

Les formules de l'autoroute

La famille Chamalot venait de rentrer de week-end. Le trajet sur l'autoroute avait été éprouvant car parsemé de trop nombreux bouchons.

- Ah, si les gens roulaient tous à une vitesse convenable au lieu de se traîner comme des escargots ! soupira Alice.

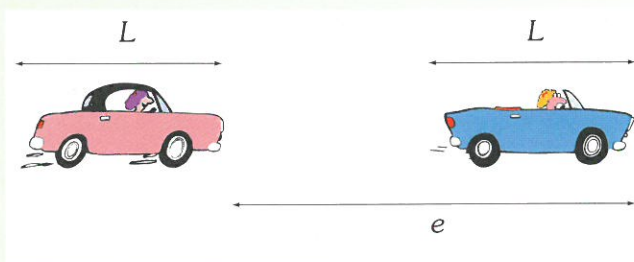
- **T**U VEUX DIRE que plus les voitures roulent vite plus il y a de voitures qui passent en une heure ? dit Nicolas. Dit comme cela, ça à l'air évident mais c'est totalement faux ! ajouta-t-il en riant.

- Comment cela ? s'étonna Alice qui prit immédiatement un papier et un crayon.

Les calculs d'Alice

Après avoir griffonné quelques calculs, elle s'adressa à son frère dont l'air supérieur l'agaçait profondément.

- Je suppose que **toutes** les voitures roulent avec la même vitesse V (en km/h) et maintiennent entre elles des espaces égaux et constants. Je désigne par e (en m) cet espace. Je suppose également que toutes les voitures ont la même longueur L que j'évalue à 5 m et je suppose enfin que l'autoroute comporte deux files.



- Dans ces conditions, Monsieur-je-sais-tout, il est clair que le débit D de l'autoroute est donné par la formule $D = \frac{2000V}{e + L}$.

La densité des voitures sur l'autoroute est alors :

$$d = \frac{D}{V} = \frac{2000}{e + L}$$

- Comment définis-tu le débit de l'autoroute et la densité des voitures ? questionna Nicolas.

- D est le nombre de voitures qui passent en une heure devant un observateur placé au bord de l'autoroute tandis que d est le nombre des voitures par km d'autoroute.

Pouvez-vous démontrer ces deux formules ?

- Prenons $e = 35$ m dit Alice. Avec un tableur, il est très facile de calculer D et d pour diverses valeurs de la vitesse V .

Vitesses (en km/h)	Débit D (en voitures par h)	Densité d (en voitures par km)
0	0	50
10	500	50
20	1000	50
30	1500	50
40	2000	50
50	2500	50
60	3000	50
70	3500	50
80	4000	50
90	4500	50
100	5000	50
110	5500	50
120	6000	50
130	6500	50

- Tu peux constater que le débit de l'autoroute est bien proportionnel à la vitesse, dit Alice. J'avais raison !

Les calculs de Nicolas

- Tes calculs sont exacts, dit Nicolas, mais tu as oublié une chose, c'est que la distance qui sépare deux voitures ne peut pas être constante mais doit augmenter avec la vitesse. En effet, plus on va vite plus il faut d'espace devant soi pour s'arrêter ! Regarde le tableau suivant. Il donne les distances d'arrêt d'une voiture en fonction de sa vitesse.

Vitesse (km/h)	Distance d'arrêt (m)
40	8
50	12
60	18
70	24
80	32
90	40
100	48
110	58
120	72
130	85

– Il se lit ainsi : si le conducteur d'une voiture qui roule à 130 km/h freine, il parcourt encore 85 m avant de s'immobiliser.

– Et alors ? fit Alice ?

– Et alors reprit Nicolas, les voitures qui se suivent sur l'autoroute doivent respecter cette distance pour des raisons de sécurité. Les données du tableau me permettent d'affirmer que la distance d'arrêt a quand une voiture roule à la vitesse V km/h est donnée par la formule $a = 0,005 V^2$.

– J'en déduis que $D = \frac{2000 V}{0,005 V^2 + L}$,

et que $d = \frac{2000}{0,005 V^2 + L}$.

Comment Nicolas a-t-il obtenu ces formules ?

Pour les mêmes valeurs de la vitesse V , un tableau nous permet de construire le tableau suivant :

Vitesses (en km/h)	Débit D (en voitures par h)	Densité d (en voitures par km)
0	0	400
10	3636	364
20	5714	286
30	6316	211
40	6154	154
50	5714	114
60	5217	87
70	4746	68
80	4324	54
90	3956	44
100	3636	36
110	3359	31
120	3117	26
130	2905	22

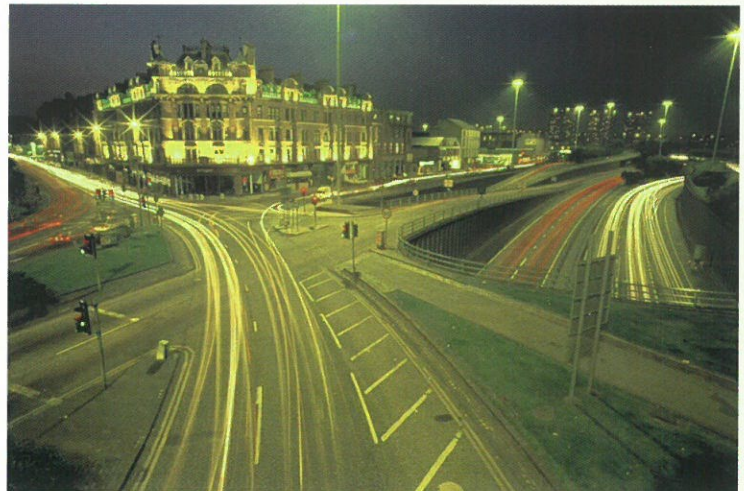


Photo Corel

Une surprise

– Tu peux constater qu'à partir d'une vitesse de l'ordre d'une trentaine de km/h, le débit de l'autoroute **diminue** alors que la vitesse des voitures **augmente** ! C'est le calcul de la densité de voitures qui te donne la clé du mystère : au fur et à mesure que la vitesse des voitures augmente, les impératifs de sécurité font qu'il y a de moins en moins de voitures par km d'autoroute !

En fait, on démontre que le débit D est maximum et vaut $2000 \sqrt{0,005 L}$ pour $V = \sqrt{\frac{L}{0,005}}$.

Pour $L = 5$ m, on obtient $V_{max} \approx 32$ km/h et $D_{max} \approx 2000 \sqrt{0,005 \times 5}$ soit 6324 véhicules. La densité de voitures vaut alors 198.

Michel Rousselet

Sources : Gilles Pagès. Comment faire sauter les bouchons ? Science et Vie Junior. Les indispensables équations du second degré. Décembre 1998.

