

LES ANNALES DE MATHÉMATIQUES DE GERGONNE: UN JOURNAL DU 19^{ÈME} SIÈCLE NUMÉRISÉ ET MÉDIATISÉ AU BÉNÉFICE D'UNE INTERDISCIPLINARITÉ ENTRE MATHÉMATIQUES, HISTOIRE, DIDACTIQUE ET PHILOSOPHIE

Christian GERINI

Laboratoire GHDSO, Université Paris 11 – Orsay, France

gerini@univ-tln.fr

Abstract

The Annales de Mathématiques Pures et Appliquées was the first major periodical publication in the word devoted to mathematics. It was published in France by Joseph Diez Gergonne from 1810 to 1832. It was recently digitalized, thus such researchers and teachers in mathematics or philosophy of science now have open access to it. Working on such a document required from us to study it from different disciplinary and methodological perspectives. Thanks to this work, we were able to use passages from this journal in mathematics lectures at undergraduate university level, and in epistemology and history of science lectures for postgraduate students.

This article aims at:

1. *Showing the various stages from the study of the original document under all its aspects (mathematics, epistemology, didactics, etc.) up to its digitalisation and availability in free access.*
2. *Illustrating with significant examples the didactic interest of the document and its use in courses on the emergence of the concept of vector and the geometrical representation of complex numbers, the evolution of differential calculus — then dealing with the problem of the validity of the concepts of the infinitely small or that of limits —, the study of an Argand's demonstration of the fundamental theorem of algebra.*
3. *Connecting in a multidisciplinary approach during seminars of epistemology, as above mentioned, mathematics, general philosophy, and the philosophy of mathematics. The document is often of interest in its philosophical aspects: we can see here confronted metaphysics, sensualism and positivism, geometrical realism and idealism or nominalism, etc.*

The use of original texts will constitute the link between the three steps of this demonstration. We will underline the advantages that can be drawn from such original publications, both at the didactical and multidisciplinary levels.

1 DE L'ÉTUDE D'UN JOURNAL ANCIEN À SA NUMÉRISATION: UNE NÉCESSAIRE INTERDISCIPLINARITÉ

Avant de s'intéresser aux contenus des 22 volumes de ce périodique, il a fallu tout d'abord situer les Annales de Gergonne dans le contexte éditorial de l'époque, et mesurer leur impact.

Les seules publications consacrées pour partie aux mathématiques sont, au début du 19^{ème} siècle, les *Mémoires de l'académie des sciences* et le *Journal de l'Ecole polytechnique*.

Grand admirateur des savants de la Révolution (Monge, Bailly, Laplace, ...), Gergonne tente de les convaincre de fonder un journal uniquement dédié à sa discipline. Son *Prospectus* d'introduction au premier numéro nous renseigne sur la lacune qui le pousse à se lancer dans l'aventure:

« C'est une singularité assez digne de remarquer que, tandis qu'il existe une multitude de journaux relatifs à la *Politique*, à la *Jurisprudence*, à l'*Agriculture*, au *Commerce*, aux *Science physiques et naturelles*, aux *Lettres* et aux *Arts*; les *Sciences exactes*, cultivées aujourd'hui si universellement et avec tant de succès, ne comptent pas encore un seul recueil périodique qui leur soit spécialement consacré, un recueil qui permette aux Géomètres d'établir entre eux un commerce ou, pour mieux dire, une sorte de communauté de vues et d'idées; un recueil qui leur épargne les recherches dans lesquelles ils ne s'engagent que trop souvent en pure perte, faute de savoir que déjà elles ont été entreprises; un recueil qui garantisse à chacun la priorité des résultats nouveaux auxquels il parvient; un recueil enfin qui assure aux travaux de tous une publicité non moins honorable pour eux qu'utile au progrès de la sciences. »¹.

Le constat est identique pour les autres pays d'Europe. Le journal de Gergonne apparaît donc rapidement comme novateur. Son impact se mesure à la nature de son autorat et lectorat, et aux initiatives qu'il engendra.

1.1 PUBLIC, CONTENUS ET IMPACT

	NATURE / FONCTION / ORIGINE /...	Nbre
1	Simple élève (collège, lycée)	16
2	Etudiant (université, école supérieure civile ou militaire)	6
3	Ancien élève de l'Ecole polytechnique (mentionné comme titre)	16
4	Professeur (écoles, collèges, lycées)	35
5	Professeur (université, école supérieure civile ou militaire)	35
6	Membre de l'institut ou d'académies nationales étrangères	18
7	Officier	18
8	Ingénieur	5
9	Correspondant étranger	25
10	Autres (aucun élément biographique/ anonymes)	21
	TOTAL	195

Le but premier que se fixe Gergonne: est de rassembler une « communauté enseignante » dispersée sur le territoire et éloignée des élites parisiennes². Mais il cherche aussi à intéresser ces mêmes élites (il y parvient surtout après 1820), à élargir son autorat et son lectorat au-delà des frontières nationales, à faire progresser les mathématiques au plan didactique comme sur les avancées théoriques, à créer une émulation entre les divers acteurs, et à utiliser évidemment son périodique comme tribune pour ses propres travaux et opinions politiques³ ou philosophiques⁴.

On ne peut comprendre comment Gergonne est parvenu depuis Nîmes à imposer son journal si l'on ne s'attarde pas sur la constitution des réseaux d'influence sur la période concernée. Suite à son brillant succès au concours de l'Ecole d'artillerie de Châlons en 1794,

¹Annales de mathématiques pures et appliquées (AMPA), TI, No 1, 1er juillet 1810.

²M. Otero, « Joseph-Diez Gergonne, 1771–1859 », Sciences et techniques en perspective, centre François Viète, Nantes, 1997

³Par exemple en prenant part au débat politique sur le vote censitaire dans deux articles d'arithmétique politique en 1815 et 1820.

⁴On peut citer par exemple son mémoire « De l'analyse et de la synthèse dans les sciences exactes, mémoire adressé à l'Académie de Bordeaux » [Annales, (1816–1817), p. 345–373], étudié par ailleurs par Amy Dahan: Un texte de philosophie mathématique de Gergonne. Mémoire inédit proposé à l'Académie de Bordeaux, Revue d'Histoire des Sciences, XXXIX/2 (1986).

où il impressionna son examinateur Sylvestre François Lacroix⁵, il sera ensuite en quelque sorte associé à l'« école de Monge »⁶. Cet épisode lui assurera une publicité auprès des élèves des grandes écoles récemment créées: le nombre d'auteurs se réclamant du titre d'« ancien élève de l'école polytechnique » est révélateur de cet impact, mais aussi de l'importance de ce titre seulement vingt ans après la création de cette école⁷.

Les Annales de Gergonne acquièrent donc rapidement une notoriété qui, doublée de la reconnaissance de ses propres travaux dans sa discipline et des soutiens qu'il se procure de ce fait à Paris, lui vaudront d'être nommé professeur à la faculté de médecine de Montpellier en 1816, membre correspondant de l'académie des sciences et recteur de l'académie de Montpellier en 1830.

Cette notoriété et l'utilité d'un tel journal se manifestent aussi par les initiatives qu'engendre Gergonne par son exemple.

- en 1826, l'allemand Crelle inaugure un journal largement inspiré de celui de Gergonne, et les deux hommes collaboreront abondamment: le *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, fondé à Berlin en 1826, et diffusé aussi à Paris par Bachelier.
- en 1836, cinq ans donc après la disparition des Annales, Liouville édite le *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*.
- en 1842, Terquem et Gerono publient les *Nouvelles Annales de Mathématiques, Journal des Candidats aux écoles polytechnique et Normale*.

Gergonne a donc montré la voie. Mais ses Annales sont aussi représentatives d'un contexte d'émancipation des mathématiques des anciennes disciplines dont elles relevaient (la philosophie, la logique, la mécanique, etc.), et de la difficulté croissante à les appréhender sans entrer dans une approche de spécialiste: la création des grandes écoles, des académies, des lycées, des classes préparatoires depuis 1794, font partie, comme l'édition d'un journal de mathématiques, de cette prise de conscience. Les mathématiques deviennent une matière à part entière, sous l'influence d'un positivisme de plus en plus affirmé.

1.2 L'ÉTUDE DES CONTENUS: MATHÉMATIQUES OU PHILOSOPHIE?

On est donc dans une période de transition. Une étude détaillée des rubriques et des intentions éditoriales de ce journal et, par exemple, de celles de Liouville⁸, montre bien que Gergonne est un personnage du 18^{ème} siècle tentant de faire entrer les mathématiques dans l'ère de l'autonomie et de la spécialisation sans parvenir tout à fait à les dégager des anciens schémas⁹.

⁵Cf. René Taton: Condorcet et Sylvestre-François Lacroix, Paris, Revue d'Histoire des Sciences, 1959, No 2 pp. 127–158, No 3 pp. 243–262.

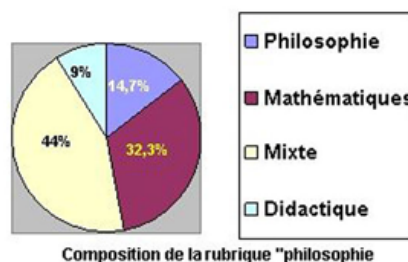
⁶Chasles, dans son Aperçu historique écrit à propos de Monge et de sa géométrie descriptive: "L'école de Monge est très redevable aussi à M. Gergonne, qui l'a servie utilement par ses propres travaux, toujours empreints de vues philosophiques profondes, par l'accueil qu'il a fait dans ses Annales de mathématiques, aux productions des anciens élèves de l'école polytechnique". [Michel Chasles, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, 1837].

⁷Cf. notre conférence: « Approche transdisciplinaire d'un document polymorphe: les Annales de Gergonne, premier grand journal de l'histoire des mathématiques ». Symposium Quelle histoire font les historiens des sciences et des techniques? Lille, mai 2007, actes à paraître.

⁸Cf. notre étude: C. Gérini et N. Verdier, Les « Annales de mathématiques »: des Annales de Gergonne au Journal de Liouville, Quadrature, 61 (juillet 2006), p. 32–38.

⁹La richesse et la variété des contributions nécessitent en outre une bonne connaissance des mathématiques, mais aussi une maîtrise suffisante de leur histoire jusqu'à la période concernée. La lecture de tous les ouvrages de référence, du 17^{ème} siècle au début du 19^{ème} siècle, est indispensable à la bonne compréhension des 9000 pages du document et des différents champs qui le composent.

Un élément déterminant pour la compréhension de ce polymorphisme de son journal est sa rubrique de « philosophie mathématique ». Ses contenus peuvent se répartir en quatre catégories:



1. Les articles que l'on peut qualifier de « stricte philosophie », de la main de Gergonne: il y revient sans cesse sur sa critique de Condillac, du sensualisme, des méthodes dans les sciences, de l'imperfection du langage scientifique, et sur la construction d'une « dialectique rationnelle » largement inspirée d'Aristote et de Port Royal, mais qu'il perfectionne abondamment. Ces articles sont de véritables manifestes positivistes, idéalistes et nominalistes. Leur dimension philosophique ne peut ici échapper à l'historien¹⁰.
2. Les articles strictement mathématiques mais qui, du fait des nouveautés conceptuelles qu'ils présentent, sont en rupture avec des paradigmes en cours, ou au contraire tentent de ramener certains concepts dans le giron des visions philosophiques dominantes du rapport des mathématiques à la réalité. Un exemple représentatif de ce dernier point en est la représentation géométrique des nombres imaginaires par Argand au T. 4, et les réactions que son article suscita. (Cf. II-1).
3. Les articles « mixtes », relevant à la fois de l'invention mathématique et du discours philosophique sur cette invention. On assiste par exemple à une démonstration de cette mixité du philosophique et du mathématique par F. J. Servois dans un article au T. 5 sur une nouvelle approche du calcul différentiel, suivi d'une longue critique des philosophes qui défendent l'infini actuel dans les calculs (Cf. II-2).
4. Les articles de didactique, eux aussi de la main de Gergonne, et d'un intérêt moindre aujourd'hui¹¹.

L'historien des mathématiques ne peut donc faire ici l'économie d'une étude épistémologique approfondie s'il veut mesurer les enjeux, les avancées, les apriorismes, et l'émergence de nouvelles approches philosophiques dans la constitution des corpus. Le positivisme, par exemple, imprègne trop ces textes pour qu'on puisse l'ignorer. Condillac et Kant sont trop souvent critiqués pour qu'on ignore leur influence sur la pensée mathématique.

Mais les contenus mathématiques nécessitent évidemment une formation initiale approfondie dans la discipline: leur niveau théorique ne peut s'accommoder d'une lecture trop superficielle, la mathématique de l'époque étant encore mal délimitée et constituée de sous — disciplines en constante évolution. Ce constat pose d'ailleurs le délicat problème de l'indexation et du référencement des textes après leur numérisation et de la difficulté à faire entrer dans un référencement moderne certains articles de disciplines aujourd'hui

¹⁰Cf. par exemple: Dissertation sur la langue des sciences, T. XII (1821), pp. 322–359.

¹¹Par exemple Première leçon sur la numération, Philosophe mathématique, 21(1830–831), p. 329–357.

« exotiques » ou plus simplement de nombreux articles parus dans la rubrique « philosophie mathématique »¹².

Il est donc incongru de s'intéresser à un tel ouvrage si l'on prend les mathématiques dans leur acception actuelle: seule une étude approfondie des rubriques du journal peut apporter une définition plus appropriée de cette acception et de son évolution sur la période concernée¹³.

Le second travail de l'historien (approche disciplinaire stricte) peut consister ensuite en l'étude des contenus mathématiques eux-mêmes, privilégiant une discipline ou un article. Il faut alors l'aborder dans sa stricte dimension mathématique (et être mathématicien), et le situer dans l'histoire de la discipline dans laquelle il s'inscrit (et se faire historien d'une science en particulier).

Par exemple, l'étude d'un article d'analyse nécessite de remonter *a minima* à l'invention du calcul différentiel et intégral moderne au 17^{ème} siècle et de se constituer un panorama des ouvrages de référence de la fin du 18^{ème} et du début du 19^{ème} siècle pour comprendre les défis ou blocages d'ordre mathématique ou philosophique sous jacents. Il faut ensuite entrer dans le détail des démonstrations de l'article lui-même pour en évaluer la portée. Il s'agit bien en fait d'étudier une science en marche, et non pas un aspect figé sur un texte donné.

1.3 DU DOCUMENT ORIGINAL AU DOCUMENT NUMÉRIQUE

Les études menées sur les Annales de Gergonne, les sollicitations qu'elles ont engendré de la part d'enseignants et de chercheurs dans les divers domaines qu'elles intéressent, la numérisation déjà effectuée du Journal de Liouville, nous ont conduit tout naturellement à envisager aussi leur diffusion sous une forme numérique¹⁴.

Se sont posées alors les questions du choix du prestataire de services pour cette numérisation, des financements nécessaires, des termes du contrat entre les partenaires, de la forme du document numérisé (images, pdf, plain text, etc.), de la nature de sa mise en ligne sur Internet (archives ouvertes ou accès réservé, voire payant?), de la constitution éventuelle d'une édition numérique augmentée, etc.

C'est finalement avec NUMDAM (programme CNRS de Numérisation des Archives de Mathématiques) que s'est concrétisée la phase de numérisation et de mise en ligne¹⁵. Un contrat type a été signé entre la bibliothèque de Nîmes (détentrice d'un exemplaire du document), NUMDAM et nous-mêmes. La numérisation fut vérifiée, indexée et publiée par la cellule MathDoc du CNRS. Dans la même logique que le programme Gallica de la BNF, le document est disponible en « open access » sous sa forme originale en format pdf, et n'est agrémenté que des index issus des tables des matières du journal lui-même.

La question de publier ensuite une édition agrémentée de notes historiques, biographiques et bibliographiques, d'indexations permettant des entrées multiples, reste posée. Mais sa nécessité est un fait acquis: si de nombreux acteurs du monde de la recherche et de l'enseignement nous ont fait part de l'intérêt que représente pour eux la mise à disposition d'un tel

¹²Gergonne nous renseigne dès le Prospectus d'introduction sur ce qu'il entend par « mathématiques pures et appliquées »: « Le titre de l'ouvrage annonce assez d'ailleurs que, si l'on n'y doit rien rencontrer d'absolument étranger au Calcul, à la Géométrie et à la Mécanique rationnelle, les rédacteurs sont néanmoins dans l'intention de n'en rien exclure de ce qui pourra donner lieu à des applications de ces diverses branches des sciences exactes. Ainsi, sous ce rapport, l'Art de conjecturer, l'Economie politique, l'Art militaire, la Physique générale, l'Optique, l'Acoustique, l'Astronomie, la Géographie, la Chronologie, la Chimie, la Minéralogie, la Météorologie, l'Architecture civile, la Fortification, l'Art nautique et les Arts mécaniques, enfin, pourront y trouver accès. ».

¹³Nous renvoyons là aussi à notre étude: Approche transdisciplinaire d'un document polymorphe: les Annales de Gergonne, premier grand journal de l'histoire des mathématiques, op. citée.

¹⁴Cf. C. Gérini et N. Verdier., Etude croisée des Annales de Gergonne et du Journal de Liouville, in: Repères — IREM, 67 (2007), Topiques éditions, Paris.

¹⁵<http://www.numdam.org>

document numérisé, nombre d'entre eux nous sollicitent pour obtenir des renseignements ne figurant pas sur le site de NUMDAM¹⁶.

2 D'HIER À AUJOURD'HUI: EXEMPLES DIDACTIQUES, ENTRE PHILOSOPHIE ET MATHÉMATIQUES

Un tel document offre alors une mine de ressources pour des utilisations didactiques dans des domaines allant des mathématiques elles-mêmes à leur histoire ou à la philosophie, voire à une approche mixte de leurs contenus.

2.1 LA REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DES IMAGINAIRES

Ainsi en est-il par exemple de la question de la représentation géométrique des imaginaires. Si l'isomorphisme entre le corps des complexes et le plan réel est aujourd'hui présenté comme allant de soi, les questions d'ordre philosophique et mathématique qui ont conduit à son émergence ont été oubliées, et en sont pourtant un outil puissant de compréhension. Les imaginaires, utilisés depuis le 16^{ème} siècle sous leurs diverses formes algébriques et analytiques pour les avancées qu'ils permettaient d'obtenir, posaient des problèmes d'ordre quasiment ontologique: le réalisme géométrique hérité des Anciens était battu en brèche par ces « solutions qui sont impossibles »¹⁷. Les Annales de Gergonne offrent en 1813 une réponse qui fera date par la voix de R. Argand dans son article: *Essai sur la manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*¹⁸. Ce n'est pas un hasard si cet article a paru dans la rubrique « Philosophie mathématique »: il pourrait autant faire l'objet d'une étude chacune de ces deux matières.

Ce travail a été présenté à trois reprises, l'une devant des élèves et professeurs de classes préparatoires, la seconde dans un cours de philosophie des sciences à l'école doctorale de l'université de Toulon, la dernière enfin lors d'un cours de mathématiques en première année d'IUT. Retenons pour cet exemple la dernière situation.

L'important était de montrer aux étudiants ce qui avait présidé à la réflexion d'Argand et à sa volonté de représenter géométriquement les imaginaires, pour les conduire ensuite à analyser sa méthode et à comprendre l'importance de l'analogie, les concepts émergents (les « lignes dirigées », qui deviendront les vecteurs connus des étudiants), et l'efficience de cette théorie (en leur faisant redémontrer les formules de trigonométrie à la manière d'Argand). L'utilisation d'un diaporama largement illustré a servi d'appui pédagogique à l'exposé d'un historique du concept de nombre imaginaire: il a permis de montrer quelles difficultés ces nombres représentaient au plan ontologique et philosophique, même si l'on apprend rapidement à les utiliser correctement au plan algébrique. Si nous ne devons retenir ici qu'une citation montrant ces obstacles et les chemins pris pour les contourner afin de légitimer coûte que coûte leur emploi, ce serait l'extrait suivant emprunté à Leibniz:

« A vrai dire la Nature, mère des diversités éternelles, ou plutôt l'esprit Divin, sont trop jaloux de leur merveilleuse variété pour permettre qu'un seul et même modèle puisse

¹⁶Une autre numérisation a montré l'intérêt de publier parallèlement au document brut des notices bibliographiques et bibliographiques: celle des Traités élémentaires de calcul différentiel et intégral de Dubourguet agrémentées d'une notice.

http://www-scd-ulp.u-strasbg.fr/wiki/doku.php/auteur:dubourguet_j.b.e._info

¹⁷Albert GIRARD (1595–1632), Invention nouvelle en l'Algèbre, 1629.

¹⁸Annales de Gergonne, Tome IV (1813–1814), pp. 133–148. Article reprenant, suite à une publication de Français, un texte publié par Argand en 1806, mais passé alors inaperçu, sauf dudit Français. On connaît mal Argand, et les avis divergent encore sur son identité et sa vie. On pourra lire à ce sujet l'intervention de Gert Schubring: "Argand and the early work on graphical representation: New sources and interpretations", *Around Caspar Wessel and the Geometric Representation of Complex Numbers*. Proceedings of the Wessel Symposium at The Royal Danish Academy of Sciences and Letters, Copenhagen, August 11–15 1998: Invited Papers. Matematisk-fysiske Meddelelser 46:2, Jesper Lützen (ed.), (C. A. Reitzel: Copenhagen, 2001), 125–146.

dépeindre toutes choses. C'est pourquoi ils ont inventé cet expédient élégant et admirable, ce miracle de l'Analyse, prodige du monde des idées, objet presque amphibie entre l'Etre et le non-Etre, que nous appelons racine imaginaire. Ces expressions ont ceci d'admirable que dans le calcul elles n'enveloppent rien d'absurde et de contradictoire, et que cependant on ne peut en donner d'exemple dans la nature, c'est à dire dans les choses concrètes. »¹⁹

Cela a attisé la curiosité des étudiants, et l'étude de l'essai d'Argand, menée avec eux sous forme de travail dirigé, leur est apparue comme un défi leur permettant de mieux appréhender ces nombres qu'ils avaient pourtant déjà rencontrés dans leurs cursus, souvent sous forme de cours magistral. Les exercices de mathématiques proposés ensuite ont été résolus et mieux compris, selon leurs propres témoignages. Il en a résulté aussi d'autres effets inattendus ou à peine espérés:

1. Le concept de vecteur et sa généralisation jusqu'à la notion actuelle d'espace vectoriel ont été beaucoup mieux assimilés que les années précédentes lors du cours d'algèbre linéaire. Il en fut de même pour celui d'isomorphisme, outil finalement sous jacent et quasi « naturel » qu'utilise Argand pour passer des imaginaires à des points et des vecteurs: l'exemple a servi à montrer comment peut s'imposer aux mathématiciens un concept généralisateur ou structurant.
2. Plus inattendu a été l'intérêt suscité pour l'histoire — voire la philosophie — des mathématiques. Cela a été l'occasion de montrer aux étudiants les développements épistémologiques qui ont suivi l'article d'Argand. Conscient de son aspect novateur, ce dernier avait pris la précaution d'en prévenir modestement les critiques:

10. La théorie dont nous venons de donner un aperçu, peut être considérée sous un point de vue propre à écarter ce qu'elle peut présenter d'obscur, et qui semble en être le but principal, savoir : d'établir des notions nouvelles sur les quantités imaginaires. En effet, mettant de côté la question si ces notions sont vraies ou fausses, on peut se borner à regarder cette théorie comme un moyen de recherches, n'adopter les lignes en direction que comme *signes* des quantités réelles ou imaginaires, et ne voir, dans l'usage que nous en avons fait, que le simple emploi d'une notation particulière. Il

Argand se refuse à entrer dans le débat sur la validité des imaginaires. Les critiques qu'il reçoit ont été l'occasion de montrer aux élèves que, même dans les mathématiques, des visions différentes s'affrontent sur un plan relevant de ce que Gergonne appelle explicitement la « philosophie mathématique ». Une réponse de l'algébriste F. J. Servois²⁰ a permis de montrer cette confrontation d'idées, alimentant ainsi la réflexion historique et philosophique engagée:

Pour moi, j'avoue que je ne vois encore, dans cette notation, qu'un masque géométrique appliqué sur des formes analytiques dont l'usage immédiat me semble plus simple et plus expéditif.

Deux conceptions des mathématiques s'affrontent: celle d'Argand, qui tend à ramener les imaginaires dans le giron d'un certain réalisme géométrique, et celle de Servois, algébriste et nominaliste convaincu, qui ne voit plus l'utilité d'un tel souci de légitimation. Cela nous a conduit à revenir sur le théorème fondamental de l'algèbre, déjà exposé dans le cours d'algèbre, en étudiant une démonstration vectorielle du même Argand²¹.

¹⁹Traduction de M. Parmentier, in Leibniz, Naissance du calcul différentiel, Collection Mathesis, Vrin, Paris, 1989

²⁰Lettre du 23 novembre 1813, T. IV, "Philosophie mathématique", pp. 228–235.

²¹Réflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires, suivies d'une application à la démonstration d'un théorème d'analyse, Annales de Gergonne, 5 (1814–1815), p. 197–209. Voir aussi: O. Kouteynikoff, La démonstration par Argand du théorème fondamental de l'algèbre, Bulletin de l'APMEP, No 462, pp. 122–127 et l'ouvrage collectif (M. Thirion Dir.), Images, Imaginaires, Imagination, Paris, Ellipses, 1998.

2.2 L'ESSAI DE CALCUL DIFFÉRENTIEL DE SERVOIS

La recherche d'une exposition rigoureuse du calcul infinitésimal débarrassée de toute métaphysique allait faire suite, dans le journal de Gergonne, à la parution de deux ouvrages de H. de Wronski²² et à l'approbation en 1812 par l'Institut de deux mémoires de Servois qu'il reprend au T. V des *Annales* (1814) sous la forme d'un *Essai* de quarante-huit pages agrémenté d'un long commentaire polémique et critique à l'égard du même Wronski:

- *Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel*, rubrique *Analyse transcendante*, pp. 93–140.
- *Réflexions sur les divers systèmes d'exposition des principes du calcul différentiel, et, en particulier, sur la doctrine des infiniment petits*, rubrique *Philosophie mathématique*, pp. 141–170.

On y voit apparaître pour la première fois des opérateurs fonctionnels et des classes de fonctions ouvrant la voie aux généralisations ultérieures²³.

A l'occasion d'un cours d'épistémologie et d'histoire des mathématiques devant des étudiants en doctorat scientifique, nous avons présenté des extraits de ce texte de Servois, avec quelques rappels des textes de Lagrange sur la notion de dérivée²⁴, afin de leur montrer le passage délicat de la notion d'infiniment petit au concept fonctionnel de différentielle.

Le problème fondamental posé aux utilisateurs du calcul différentiel au début du XIX^{ème} siècle demeurerait au fond identique à celui qui avait guidé les travaux de la fin du siècle précédent: comment éviter au calcul différentiel le recours aux infiniment petits et aux limites? Comment asseoir définitivement l'analyse sur le calcul algébrique au moyen du seul concept de *fonction*, ramenant, grâce aux développements de Taylor et à une rigueur à découvrir dans les définitions de leurs coefficients (à savoir les coefficients différentiels dy/dx), le calcul sur les fonctions à des algorithmes de développements en séries et à une manipulation de polynômes? Finalement, pour schématiser, comment « algébriser » l'analyse infinitésimale²⁵?

Pour aider les étudiants à mesurer l'importance de cette problématique dans son contexte, nous leur avons montré quelques exemples de titres significatifs:

Lagrange: *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel dégagés de toute considération d'infiniment petits et d'évanouissants*.

Arbogast: *Essai sur de nouveaux principes de calcul différentiel et de calcul intégral indépendants de la théorie des infiniment petits et de celle des limites*, 1789²⁶.

Dubourguet: *Traité élémentaire de Calcul différentiel et de calcul intégral indépendants de toutes notions de quantités infinitésimale et de limites, ouvrage mis à la portée des commençants, et où se trouvent plusieurs nouvelles théories et méthodes fort simplifiées d'intégrations, avec des applications utiles aux progrès des Sciences exactes*.

Au plan historique, à la suite de Lazare Carnot et de ses *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*²⁷, Servois approuve les différentes formes de ce calcul depuis le 17^{ème} siècle. Mais, algébriste hostile à toute référence aux infinitésimaux (infini actuel), voire aux limites (infini potentiel), il tente d'innover en introduisant pour la première fois des opérateurs fonctionnels, les différentielles, qui offrent l'avantage de la généralité, et semblent éviter ce double écueil. Dans ses *Réflexions*, il annonce clairement ces diverses positions:

²²Introduction à la philosophie des mathématiques et technie de l'algorithmie, Courcier, Paris, 1811 et Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange, Blanckestein, Paris, 1812.

²³On pourra consulter sur cette question notre travail: C. Gérini, Les « Annales » de Gergonne: apport scientifique et épistémologique dans l'histoire des mathématiques, Editions du Septentrion, Lille, 2002.

²⁴J. L. Lagrange, Théorie des fonctions analytiques, in: Journal de l'Ecole Polytechnique, Paris, 1797.

²⁵Cf. J. P. Friedelmeyer, Le calcul des dérivations d'Arbogast dans le projet d'algébrisation de l'analyse à la fin du XVIII^{ème} siècle, publiée dans: Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, SFHST, No 43, 1994.

²⁶Cité par J. P. Friedelmeyer, op. cité.

²⁷Chez Duprat, Paris, 1797.

« Parmi les différentes manières de présenter le calcul différentiel, je ne dirai pas qu'il y en ait une qu'il soit nécessaire d'adopter. Toutes celles qui sont légitimes ont, du moins aux yeux de ceux qui les proposent, quelques avantages particuliers. Mais, s'il est utile de lier solidement le calcul différentiel avec l'analyse algébrique ordinaire; si le passage de l'une à l'autre doit être facile et s'exécuter, pour ainsi parler, de plain-pied; si l'on doit pouvoir répondre, d'une manière à la fois claire et précise, aux questions: Qu'est-ce qu'une différentielle? Quand et comment se présentent-elles comme d'elles-mêmes les différentielles? Avec quelles fonctions analytiques conservent-elles, non de simples analogies, mais des rapports intimes? Je croirai ne rien accorder à la partialité, en affirmant qu'on inclinera vers la théorie dont j'ai essayé de tracer une esquisse rapide dans l'article qui précède celui-ci. » [Réflexions...; p. 141].

Ce texte fait figure de manifeste. Il permet de montrer aux étudiants qu'un champ fondamental des mathématiques, le calcul différentiel et intégral, avait pu prêter à controverses pendant des décennies, et que la présentation qu'on leur en fait aujourd'hui est le fruit de ces questionnements et de choix méthodologiques ou philosophiques. Servois ne peut que reconnaître la primauté de la géométrie en la matière (un exemple emprunté à Leibniz permet de le leur montrer), mais il s'en détache radicalement: « *Il est de fait que le calcul différentiel est né des besoins de la géométrie. Or, le calcul algébrique, qui s'occupe essentiellement de la quantité **discrète**, c'est-à-dire, des nombres, ne peut s'appliquer à la quantité **continue**, c'est-à-dire, à l'étendue, que lorsqu'on suppose que les variations numériques deviennent arbitrairement ou indéfiniment petites. Ainsi, le moyen d'union entre le calcul et la géométrie est nécessairement la **méthode des limites**; c'est pourquoi les inventeurs, et les bons esprits qui sont venus après, ont pris, ou du moins indiqué, pour méthode d'**exposition** et d'**application** du calcul différentiel, celle des limites.* » [Réflexions...; p. 143].

« Les séries et le **calcul différentiel** ont donc dû prendre naissance ensemble; c'est à l'entrée de ce dernier qu'on rencontre un premier développement de l'**état varié** d'une fonction quelconque, z par exemple. En essayant d'ordonner ce développement d'une autre manière, on ne peut se dispenser de faire attention à la série très remarquable de différences

$$\Delta z - \frac{1}{2}\Delta^2 z + \frac{1}{3}\Delta^3 z - \frac{1}{4}\Delta^4 z + \dots$$

à laquelle on est tenté de donner un nom qui rappelle sa composition: celui de **différentielle** se présente comme de lui-même. »

Servois s'intéresse donc aux *fonctions différentielles*, qui ne désignent pas chez lui un objet bien déterminé mais l'ensemble des « *fonctions données par la considération des différences de quantités variables, fonctions que j'appellerai **fonctions** différentielles* ».

C'est là qu'apparaît l'originalité de son travail. Partant des propriétés constatées sur les fonctions ainsi définies, il introduit les notions fondamentales et générales de *fonctions distributives* ($f(x+y) = f(x) + f(y)$) et de *fonctions commutatives entre elles* ($fg = gf$, au sens de la composition des fonctions). S'ensuit une liste de théorèmes généraux sur les propriétés de cette "distributivité" et cette "commutativité": composition, somme, puissances, développements de produits... Il effectue ensuite un développement de $F(x+y)$ qui, après une succession d'opérations et de changement de variables, le conduit à la formule:

$$Fx = Fx_0 + \frac{x}{\alpha} dFx_0 + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot \alpha^2} d^2 Fx_0 + \dots \quad (48)^{28}$$

dans laquelle il écrit x_0 pour 0 et où α est un « *accroissement arbitraire et constant* », à savoir que $x = n\alpha$, n entier donné.

²⁸ Les numéros de formules sont ceux de son mémoire.

Il a donc obtenu une décomposition de Fx suivant les différentielles successives de F prises en 0 et les puissances entières de x . En remplaçant α par dx , il retrouve la formule de Taylor aux dérivées établie par Lagrange mais sans faire apparaître ces dérivées, sans utiliser les infiniment petits pour parvenir à la formule de référence (48) — mais en les substituant à α sans sourciller — et sans mentionner les passages à la limite. Il pense donc avoir gagné le pari d’asseoir le calcul différentiel sur de simples règles algébriques, et les seules propriétés fonctionnelles des différences.

Sa définition de dz se précise alors:

$$\Delta z - \frac{1}{2}\Delta^2 z + \frac{1}{3}\Delta^3 z - \frac{1}{4}\Delta^4 z + \dots = dz$$

« C’est la définition complète d’une nouvelle fonction de z , polynôme et même **infini**ôme, en général, que j’appelle la **différentielle** de z . »

Il s’attache ensuite à dresser une liste de formules propres aux fonctions *distributives* et *commutatives avec les facteurs constants*.

C’est alors que son travail trouve son réel sens: « Je vais appliquer ces généralités aux fonctions données par la considération des différences de quantités variables, fonctions que j’appellerai **fonctions** différentielles [nous en avons donné la liste plus haut]. Evidemment les propriétés sont valables ici puisque ces **fonctions** différentielles sont toutes, comme la fonction f du paragraphe précédent, *distributives* et **commutatives avec le facteur constant** ». Il transpose au champ différentiel les formules obtenues dans le champ fonctionnel en se contentant de substituer à la notation F ou Ψ n’importe laquelle des notations différentielles d , d^n , E , etc., et construire une « algèbre des différentielles ». A titre d’exemple: “Dans la formule (46)

$$[E^n Fx = F(x + n\alpha) = Fx + \frac{n}{1}dFx + \frac{n^2}{1 \cdot 2}d^2Fx + \frac{n^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}d^3Fx + \dots],$$

je mets z au lieu de Fx ; je compare avec l’équation (62)

$$[(L^{-1}\psi)^x z = z + \frac{x}{1}\psi z + \frac{x}{1 \cdot 2}\psi^2 z + \frac{x}{1 \cdot 2 \cdot 3}\psi^3 z + \dots],$$

et j’ai: $E^n z = (L^{-1}d)^n z$; et par conséquent aussi

$$\frac{E^n}{x}z = \left(L^{-1}\frac{d}{x}\right)^n z; \quad \frac{E^n}{y}z = \left(L^{-1}\frac{d}{y}\right)^n z$$

D’après les expressions précédentes et la définition $\Delta^n z = (E - 1)^n z$ (69), on a sur le champ

$$\Delta^n z = (L^{-1}d - 1)^n z; \text{quad} \frac{\Delta^n}{x}z = \left(L^{-1}\frac{d}{x} - 1\right)^n z; \quad \frac{\Delta^n}{y}z = \left(L^{-1}\frac{d}{y} - 1\right)^n z."$$

Quand il remplace Fx par z et Ψ par d dans (46), les fonctions deviennent des différentielles, et le calcul fonctionnel devient calcul différentiel. La comparaison avec (62), formule valable uniquement dans le cas où Ψ est distributive et commutative avec les fonctions constantes, peut se faire car la différentielle d répond à ces critères.

Le travail de Servois ne s’arrête pas là, mais on voit déjà ici l’importance de la démarche. Les propriétés établies sont valables pour une **classe** de fonctions: il s’agit bien d’une nouveauté conceptuelle. Elles offrent aussi l’avantage de contourner — même artificiellement — l’obstacle des infiniment petits. Servois s’intéresse à un ensemble beaucoup plus large de fonctions que ses prédécesseurs, et ses résultats initiaux acquièrent un caractère de généralité qui n’était pas nécessaire *a priori* à son sujet: on se trouve ici devant l’émergence des opérateurs

différentiels en tant qu'opérateurs fonctionnels. C'est ici que sa démarche est moderne: le résultat général lui permet de déduire comme allant de soi les résultats particuliers, et laisse le champ ouvert à d'autres catégories de fonctions qui pourraient, sans autre démonstration, vérifier les mêmes propriétés:

“C'est ici le lieu de faire observer qu'on peut former, en combinant entre elles et avec les facteurs constants, une infinité de fonctions différentielles nouvelles qui toutes, d'après nos théorèmes généraux (...) seraient distributives et commutatives, tant entre elles qu'avec les facteurs constants. Ainsi, en affectant des notations particulières à des fonctions polynômes, telles, par exemple, que

$$az + bEz, az + bEz + cE^2z, dz + ad^2z + bd^3z + \dots, \dots;$$

*on formerait de nouveaux algorithmes qui auraient toutes leurs lois théoriques et pratiques dans les formules [établies par lui]. Le **Calcul des variations**, en particulier, est le résultat d'une considération de cette espèce. (...) Nous avons, dans ce qui précède, esquissé l'ensemble des lois qui rapprochent et mettent en communication toutes les fonctions différentielles, c'est-à-dire, la théorie la plus générale du **calcul différentiel**.”* [Essai..., p. 120]

Ses deux textes sont fortement représentatifs d'un questionnement philosophique (voire ontologique ou heuristique) et mathématique sur la légitimité des infinitésimaux. Si l'approche d'un tel travail et de ses aspects philosophiques ne pouvait se faire qu'avec des mathématiciens déjà confirmés, il leur a ouvert des horizons inattendus en montrant ses problématiques philosophiques et l'émergence d'une mathématique moderne fondée sur un rejet d'une autre mathématique, et sur un apriorisme fortement fonctionnel et algébriste. La lecture des *Réflexions*, écrites en réaction contre la *Réfutation* de Wronski, a parachevé cette étude sur le lien entre mathématiques et philosophie: Wronski critique au nom de Kant le rejet des infinitésimaux chez Lagrange: Servois rejette le « transcendantalisme » de Kant au nom d'une vision algébriste et anti-infiniste de l'analyse.

De nombreux extraits de ce texte ont fait l'objet d'études par des groupes d'étudiants, et nous terminerons par ce seul exemple:

Wronski (cité par Servois):

« Le soin d'éviter l'*infini*, dans des recherches mathématiques, prouve incontestablement, outre une routine aveugle, une véritable ignorance de la signification de cette idée (...) Quelques grands que puissent être les travaux de certains géomètres, le soin qu'ils mettent à imiter les anciens, dans l'exclusion de l'idée d'*infini*, prouve, d'une manière irréfragable, qu'ils ne sont pas à la hauteur à laquelle la science est portée depuis Leibniz, puisqu'ils évitent cette région élevée où se trouve le principe de la génération des quantités, pour venir ramper dans la région des sens ».

Servois critique de Wronski et du 'transcendantalisme »:

« Je me rappelle fort bien que Kant, trouvant l'*infini* dans la *raison pure* et le *fini* dans la *sensibilité*, a conclu de la coexistence de ces deux facultés dans l'être *cognitif*. (...). Il y a erreur palpable à soumettre au *calcul l'infini*, qui est du domaine d'une autre faculté: celle de l'*absolu*, ou ce qu'ils appellent la *raison pure*. (...). On marche devant celui qui nie le mouvement. Newton, d'Alembert, Lagrange, etc., ont marché; c'est-à-dire qu'ils ont mis en effet les principes du calcul différentiel hors de toute dépendance de la chose et même du mot *infini* »

Nous avons tenté ici de montrer rapidement:

1. Quelles conditions doit remplir l'étude d'un tel document avant de le numériser et le médiatiser.
2. Quelles utilisations didactiques (en mathématiques, histoire des sciences, philosophie) peuvent être faites à partir des articles ou thèmes du journal.

Nous aurions pu détailler d'autres exemples (en géométrie synthétique ou projective, avec la polémique entre Gergonne et Poncelet; en analyse, avec l'essai de calcul différentiel d'Ampère, etc.). Nous aurions pu aussi montrer que l'horizon peut s'élargir à l'histoire elle-même: les articles d'arithmétique politique de Gergonne nous renseignent sur le fonctionnement du vote censitaire, sa carrière de recteur sur le fonctionnement des institutions²⁹, etc.

Nous n'avons donc fait ici que survoler quelques unes des richesses de ce document et de son exploitation dans nos enseignements. Les témoignages que nous recevons en retour de la part d'enseignants et de chercheurs nous rendent optimistes quant à l'impact de la mise à la portée de tous des 9000 pages de ce premier journal de l'histoire des mathématiques, et nous motivent à poursuivre dans cette voie en participant à la numérisation et la mise en valeur d'autres périodiques et ouvrages didactiques représentatifs de leur temps.

La bibliographie est indiquée en notes de bas de page.

²⁹Cf. notre chapitre: C. Gérini, « Joseph Diez Gergonne (1771–1859), recteur sous la Monarchie de Juillet: le zèle d'un fonctionnaire et l'esprit critique d'un libre penseur », dans: Jean-François CONDETTE et Henri LEGOHEREL (dir.), Deux cents ans de fonction rectorale, Paris, Cujas, à paraître 2008.