

# Diagrammes de Karnaugh

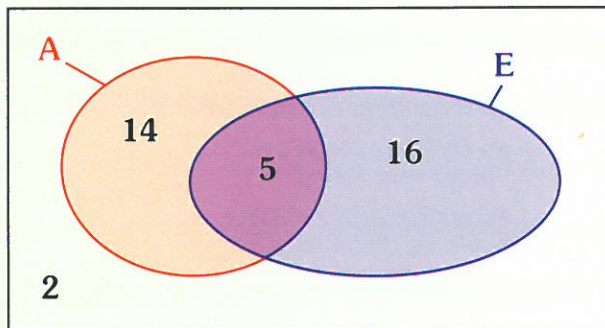
De nombreux problèmes faisant intervenir la logique se résolvent à l'aide de diagrammes. Vous avez peut-être rencontré les diagrammes d'Euler-Venn, les traditionnelles "patates". Découvrons les diagrammes de Karnaugh, plus performants.

**C**ommençons par une énigme simple, une énigme à deux variables :

Dans cette classe, 19 élèves font de l'anglais, 21 de l'espagnol, 5 pratiquent ces deux langues, et 2 élèves aucune des deux.

Combien y-a-t-il d'élèves dans la classe ?

La solution se fait classiquement à l'aide d'un diagramme de Venn :

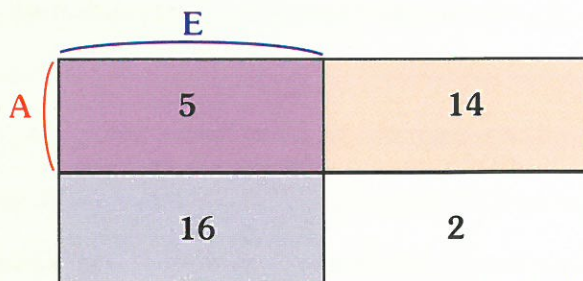


On dessine des patates représentant les deux ensembles A et E de linguistes, on commence à remplir l'intersection par le nombre 5 correspondant aux élèves pratiquant à la fois les deux langues, le reste des informations permet de compléter les trois autres régions du dessin.

On trouve que la classe a  $2+14+5+16=37$  élèves.

## Diagramme de Karnaugh

Mais on peut également parvenir à la solution à l'aide d'un diagramme dit de Karnaugh :



Les élèves faisant de l'Anglais sont dans la première ligne, ceux qui font de l'Espagnol dans la première colonne.

La case située à la fois dans la deuxième ligne et dans la deuxième colonne correspond aux élèves ne faisant ni Anglais ni Espagnol. On place les nombres 5, 14, 16 et 2 comme précédemment.

On remarque que les deux tactiques de solution utilisent chacune un dessin à 4 régions.

## Une énigme à trois variables

Passons maintenant à un problème plus compliqué :

A l'Entente Sportive de ce petit village, on peut faire trois sports : le foot (F), le tennis (T) et le basket (B).

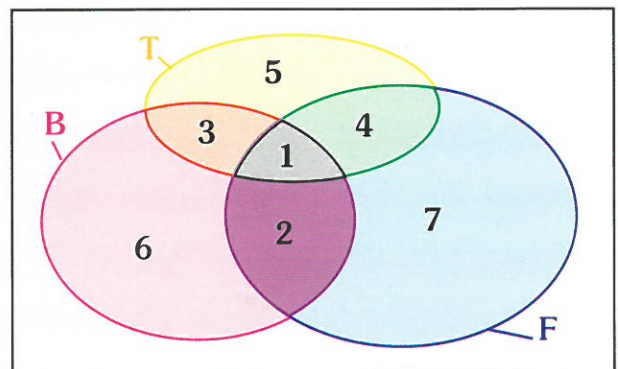
14 jeunes pratiquent le Foot, 12 le Basket, 3 font ces deux sports et 14 ne pratiquent aucun des deux.

De plus, parmi les joueurs de Tennis, 5 font aussi du Foot, et 4 aussi du Basket.

Une seule personne pratique ces trois sports.

Combien y-a-t-il de licenciés à l'Entente ?

On peut encore résoudre ce problème avec un diagramme de Venn :

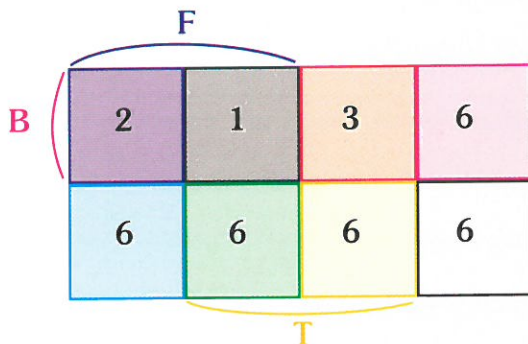


On place dans l'ordre les nombres 1, puis  $2 (= 3 - 1)$ ,  $4 (= 5 - 1)$ ,  $3 (= 4 - 1)$ ,  $7 (= 14 - 4 - 2 - 1)$ ,  $6 (= 12 - 1 - 2 - 3)$ ,  $5 (= 14 - 6 - 3)$ . On n'oublie pas

le 0.

Il y a finalement au total  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$ , soit 28 licenciés.

Et voici la solution avec le diagramme de Karnaugh :



Les joueurs de Foot sont disséminés dans les deux colonnes de gauche, ceux de Basket dans la ligne du haut, ceux de Tennis dans les deux colonnes centrales. La case en bas à droite correspond à ceux qui ne pratiquent aucun des trois sports de l'Entente, aucun licencié n'est dans ce cas.

On remarque que les deux dessins comportent 8 régions, ce qu'on pouvait deviner : on peut pratiquer ou non chacun des sports, ce qui représente chaque fois deux possibilités. Avec toutes les combinaisons imaginables pour les trois sports, ces possibilités se multiplient, on parvient bien en définitive à  $2^2 \times 2$ , soit 8 cas possibles.

## Toujours plus dur...

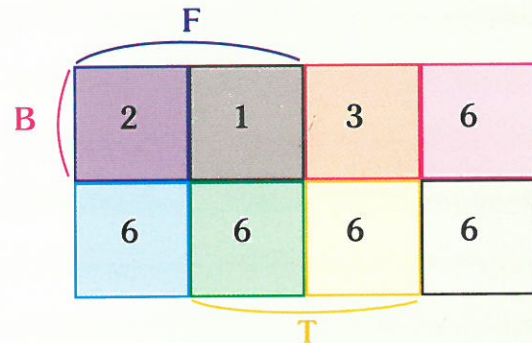
Augmentons la complexité d'un cran, et passons à une énigme à quatre variables :

Dans cette classe du collège de Marans, les jeux maths, on trouve ça marrant !

- 7 élèves sont inscrits aux 4 concours individuels suivants : le championnat FFJM, le Logic'flip, le Kangourou, et le tournoi vendéen voisin de Saint Michel en l'Herm.
- encore mieux : aucun élève n'aurait l'idée de ne faire aucun de ces concours.
- on peut dire de chaque concours qu'un seul élève le fait à l'exclusion de tous les autres.
- pour toute combinaison de trois de ces concours, il y a exactement deux élèves qui participent à la fois aux trois.
- si on s'intéresse à ceux qui sont inscrits à exactement 2 épreuves, on en compte 5 pour l'ensemble championnat et Kangourou, aucun pour l'ensemble Logicflip et Kangourou, et un effectif identique que j'ai oublié pour toutes les autres combinaisons.
- il y a 20 candidats au Logic'flip dans la classe.
- Bien sûr, toute la classe participe au Rallye Mathématique Poitou-Charentes.

Au fait, combien cette classe a-t-elle d'élèves ?

On devine qu'en pratiquant le raisonnement de l'exemple précédent, on trouvera maintenant 16 régions. Mais cette fois, vous aurez du mal à réaliser un diagramme de Venn : essayez ! Utilisons plutôt un diagramme de Karnaugh :



On place 7 dans la case commune aux 4 concours, 0 dans la case correspondant à ceux qui ne font rien, 1 dans les 4 cases correspondant à un concours seul, 2 dans les cases relatives à 3 concours à la fois. On place ensuite le 5 et le 0 donnés par l'énoncé et la lettre x dans les cases correspondant à un nombre identique d'élèves faisant 2 concours exactement.

On additionne les élèves faisant le Logicflip  $2x + 14 = 20$  d'où  $x = 3$ . On obtient sans peine un total de 36 élèves ludomaniques dans cette classe.

Bibliographie : *Enigmes et jeux de logique, résolution et construction* par Yvon L'Hospitalier, éditions Eyrolles.

Dominique Souder

