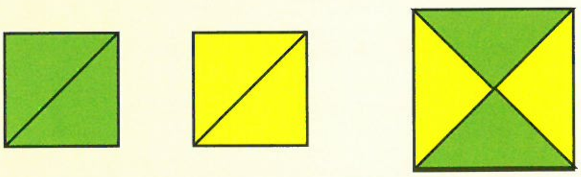
Feuilleton

Tripliquer le carré

Nicolas et ses copains sortaient de l'exposition "Rivages mathématiques", où ils avaient pu admirer (et pratiquer) le découpage de Abul'Wafa, "trois carrés en un*". La discussion s'animait pour savoir si on pouvait imaginer d'autres solutions.

– "Pour doubler, pas de problème", dit Nicolas. Si l'on part d'un carré ABCD, il est facile de construire, un carré dont l'aire est le double de celle du carré ABCD. On peut même trouver un découpage qui répond à la question :



– "Et pas qu'un seul !" renchérit Marianne ... Je viens de penser à un autre découpage facile, je vous laisse le chercher ...

Mais peut-on construire, avec les instruments classiques (règle et compas), un carré dont l'aire vaut trois fois celle du carré ABCD ?

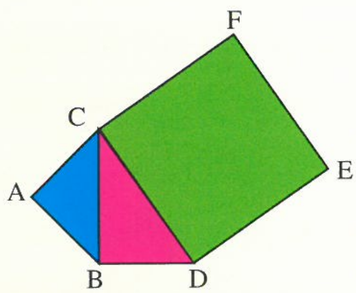
– Essayons d'être méthodiques, reprit Nicolas : appelons a la longueur du côté du carré à construire et b celle du côté du carré à tripler. Vous êtes bien d'avis que $a = b\sqrt{3}$? Alors essayons, b étant donné, de construire une telle longueur à la règle et au compas.

Pouvez-vous démontrer l'affirmation de Nicolas ?

*** Voir (et comparer) avec "Trois carrés en un" dans Hypercube 32-33 "10 expériences de mathématiques" p. 32 à 35.**

La solution de Rémi

– J'ai fait la construction suivante, dit Rémi, et j'ai utilisé le théorème de Pythagore deux fois de suite.



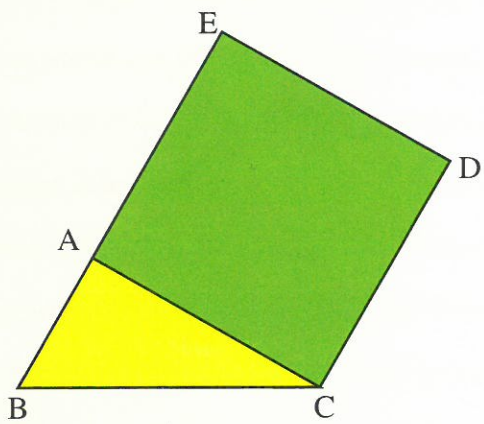
– AB = AC = BD = b,
– le triangle ABC est rectangle en A,
– le triangle BCD est rectangle en B,
– CDEF est un carré,

Prouvez que CD = $b\sqrt{3}$.

La solution d'Adrien

Moi, dit Adrien, je suis parti de l'idée que $3b^2 = 4b^2 - b^2$.

C'est pourquoi j'ai construit un triangle ABC rectangle en A avec BC = $2b$ et AB = b. La longueur a est la longueur du côté [AC].



Faites la construction d'Adrien et prouvez que AC = $b\sqrt{3}$.

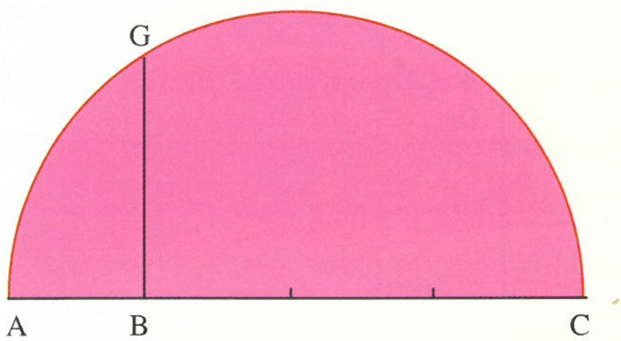
La solution de Marianne

Pour construire le côté du carré, dit Marianne, je me suis contentée de tracer un triangle équilatéral et d'en doubler la hauteur.

Faites la construction et justifiez la réponse de Marianne.

La solution de Jeanne

Je suis partie du fait que $a^2 = 3b^2$ peut s'écrire $a^2 = 3b \times b$. Le nombre a est donc la moyenne géométrique des nombres $3b$ et b. Pour construire les longueurs a et b, je sais qu'il existe une construction standard.



Sur cette figure, les points A, B et C sont alignés et BC = 3AB.

La perpendiculaire à (AC) qui passe par B coupe le demi-cercle de diamètre [AC] en G.
La longueur BG est la longueur cherchée car $BG^2 = AB \times BC$.
Pouvez-vous justifier la réponse de Jeanne ?

Un découpage

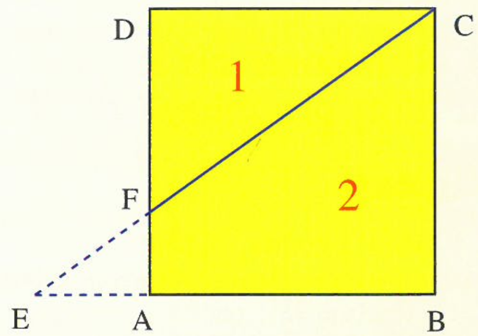
– Tout ça est bien joli, dit Nicolas, mais ça ne nous donne pas un autre découpage ... La nuit porte conseil, je vais chercher pour demain !

Le lendemain, personne n'avait oublié ...

Alors, dit Jeanne, avisant Nicolas qui arrivait à la porte du collège, et ce fameux découpage ?

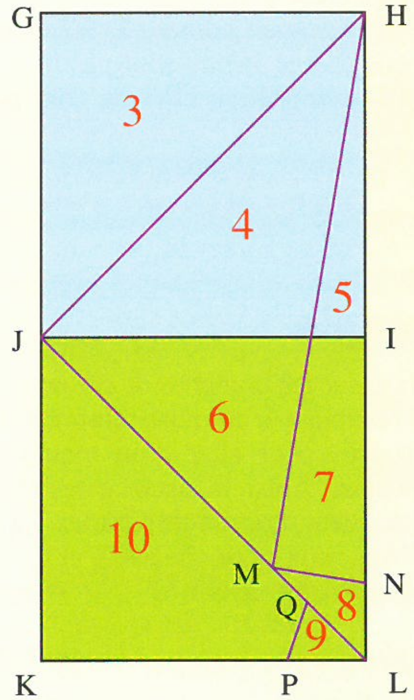
– Je dois avouer que je n'ai pas réussi. Par contre, l'oncle Boris m'a indiqué un tel découpage. Le voici :

1.Pour découper le premier carré, marquer sur la demi-droite [BA), un point E tel que BE = BD.



On obtient ainsi 2 morceaux numérotés 1 et 2.

2.Pour découper les deux autres carrés, il faut d'abord les rendre jointifs.



Ensuite :

– sur la diagonale [JL] du carré GHIJ, marquer M tel que JL = AB,

– la perpendiculaire à (HM) qui passe par M coupe (HL) en N,

– sur [LJ], marquer Q tel que LQ = AF,

– sur [LK], marquer P tel que LP = LN.

On obtient ainsi 8 nouveaux morceaux numérotés sur la figure de 3 à 10.

Saurez-vous reconstituer le découpage ?

Michel Rousselet