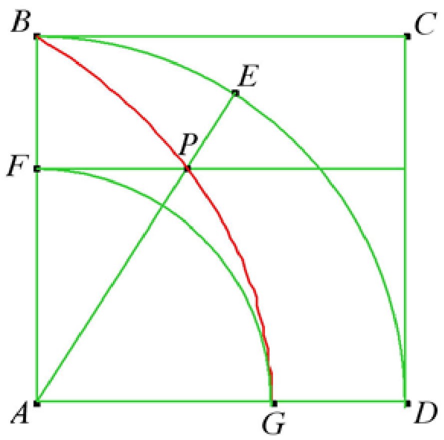

Figure 12

La construction d'un angle d'un radian avec la quadratrice exige un résultat préliminaire. Traçons le cercle de centre A et rayon AG, qui coupe le côté AB au point F. Traçons par F la parallèle à AD et soit P le point où cette droite coupe la quadratrice. Traçons le droite AP, coupant l'arc ED au point E (Figure 12).

Par la propriété spécifique de la courbe, $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{\text{arc}\,ED}{\text{arc}\,BD}$ et, par la propriété dûe à Dinostrate, $\dfrac{AG}{AB} = \dfrac{AB}{\text{arc}\,BD}$. Puisque $AF = AG$, on a $\dfrac{AB}{\text{arc}\,BD} = \dfrac{\text{arc}\,ED}{\text{arc}\,BD}$. Il s'ensuit que $AB = \text{arc}\,ED$. Donc, l'angle DAE vaut un radian.

Dans le cas de la spirale, il faudra aussi connaître la droite tangente à la courbe au point où s'achève le premier tour (Figure 13). Par la proposition 18 du traité *Des Spirales* d'Archimède, cette tangente coupera OT, perpendiculaire à OA, dans un point, T, tel que la longueur de OT est égale à la circonférence du premier cercle, $\mathcal{C}_1$. Soient R un point de OT tel que $OR = OA$ et S un point de OA tel que $\dfrac{OS}{OR} = \dfrac{OA}{OT}$, c'est-à-dire, que $\dfrac{OS}{OA} = \dfrac{OA}{\text{périmètre de } \mathcal{C}_1}$. Donc, OS sera le rayon d'un cercle dont le périmètre est égal à OA. Il suffira de construire le point, B, de la spirale à la même distance de O que S, pour obtenir l'angle AOB égal à un radian.

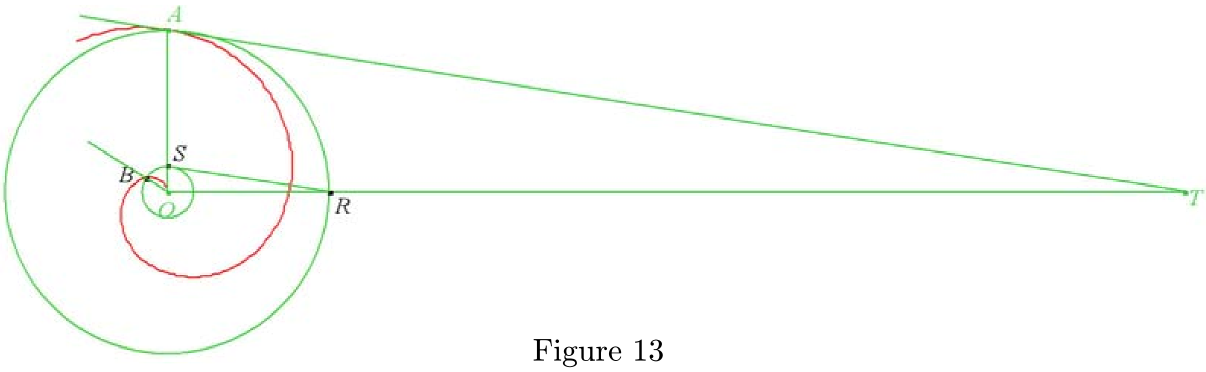

Figure 13

Quelques exercices proposés dans l'atelier

1. Soient donnés un carré $ABCD$, la circonférence d'un quart de cercle de centre A et rayon AB, et la quadratrice d'Hippias et Dinostrate qui leur est associée; trois angles rectilignes, α, β et γ; un triangle, $\mathcal{T}$, et un rectangle, $\mathcal{R}$ (Figure 14). On demande de construire:

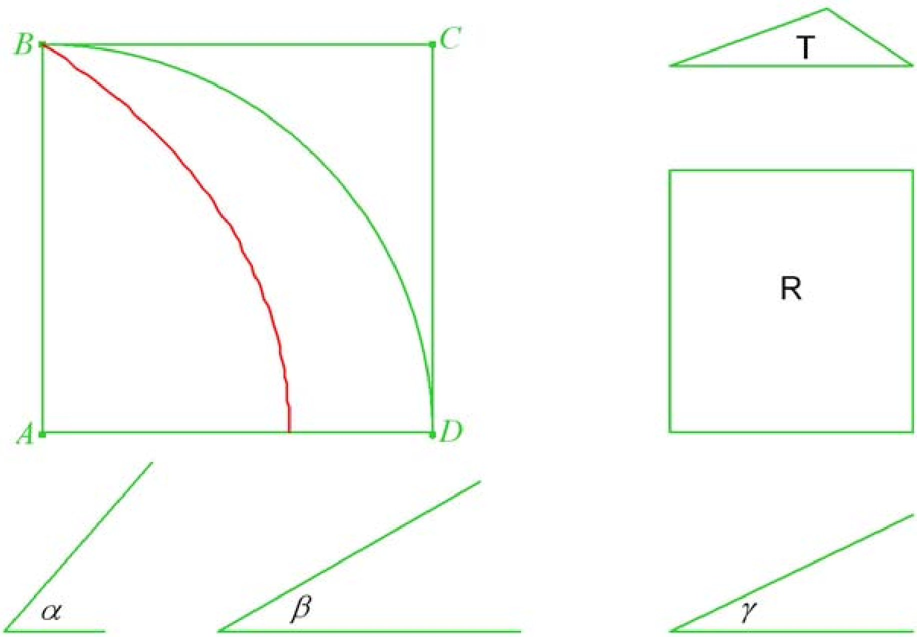

Figure 14

a) un angle dont l'amplitude soit un tiers de l'amplitude de l'angle α.

b) un angle dont l'amplitude soit deux cinquièmes de l'amplitude de β.

c) un angle qui soit à l'angle β comme, dans un carré, le côté est à la diagonale.

d) un angle qui soit à l'angle γ comme, dans un cube, la diagonale est à l'arête.

e) un angle qui soit à l'angle α comme $\mathcal{T}$ est à $\mathcal{R}$.

f) la quatrième proportionnelle de α, β et γ.

g) la moyenne proportionnelle entre α et β.

h) un segment de droite qui soit au plus grand côté de $\mathcal{R}$ comme α est à γ.

i) deux carrés qui soient entre eux comme β est à γ.

2. Soient donnés une spirale d'Archimède de centre O, sa première droite, OA, et son premier cercle; trois angles rectilignes, α, β et γ; un triangle, $\mathcal{T}$, et un rectangle, $\mathcal{R}$ (Figure 15). On demande de construire:

a) **a)** un angle dont l'amplitude soit un tiers de l'amplitude de l'angle α.

b) un angle dont l'amplitude soit deux cinquièmes de l'amplitude de β.

c) un angle qui soit à l'angle β comme, dans un carré, le côté est à la diagonale.

d) un angle qui soit à l'angle γ comme, dans un cube, la diagonale est à l'arête.

e) un angle qui soit à l'angle α comme $\mathcal{T}$ est à $\mathcal{R}$.

f) la quatrième proportionnelle de α, β et γ.

g) la moyenne proportionnelle entre α et β.

h) un segment de droite qui soit au plus grand côté de $\mathcal{R}$ comme α est à γ.

i) deux carrés qui soient entre eux comme β est à γ.

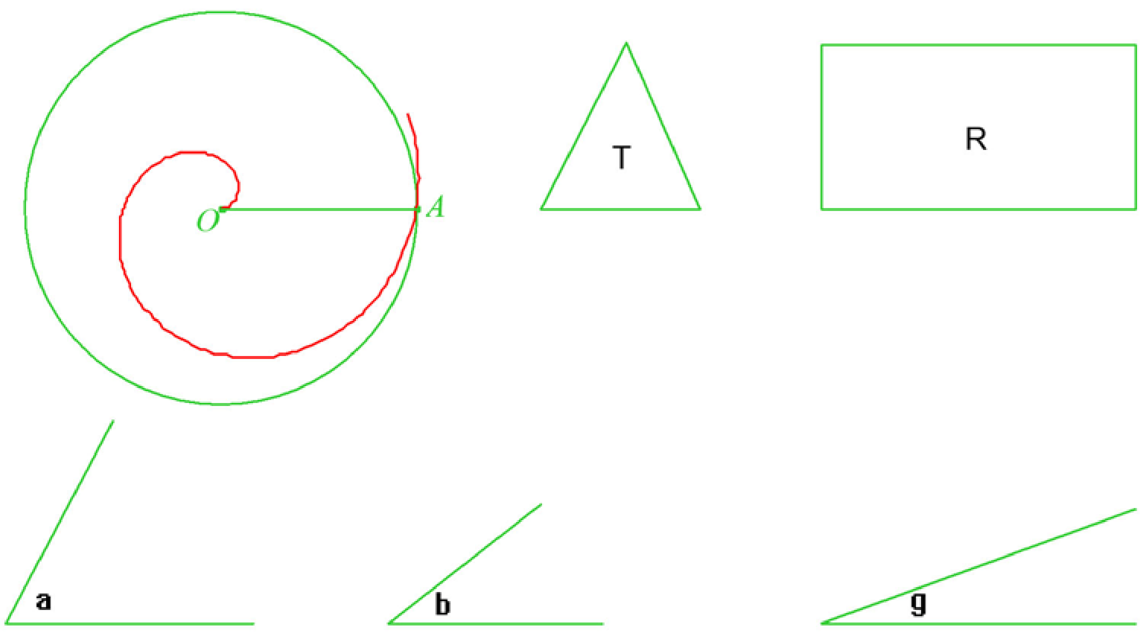

Figure 15

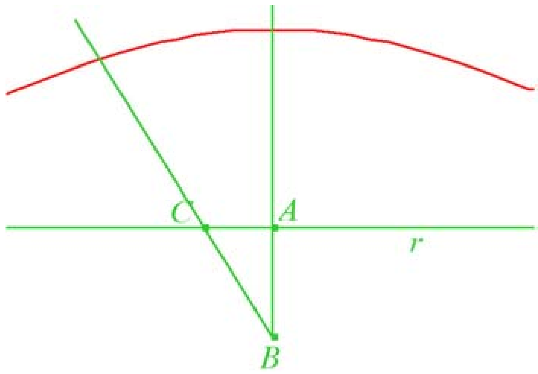

Figure 16

3. Soit un angle rectiligne ABC et une conchoïde de Nicomède de pôle B, de règle r passant par C et perpendiculaire à AB, et d'intervalle double de BC (Figure 16). On demande de construire un angle dont l'amplitude soit un tiers de l'amplitude de l'angle ABC.

4. Soit une cissoïde de Dioclès, le cercle, de centre O et rayon OA, qui lui est associé, et un segment de droite, s. (Figure 17). On demande de construire

   a) l'arête d'un cube, dont le volume soit double de celui du cube d'arête OA.

   b) l'arête d'un cube, dont le volume soit double de celui du cube d'arête s.

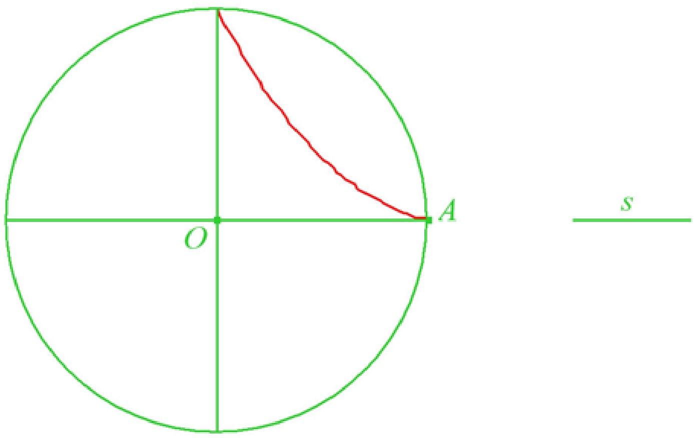

Figure 17

5. Soient donnés une cycloïde de Roberval et sa base, AB; trois angles rectilignes, α, β et γ; un triangle, $\mathcal{T}$, et un rectangle, $\mathcal{R}$ (Figure 18). On demande de construire:

   a) un angle dont l'amplitude soit un tiers de l'amplitude de l'angle α.

   b) un angle dont l'amplitude soit deux cinquièmes de l'amplitude de β.

   c) un angle qui soit à l'angle β comme, dans un carré, le côté est à la diagonale.

   d) un angle qui soit à l'angle γ comme, dans un cube, la diagonale est à l'arête.

   e) un angle qui soit à l'angle α comme $\mathcal{T}$ est à $\mathcal{R}$.

   f) la quatrième proportionnelle de α, β et γ.

   g) la moyenne proportionnelle entre α et β.

   h) un segment de droite qui soit au plus grand côté de $\mathcal{R}$ comme α est à γ.

   i) deux carrés qui soient entre eux comme β est à γ.

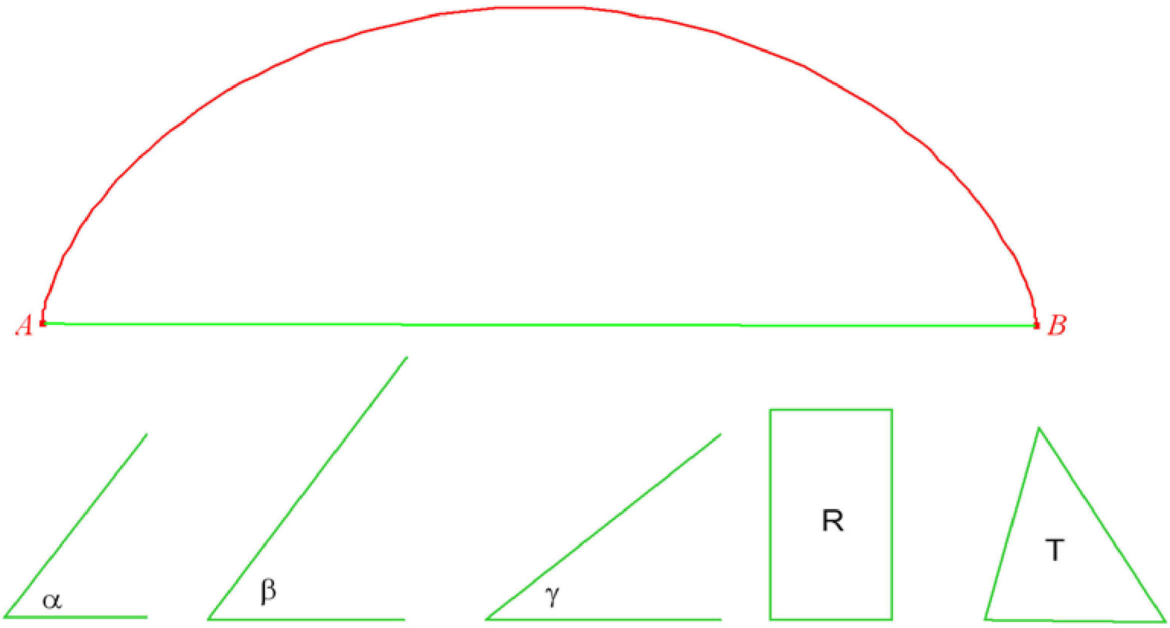

Figure 18

6. Soient un carré $ABCD$, la circonférence d'un quart de cercle de centre A et rayon AB, la quadratrice d'Hippias et Dinostrate, BG, qui leur est associée, et un ségment de droite, r (Figure 19). On demande de construire:.

   a) un segment de droite dont la longueur soit égale à celle du quart de circonférence de cercle representé;

   b) un carré dont l'aire soit égale à celle du quart de cercle représenté.

   c) un carré dont l'aire soit égale à celle d'un cercle de rayon r.

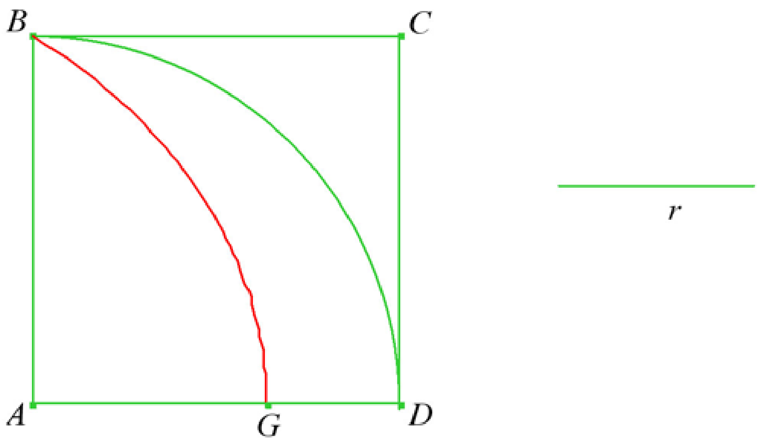

Figure 19

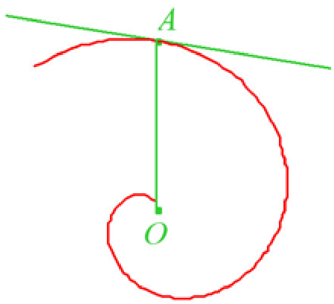

Figure 20

7. Soient une spirale d'Archimède de centre O et première droite OA, et la droite tangente à la courbe au point A (Figure 20). On demande de carrer:

   a) le cercle de centre O e rayon OA.

   b) un cercle dont le rayon soit la moitié de OA.

References

- Clero, J. P., Le Rest, E., 1980, *La Naissance du Calcul Infinitésimal au XVII^e siècle.* Paris.
- Euclide, 1994, *Les Éléments*, volume II. *Livres V à IX.* (Traduction et commentaires par Bernard Vitrac). Paris.
- Heath, T., 1981, *A History of Greek Mathematics*, volume 1. *From Thales to Euclid.* New York.
- Pascal, B., 1992, *Œuvres Complètes*, volume IV (Texte établi, présenté et annoté par Jean Mesnard). Paris.
- Rashed, R., 2002, *Les Catoptriciens Grecs*, tome 1. *Les miroirs ardents.* (Texte établi, traduit et commenté par Roshdi Rashed). Paris.
- de Roberval, G. P., 1693, *Divers ouvrages de M. de Roberval*, publié par l'Académie Royale des Sciences.
- Ver Eecke, P., 1948, *Proclus de Lycie – Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide.* Bruges.
- Ver Eecke, P., 1960, *Les Oeuvres Complètes d'Archimède, suivies des commentaires d'Eutocius d'Ascalon*, 2 volumes, Paris.
- Ver Eecke, P., 1933, *Pappus d'Alexandrie – La Collection Mathématique*, 2 volumes, Paris.