Curiosité

Efface les traces !

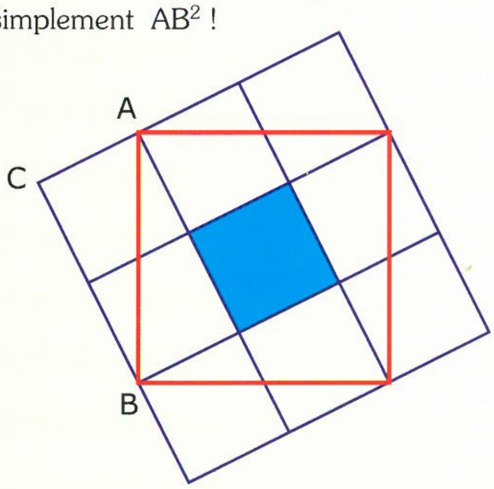
Prenez une figure sur laquelle il est facile d'identifier longueurs et aires, effacez quelques tracés, et les problèmes les plus élémentaires deviennent de redoutables casse-têtes.

Prenons un quadrillage bleu d'aire unité (figure ci-contre) : le carré bleu U. On peut y faire apparaître un carré rouge.

L'aire du grand carré bleu vaut 9U.

Combien mesure l'aire du carré rouge ?

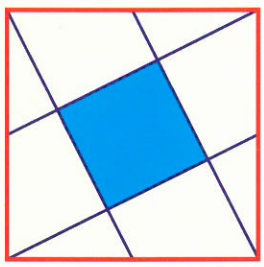
C'est tout simplement AB^2 !



D'après le théorème de Pythagore,
$AB^2 = AC^2 + BC^2$, soit $AB^2 = 1^2 + 2^2 = 5$.

Et donc, il faut simplement cinq carrés bleus pour constituer l'aire du carré rouge.

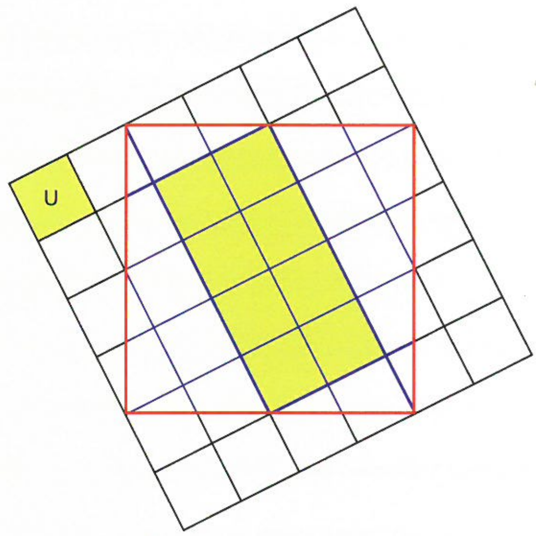
Si on efface les traces, cela devient moins évident :



Calculez l'aire du carré bleu par rapport à l'aire du carré rouge.

Un autre exemple

Reprenons notre quadrillage bleu que nous doublons. Le carré unité devient *u*.



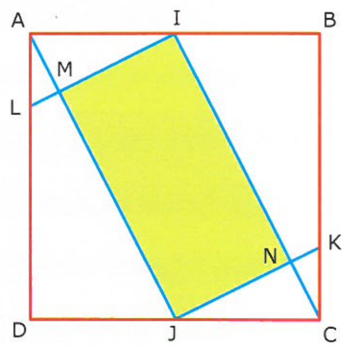
Faisons apparaître un nouveau tracé jaune.
L'aire jaune vaut 8*u*. L'aire du carré rouge, 5U, vaut 20*u*. Le rapport des deux aires est 2/5
Effaçons les traces pour voir ...
pour ne plus voir, en fait ...

Ce qui donne cet exercice bien moins connu :

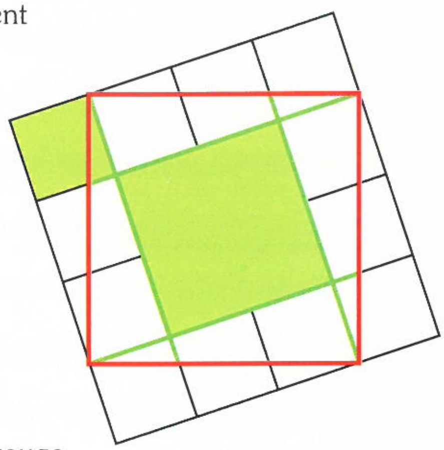
Soient ABCD un carré, I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD].

Soient L et K les points situés au quart des côtés [BC] et [AD].

Démontrer que INJM est un rectangle et calculer son aire en fonction de l'aire du carré ABCD.



Prenons à présent un nouveau quadrillage dans lequel nous faisons apparaître un carré rouge.

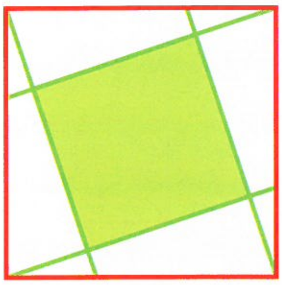


L'aire du grand carré colorié en vert vaut 4U.

L'aire totale du quadrillage vaut 16U.

L'aire du carré rouge vaut (16 – 6)U = 10U.

Donc, le rapport de l'aire du carré vert sur l'aire du carré rouge est 2/5.



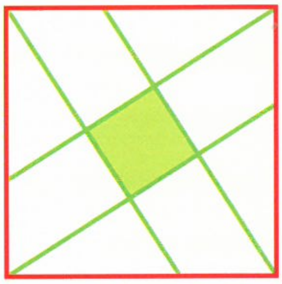
L'exercice s'écrit de lui même :

Les côtés sont coupés au tiers.

Calculer l'aire du carré vert par rapport à l'aire du carré rouge.

Variante

Sauriez vous retrouver les traces de cet exercice ?



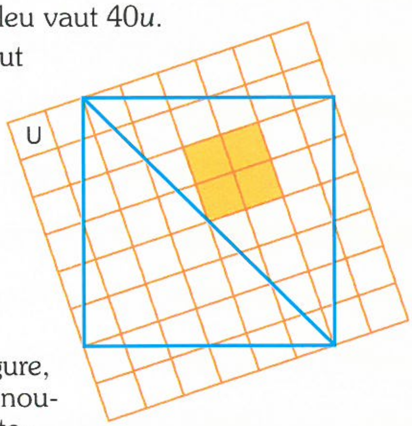
Les côtés sont coupés au tiers.

Calculer l'aire du carré vert par rapport à l'aire du carré rouge.

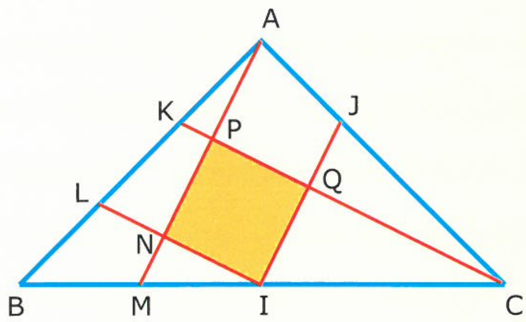
Doublons notre quadrillage, comme précédemment. Le carré unité est u.

L'aire du carré bleu vaut $40u$.

L'aire orange vaut $4u$. L'aire du triangle bleu est $20u$. Le rapport des deux aires est 1/5.



En effaçant les traces et en réorientant la figure, on aboutit à un nouvel exercice, nettement plus difficile :

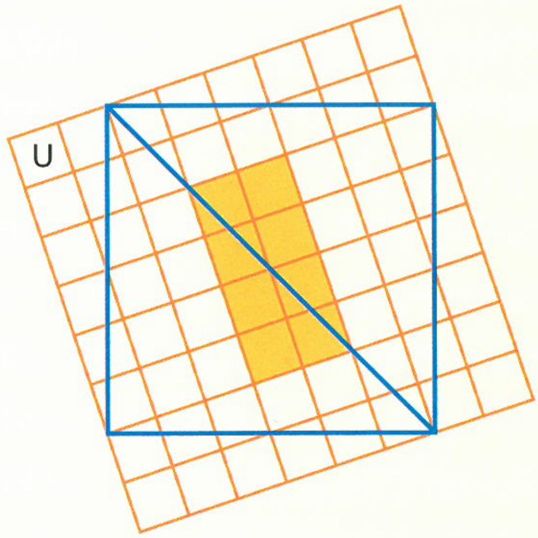


Soient ABC un triangle rectangle isocèle, K et J au tiers des côtés respectifs [AB] et [AC] à partir de A, L aux 2/3 de [AB].

Soit I le milieu du côté [BC], M le milieu de [BI].

Démontrer que INPQ est un carré et calculer son aire en fonction de l'aire du triangle ABC.

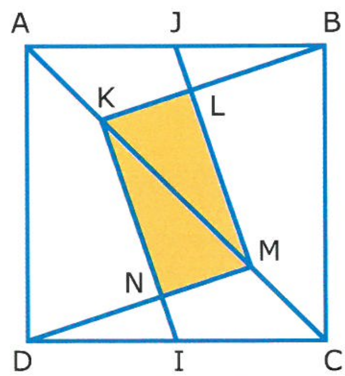
Sur la même figure, faisons apparaître dans le carré bleu un rectangle orange.



L'aire orange vaut 8U. L'aire du carré bleu est 40U. Le rapport des deux aires est donc 1/5.
En effaçant les traces, on construit ce nouvel exercice :

Soient ABCD un carré, I et J les milieux respectifs des côtés [AB] et [CD]. Les points K et M sont au quart de la diagonale [BC].

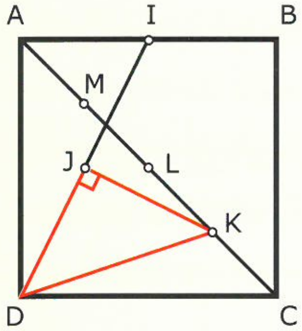
Démontrer que KLMN est un rectangle et calculer son aire en fonction de l'aire du carré ABCD.



Curiosité

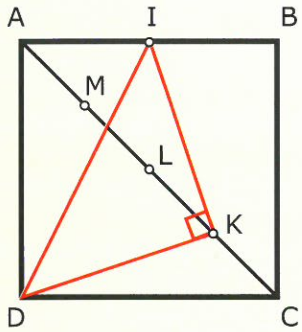
Et voilà quelques exercices. A vous de retrouver les traces !!!

1. Soit ABCD un carré, I le milieu de [AB] et J le milieu de [ID]. La diagonale [AC] est partagée en quatre segments de même longueur.



Démontrer que le triangle DJK est isocèle rectangle et calculer son aire en fonction de l'aire de ABCD.

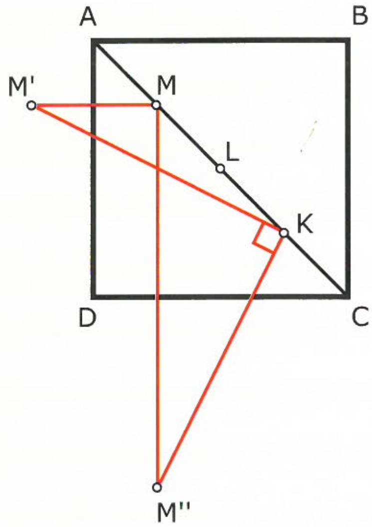
2. Habillé autrement :



Soit ABCD un carré. I le milieu de [AB]. La diagonale [AC] est partagée en quatre segments de même longueur.

Démontrer que le triangle IKD est isocèle rectangle et calculer son aire en fonction de l'aire du carré ABCD.

3. Soit ABCD un carré.



La diagonale [AC] est partagée en quatre segments de même longueur.

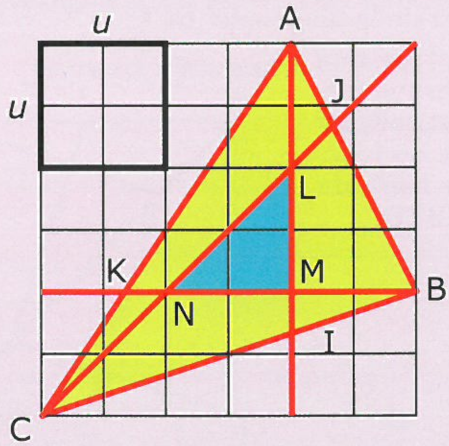
On appelle M' et M" les symétriques du point M par rapport aux côtés respectifs [AD] et [CD].

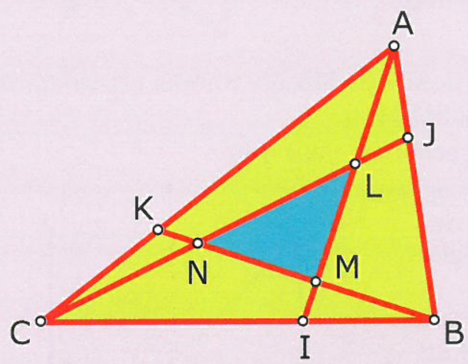
Démontrer que le triangle M'KM" est isocèle rectangle.

Jean-Michel SLOWIK

Un dernier exemple spectaculaire

On a tracé un triangle ABC.
Les longueurs des côtés sont $AB = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{10}$ et $AC = \sqrt{13}$.
Les points I, J et K sont aux tiers des côtés.
Le triangle LMN est isocèle rectangle, d'aire 1/2.





... En effaçant les traces et en tournant la figure, on aura du mal à démontrer que les "tritianes" du triangle déterminent un triangle rectangle isocèle d'aire 1/2 !

J-M. S.