Curiosité

Des puzzles de Fibonacci

Fils d'un marchand italien, Léonard de Pise, dit Fibonacci a été l'un des précurseurs de la renaissance des mathématiques en Occident (voir Hypercube spécial 32-33). Voici de curieux puzzles inspirés par les suites qui portent son nom.

COMPLÉTEZ LA suite 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... Vous avez certainement déjà trouvé la réponse, et donné quelques autres termes : chacun des termes, à partir du troisième, est la somme des deux termes précédents :

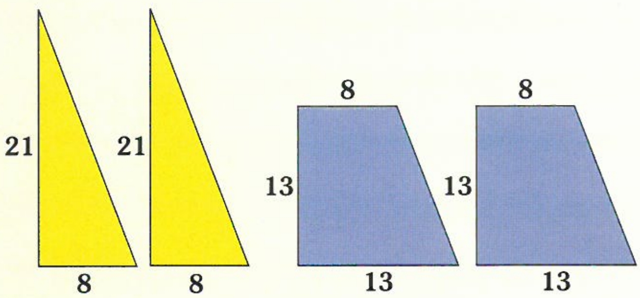
$2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, ... $21 = 13 + 8$, $34 = 21 + 13$, $55 = 34 + 21$ ...

Cette suite, Fibonacci, l'aurait étudiée vers l'an 1200 pour résoudre un problème sur la reproduction des lapins (voir Hypercube 32-33). On la retrouve au détour de nombreuses situations mathématiques.

Le puzzle de Lewis Carroll

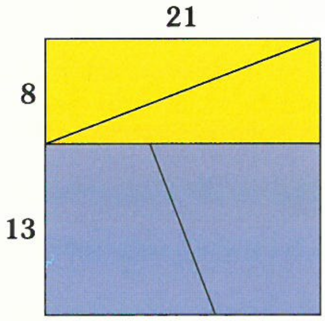
Quittons Léonard et ses lapins, et faisons un saut de 700 ans pour chercher un petit problème proposé par le révérend Charles Lutwidge Dodgson, alias Lewis Carroll, logicien et auteur de "Alice au pays des merveilles".

Avec les quatre pièces ci-dessous, formez un carré, puis un rectangle, et comparez les aires de ces deux figures (vous pouvez reproduire et découper ce puzzle avec une unité de 1 cm – ici, chaque unité mesure 2mm).



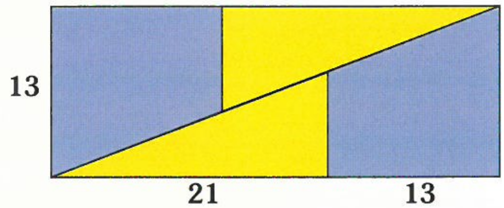
En bon lecteur d'Hypercube, vous avez sans doute déjà trouvé ce deuxième défi : les dimensions des pièces vous auront mis sur la piste, et au passage, vous aurez sûrement repéré les termes successifs de notre suite de Fibonacci !

Voici les deux figures, et le calcul de leur aire :



Aire du carré :
$21 \times 21 = 441$

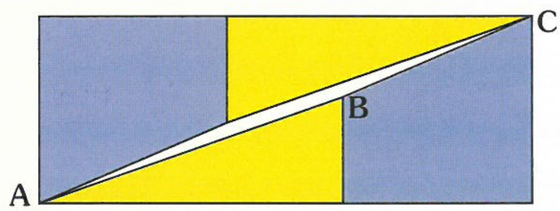
Aire du rectangle :
$13 \times 34 = 442$



Les mêmes pièces, disposées différemment,occupent des aires différentes ! Comment cela est-il possible ?

Au long de la diagonale

C'est qu'une unité en plus ou en moins, sur 442 (ou 441), ce n'est pas beaucoup, et il est facile de la dissimuler au long de la diagonale, comme on peut le voir ci-dessous (l'effet a été exagéré) : les pièces ne sont pas jointives, il y a un trou en forme de parallélogramme.



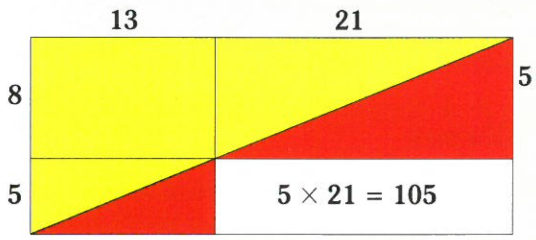
Nos lecteurs les plus expérimentés pourront chercher pourquoi A, B et C ne sont pas alignés, et trouver un moyen de comparer les inclinaisons des segments [AB] et [BC].

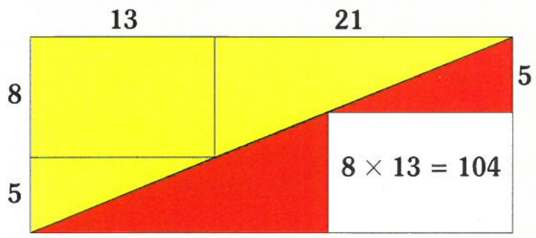
Encore plus fort, ce puzzle fonctionne en remplaçant 8 et 13 et 21 par n'importe quels nombres successifs de la suite de Fibonacci : l'assemblage du carré est exact, et le rectangle présente alternativement un trou sur la diagonale (aire du rectangle plus grande que celle du carré) ou un chevauchement (aire du rectangle plus petite que celle du carré). Dans ce dernier cas, on peut fabriquer un "rectangle" imperceptiblement renflé.

Chaque fois, la différence est d'une unité : la supercherie est de plus en plus difficile à détecter lorsque le carré grandit. Revers de la médaille, le spectateur pensera rapidement que l'unité manquante peut se cacher dans la précision de l'assemblage.

D'autres puzzles

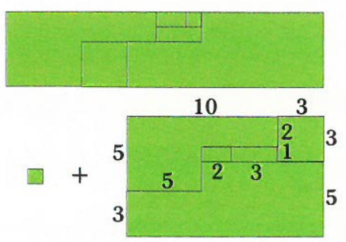
Mais revenons à nos dimensions 8, 13 et 21, et modifions un peu le puzzle pour faire apparaître, sans calcul, la différence des aires. Partons du mécanisme suivant :





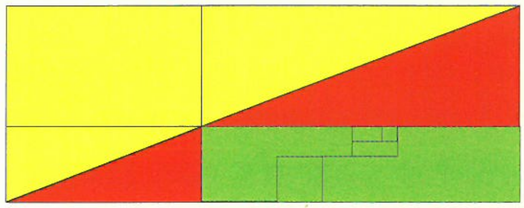
La construction du haut est exacte, celle du bas ne l'est pas tout à fait : l'unité manquante se cache le long de la diagonale du rectangle.

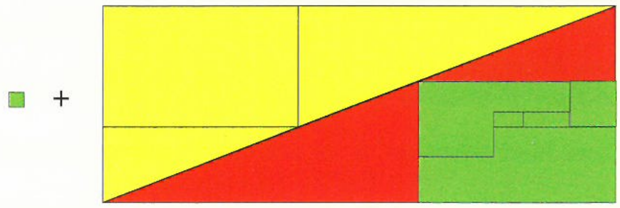
Utilisons une autre construction, également basée sur les termes de la suite de Fibonacci, pour mettre en valeur l'unité manquante dans le rectangle :



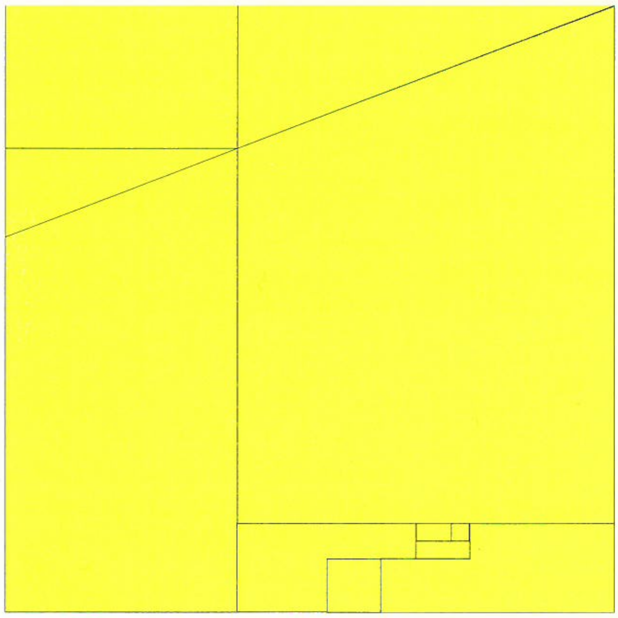
Les pièces vertes occupent le rectangle 21 × 5 ; quand on les dispose dans le rectangle 13 × 8, le petit carré en excès reste de côté (pas de tricherie, les deux assemblages sont parfaitement corrects).

Finalement, voici le schéma complet : le petit carré en excès correspond à l'espace occupé par le trou sur la diagonale.





Pour rendre le casse-tête plus difficile, il faut évidemment laisser toutes les pièces de la même couleur. Vous pouvez également l'habiller en carré, en rajoutant des rectangles de hauteur 21 sous les triangles mobiles. Vous pourrez, si vous le voulez, former des trapèzes, comme sur la figure ci-dessous, ou laisser les rectangles et les triangles sous forme de deux pièces séparées.



Évidemment, si vous voulez réaliser le casse-tête, il faut un travail très précis et des pièces bien rigides (carton fort ou plastique de 1mm d'épaisseur minimum, coupé au cutter).

L'idéal est de disposer le tout dans un cadre ajusté aux dimensions, comme les puzzles "Archimedia" de Gianni Sarcone, pour que l'effet reste encore plus mystérieux.

d'après A. Leroy, F. Vanneste