Le triangle arithmétique

Le triangle arithmétique a une longue histoire puisqu'on en trouve des traces en particulier dans les vieux manuscrits chinois. En France, on l'associe au nom de Pascal qui fit imprimer en 1654 un *Traité du triangle arithmétique*. Hypercube vous propose un extrait du texte original dans lequel Pascal introduit « son » triangle arithmétique.

PASCAL.

Cette image, frontispice d'une édition des *Lettres provinciales*, montre le fonctionnement d'une lampe à huile qui permettait de lire et d'écrire la nuit au XVII[e] siècle.

G	1	2	3	4	5	6	Z
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	
2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**		
3	**1**	**3**	C **6**	**10**			
4	**1**	B **4**	P **10**				
5	**1**	**5**					
6	**1**						
V							

sixième base

quatrième rang parallèle

troisième rang perpendiculaire

« Triangle de Pascal », dont la construction est décrite page suivante.

« J'appelle Triangle arithmétique, une figure dont la construction est telle.
« Je mène d'un point quelconque, G, deux lignes perpendiculaires l'une à l'autre, GV, GZ, dans chacune desquelles je prends tant que je veux de parties égales et continues, à commencer par G, que je nomme 1, 2, 3, 4, etc. ; et ces nombres sont les *numéros* des divisions des lignes.
« Ensuite je joins les points de la première division qui sont dans chacune des deux lignes par une autre ligne qui forme un triangle dont elle est la base.
« Je joins ainsi les deux points de la seconde division par une autre ligne, qui forme un second triangle dont elle est la base.
« En joignant ainsi tous les points de division qui ont un même *numéro*, j'en forme autant de triangles et de bases.
« Je mène, par chacun des points de division, des lignes parallèles aux côtés, qui par leurs intersections forment de petits carrés que j'appelle cellules. »
« Or, les nombres qui se mettent dans chaque cellule se trouvent par cette méthode :

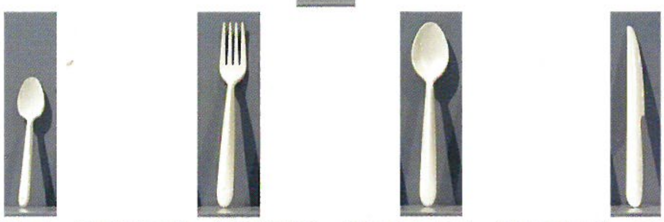
Le nombre 1 est placé dans toutes les premières cellules en haut et à gauche.

« Et chacun des autres est spécifié par cette seule règle :
« Le nombre de chaque cellule est égal à celui de la cellule qui la précède dans son rang perpendiculaire, plus celui de la cellule qui la précède dans son rang parallèle.
Ainsi la cellule P, c'est-à-dire le nombre de la cellule P, égale la cellule C, plus la cellule B, (10 = 6 + 4) et ainsi des autres. »

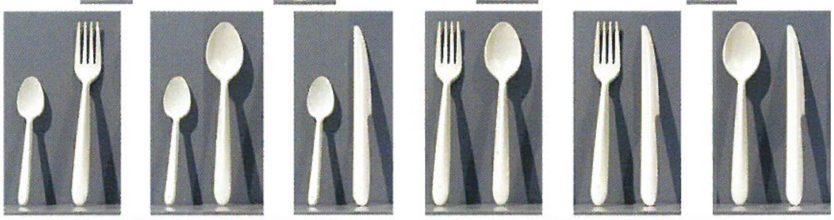
Les 16 combinaisons de 4 objets

Il y a 1 manière
de ne rien choisir.

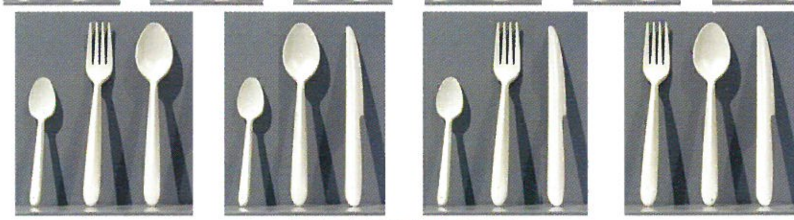
Il y a 4 manières
de choisir 1 objet.



Il y a 6 manières
de choisir 2 objets.



Il y a 4 manières
de choisir 3 objets.



Il y a 1 manière
de tout choisir.

« Le mot de Combinaison a été pris en plusieurs sens différents, de sorte que, pour ôter l'équivoque, je suis obligé de dire comment je l'entends.

« Lorsque de plusieurs choses on donne le choix d'un certain nombre, toutes les manières d'en prendre autant qu'il est permis entre toutes qui sont présentées, s'appellent ici les différentes combinaisons.

« Par exemple, si de quatre choses exprimées par ces quatre lettres, A, B, C, D, on permet d'en prendre, par exemple, deux quelconques, toutes les manières d'en prendre deux différentes dans les quatre qui sont proposées, s'appellent Combinaisons.

« Ainsi on trouvera, par expérience, qu'il y a six manières différentes d'en choisir deux dans quatre ; car on peut prendre A et B, A et C ou A et D, ou B et C, ou B et D, ou C et D.

« Je ne compte pas A et A pour une des manières d'en prendre deux ; car ce ne sont pas des choses différentes, ce n'en est qu'une répétée.

« Ainsi je ne compte pas A et B et puis B et A pour deux manières différentes ; car on ne prend en l'une ou l'autre manière que les deux mêmes choses, mais d'un ordre différent seulement ; et je ne prends point garde à l'ordre.

« On trouvera de même, par expérience, qu'il y a quatre manières de prendre trois choses dans quatre ; car on peut prendre ABC, ou ABD, ou ACD, ou BCD.

« Enfin on trouvera qu'on n'en peut prendre quatre dans quatre qu'en une manière, savoir, ABCD.

« Je parlerai donc en ces termes :

La multitude des combinaisons de 1 dans 4 est 4.

La multitude des combinaisons de 2 dans 4 est 6.

La multitude des combinaisons de 3 dans 4 est 4.

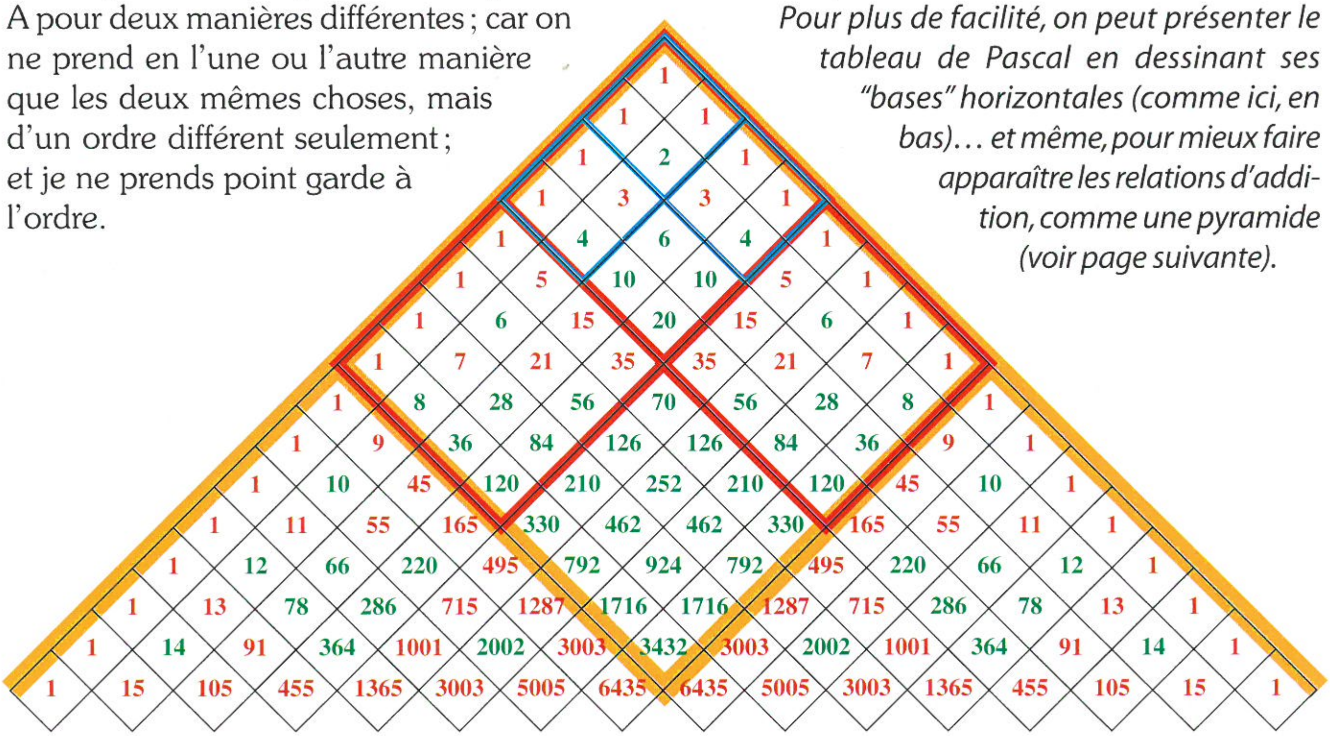
La multitude des combinaisons de 4 dans 4 est 1. »

Les "multitudes de combinaisons" parmi 4 choses (4, 6, 4, 1) sont données par les cellules de la 5e base du triangle de Pascal.

Ainsi lit-on dans les cellules de la ne base, les différentes combinaisons de 1, de 2, de 3, … parmi (n – 1) choses.

Par exemple, il y a 792 manières de choisir 5 choses parmi 12.

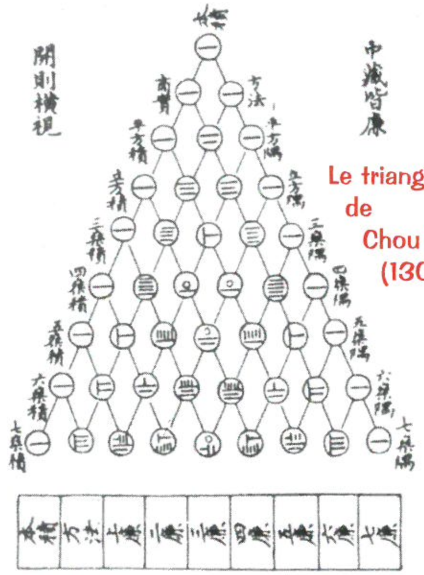
Pour plus de facilité, on peut présenter le tableau de Pascal en dessinant ses "bases" horizontales (comme ici, en bas)… et même, pour mieux faire apparaître les relations d'addition, comme une pyramide (voir page suivante).



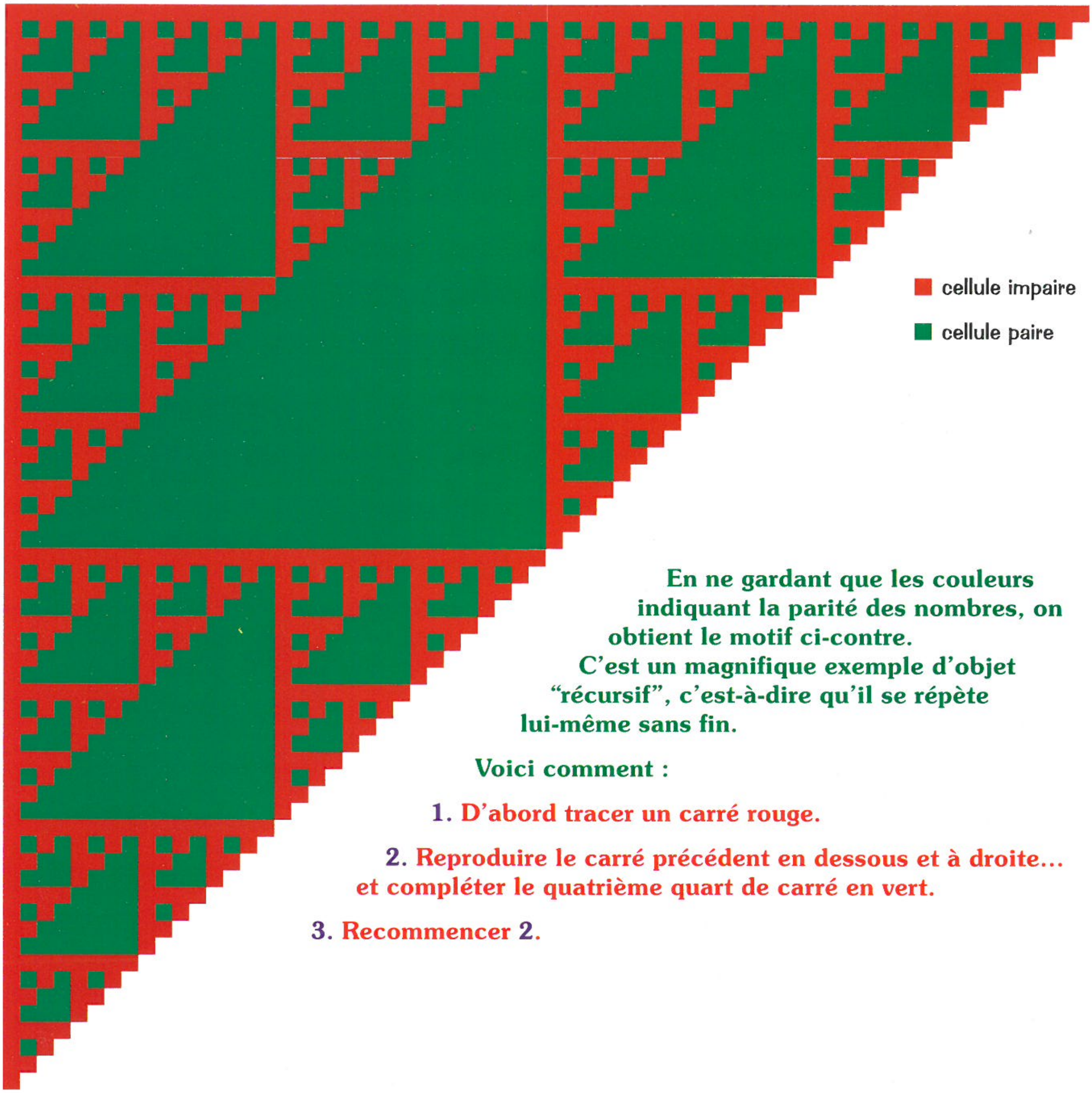
Le tableau de Pascal ci-dessus, est développé jusqu'à sa 16e base.
Les couleurs des nombres marquent leur parité.

La « pyramide de Pascal », une autre représentation du « triangle de Pascal » !

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1



Le triangle de Chou Chi Kie (1303)



cellule impaire

cellule paire

Triangle de Pascal, modulo 2

En ne gardant que les couleurs indiquant la parité des nombres, on obtient le motif ci-contre. C'est un magnifique exemple d'objet "récursif", c'est-à-dire qu'il se répète lui-même sans fin.

Voici comment :

1. D'abord tracer un carré rouge.

2. Reproduire le carré précédent en dessous et à droite… et compléter le quatrième quart de carré en vert.

3. Recommencer 2.