Euclide le magnifique

Son nom est marqué à jamais dans les annales des mathématiques, au point que la géométrie classique a été baptisée géométrie euclidienne. Pendant plus de 2000 ans, Euclide est resté le symbole incontesté du raisonnement déductif en mathématiques, suivi et admiré tour à tour par les savants arabes et occidentaux.

Le personnage est quasiment inconnu : à peine sait-on qu'il a vécu au III^{e} siècle avant Jésus-Christ, à Alexandrie, où il enseigna au Muséum sous le règne de Ptolémée premier.

Son œuvre, en revanche, traversa les siècles, et demeura longtemps une incontournable référence pour l'apprentissage de la géométrie, au point que la réforme des "mathématiques modernes", à la fin des années 60, se fit aux cris de "à bas Euclide !". D'après les historiens des sciences, son œuvre principale, "Les Éléments", divisée en 13 livres, n'est peut-être pas celle d'un auteur unique. Toujours est-il qu'elle rassemble, en les complétant, toutes les connaissances mathématiques de l'époque.

Euclide, par Juste de Gand (XV^{e} siècle)

Les six premiers livres concernent la géométrie plane et le calcul sur des quantités géométriques (grandeurs, proportions ...) ; les quatre suivants exposent les théories de l'arithmétique et des quantités irrationnelles ; enfin, les trois derniers présentent les résultats fondamentaux de la géométrie dans l'espace.

Le principe : on part de quelques notions considérées au départ comme des évidences, les axiomes, et de quelques autres sur lesquelles on demande l'accord du lecteur, les postulats, et on procède ensuite pas à pas par des déductions parfaitement contrôlées jusqu'à obtenir les résultats (propositions ou théorèmes).

Le postulat douteux

Le cinquième postulat, par exemple, revient à admettre qu'il n'existe qu'une seule parallèle à une droite passant par un point donné. Les mathématiciens ont très longtemps débattu pour savoir si ce postulat était indispensable, ou si on pouvait le déduire des autres, jusqu'à ce qu'on construise au XIX^{e} siècle des géométries *non-euclidiennes* en admettant qu'il peut n'y avoir aucune parallèle, ou plusieurs parallèles à une droite passant par un point donné. Le cinquième postulat était donc bien indispensable pour construire la géométrie classique telle que la concevait Euclide.

Outre les 13 volumes des éléments, Euclide a laissé également dquelques autres ouvrages de mathématiques, des traités de musique, d'optique, d'astronomie, de mécanique ...

Hypercube vous propose ci-après en langage actuel deux résultats extraits des "Éléments".

L'infinité des nombres premiers

Voici un résultat d'arithmétique extrait du livre IX des Éléments, qui concerne les nombres premiers. Pour ceux qui n'en auraient jamais entendu parler (en France, c'est en troisième qu'ils sont cités officiellement pour la première fois), rappelons qu'un nombre premier est un nombre qui possède exactement deux diviseurs entiers : 1 et lui-même. Ainsi, 2, 3, 5, 23, 37 sont des nombres premiers, mais pas 4 (divisible par 2), ni 21 (divisible par 3 et 7), ni 12 (divisible par 2, 3, 4 et 6).

Euclide prouve donc dans le livre IX que les nombres premiers forment un ensemble infini, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de nombre premier plus grand que tous les autres.

Pour le prouver, il utilise un raisonnement judicieux dont le principe, toujours utilisé de nos jours, est qualifié de "raisonnement par l'absurde" : pour prouver que quelque chose est vrai, il suffit de prouver que son contraire est faux.

Ainsi, si l'on suppose que l'ensemble des nombres premiers est fini, c'est qu'il existe un nombre premier que nous appellerons p, plus grand que tous les autres. Et nous pouvons appeler P le produit de tous ces nombres premiers :

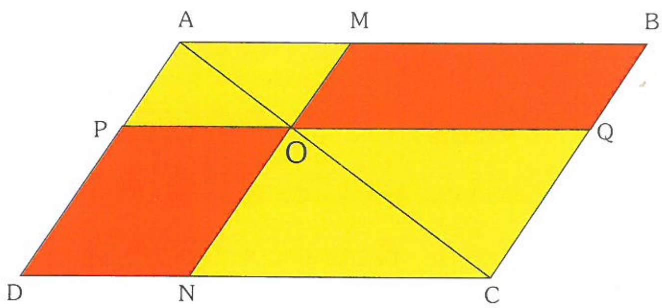
$$P = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times p.$$

P est donc multiple de tous les nombres premiers : la division de P par chacun d'eux "tombe juste". Mais dans ce cas, la division de P + 1 par chacun d'eux donne un reste égal à 1.

Ce nombre P + 1 n'est donc divisible par aucun nombre premier, et en fin de compte, il n'est divisible par aucun nombre, puisque les entiers sont tous des produits de nombres premiers. P + 1 serait donc aussi un nombre premier. Pourtant P + 1 est évidemment plus grand que p, le plus grand des nombres premiers.

Il y a par conséquent une contradiction, et notre point de départ est donc faux : il n'existe pas de plus grand nombre premier !

Rectangles d'aires égales



Voyons maintenant un raisonnement géométrique tel qu'on en trouve dans les Éléments :

ABCD est un parallélogramme ; O est un point de [AC] ; M, N, P et Q sont les points des côtés de ABCD tels que (MN) et (PQ) passent par O et sont parallèles aux côtés du parallélogramme.

Le but est de prouver que les aires de POND et de MBQO sont égales ...

• Les triangles ABC et ADC, ayant bases et hauteurs de longueurs égales, sont de même aire.

• Il en est de même pour les triangles APO et AMO, ainsi que pour les triangles ONC et OQC.

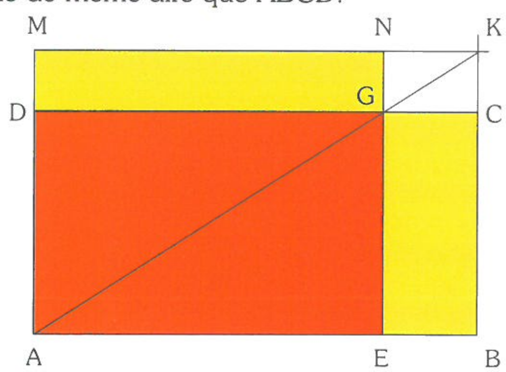
• Par conséquent, en notant $\mathscr{A}_{ABC}$ l'aire du triangle ABC, nous avons :

$$\mathscr{A}_{ADC} - (\mathscr{A}_{APO} + \mathscr{A}_{ONC}) = \mathscr{A}_{ABC} - (\mathscr{A}_{AMO} + \mathscr{A}_{OQC}),$$

ce qui prouve le résultat.

Cette propriété nous permet, par exemple, de tracer à la règle et au compas un rectangle de base AE donnée et de même aire qu'un rectangle ABCD donné, où E est un point de [AB] :

Il suffit de placer G sur [DC] tel que ADGE soit un rectangle ; puis K intersection de (AG) et (BC) ; et tracer la parallèle à (AB) passant par K. : elle coupe (AD) en M et (GE) en N. AENM est alors un rectangle de même aire que ABCD.



Géraud Chaumeil