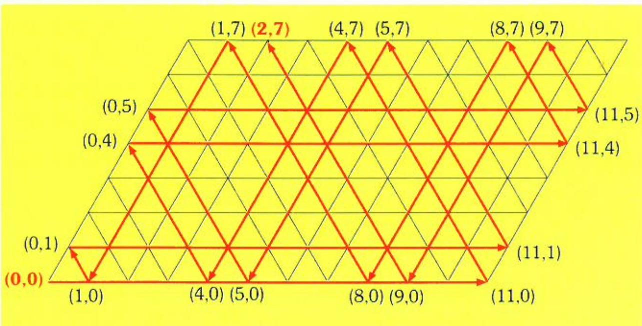
# Curiosité

# De l'eau dans le billard

**Armé de deux seaux de 7 litres et 11 litres, et d'une baignoire pleine d'eau, comment mesurer une quantité de deux litres en pratiquant le minimum de transvasements ?**
**Le problème est classique ... Pour le résoudre, munissez-vous donc d'un billard en forme de parallélogramme !**

TRACEZ, COMME CI-DESSOUS, un parallélogramme de côtés 7 et 11 unités sur un réseau de triangles équilatéraux.
L'axe horizontal indiquera les quantités d'eau dans le récipient de 11 litres,tandis que sur l'autre axe, nous lirons les quantités d'eau présentes dans le récipient de 7 litres.

## Rebonds




Au début la boule de billard est au point (0,0), en bas à gauche. Elle se déplace horizontalement jusqu'au bord droit du billard en (11,0) ce qui signifie qu'on remplit le récipient de 11 litres, et que celui de 7 litres est vide.

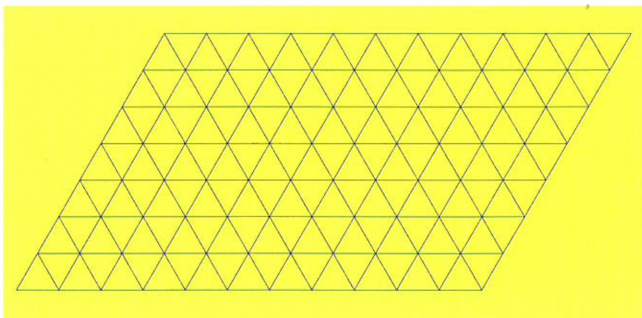
La boule rebondit et atteint un autre bord de la table en (4,7), ce qui signifie que l'on a vidé 7 litres du récipient de 11 litres dans celui de 7 litres.

Le parcours continue par rebond vers le point (4,0) : les 7 litres ont regagné la baignoire.

On atteint (0,4) : on a transvasé les 4 litres du récipient de 11 litres vers celui de 7litres ...

Après un trajet **en 18 étapes** qui mène au point (2,7), on obtient exactement 2 litres dans le récipient de 11 litres.

Il est possible de faire plus vite, **en 14 étapes**, à condition de remplir d'abord le récipient de 7 litres c'est à dire de lancer la boule au début de (0,0) vers (0,7). Vous pouvez le vérifier sur le réseau triangulaire ci-dessous...



## Sans baignoire

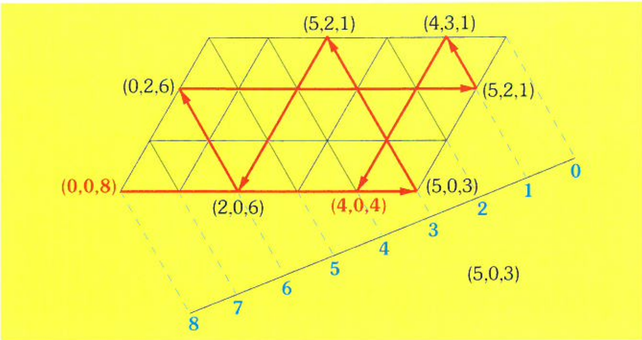
Imaginons maintenant que nous disposons de trois récipients de capacités connues (sans baignoire). Exemple, **le problème de Tartaglia** :

*Un vase de 8 litres est plein d'eau, on utilise deux autres vases de 5 et 3 litres : comment obtenir par transvasement deux fois 4 litres ?*

L'astuce consiste ici à représenter le vase de 8 litres sur une droite D parallèle à la grande diagonale du parallélogramme de côtés 5 et 3 : lorsque les deux petits vases sont vides, le grand est plein et réciproquement (voir figure page suivante).

Sur D, le point marqué 8 correspond au point (0,0) du réseau triangulaire : il y a 8 litres dans le grand récipient, les deux autres sont vides.

Le point marqué 6, lui, est relié aux points (2,0), (0,2), (1,1) ce qui correspond, dans les récipients de




5, 3 et 8 litres, aux répartitions :
$2 + 0 + 6 = 8$, $0 + 2 + 6 = 8$, ou $1 + 1 + 6 = 8$.

Observez sur le billard le trajet en 7 étapes qui aboutit au point (4,0) : on obtient 4 litres dans le récipient de 5 litres, celui de 3 litres est vide et les 4 derniers litres sont dans le récipient de 8 litres.

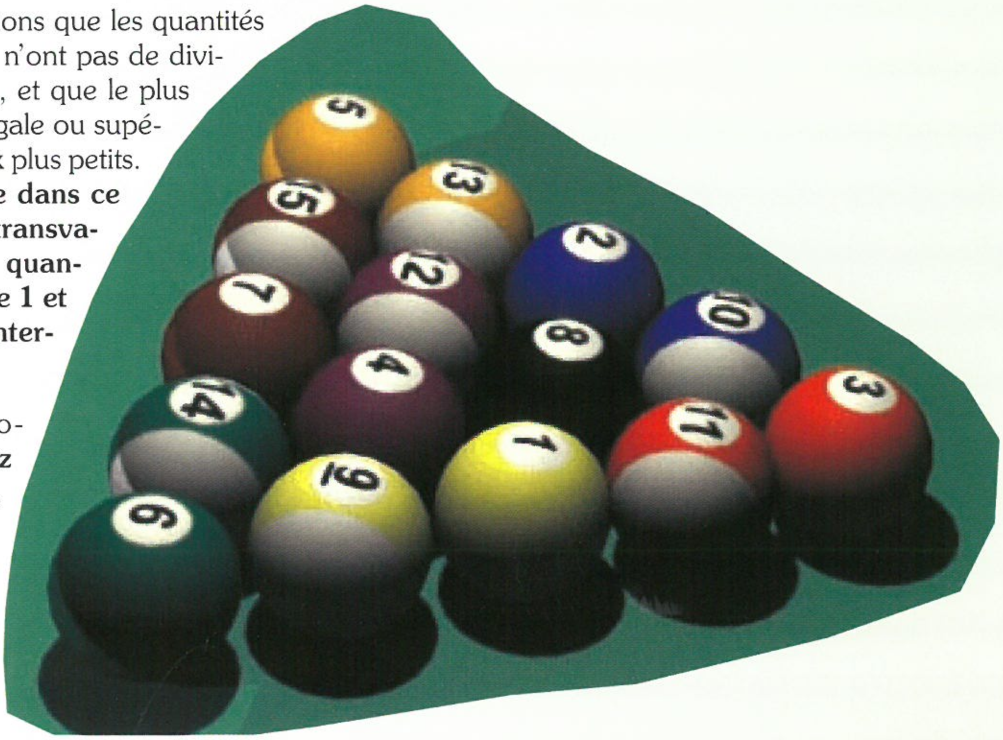
Cette méthode merveilleuse a été exposée pour la première fois en juillet 1939 par M.C.K. Tweedie dans "Mathematical Gazette". Les lecteurs curieux en trouveront une version française dans le superbe "Mathématiques en instantanés" de H. Steinhaus.

## Pour aller plus loin ...

**1.** Pour des vases de 15, 16, et 31 litres , on peut obtenir toutes les quantités entières de 1 à 16 litres. **Réalisez les trajets nécessaires sur un parallélogramme de 16 sur 15.**

Plus généralement, imaginons que les quantités des deux plus petits vases n'ont pas de diviseur commun autre que 1, et que le plus grand a une contenance égale ou supérieure à la somme des deux plus petits. **Saurez-vous montrer que dans ce cas, on peut obtenir par transvasements successifs toute quantité entière comprise entre 1 et le volume du récipient intermédiaire ?**

**2.** Grâce à un parallélogramme de 6 sur 4, **vérifiez qu'avec des vases de 4, 6, et 10 litres il est impossible d'obtenir des nombres impairs de litres.**
(4 et 6 ont un diviseur commun : 2)



**3. Que se passe-t-il si le volume du récipient le plus grand est inférieur à la somme des deux autres ?**

Prenons l'exemple de 7, 9 et 12 litres. Le parallélogramme de 9 sur 7 devra être coupé à un coin : si vous suivez le trajet, vous arrivez à un moment au point (0,4) et avec vos 12 litres, vous ne pouvez aller plus loin que (8, 4) car $4 + 9 = 13$.

Les rebonds suivants vous conduiront vers un autre point limite du coin coupé : (5, 7).

Vous ne pourrez mesurer que les nombres de 1 à 5, de 7 à 9, et 12. Si vous aviez démarré du point (0, 7), la limite (7, 5) vous conduit à un circuit fermé entre les seuls nombres 5 et 7.

**4.** Pour terminer, un problème de Sam Loyd paru au 19e siècle dans son "Cyclopedia of puzzles" sans solution :

*Des soldats se procurent un tonnelet de 10 litres de bière. Ils y goûtent, et utilisent des chopes de 3 et 5 litres. Le reste est rapporté à la caserne en trois parts égales en utilisant le tonnelet et les deux chopes. Combien ont-ils bu de litres et comment s'effectue le partage en le moins d'étapes possibles ?*

**Dominique Souder, sur des notes prises par Alain Fily, du lycée Valin (La Rochelle)**