

QUELLES ALTERNATIVES POUR L'ENSEIGNEMENT DU CALCUL ALGEBRIQUE AU COLLEGE ?

Céline **CONSTANTIN**

Aix-Marseille Université, I2M

celine.r.constantin@gmail.com

Résumé La thèse présentée dans ce texte (Constantin 2014) s'intéresse à l'élaboration d'alternatives pour enseigner le calcul algébrique au collège, et plus particulièrement la propriété de distributivité qui joue un rôle central dans cet enseignement. Deux référents émergent de nos analyses des spécificités des savoirs à enseigner et enseignés sur le calcul algébrique vis-à-vis de difficultés protomathématiques (Chevallard 1985) prégnantes du côté des élèves. La notion de transformation de mouvement (Drouhard 1992) d'une part, et l'exploration des caractères formalisateur, unificateur et généralisateur (ou FUG, Robert 1998) de la distributivité d'autre part permettent d'envisager des savoirs complémentaires aux savoirs mathématiques et liés aux aspects sémantiques et syntaxiques des écritures algébriques au regard d'un domaine d'étude à la fois numérique et algébrique. À partir d'analyses de manuels et de programmes, des conditions et des contraintes sont dégagées pour élaborer une ingénierie didactique prenant en compte ces savoirs. Les résultats d'une première expérimentation réalisée en 5^e concernent les discours dont les élèves parviennent à s'emparer, justifiant et soutenant leurs techniques de calcul algébrique, ainsi que les organisations des connaissances qui se façonnent, faisant le lien entre leurs pratiques calculatoires numériques anciennes et celles en construction à la fois numériques et algébriques. Enfin, les résultats d'une nouvelle étude didactique et épistémologique relative à la notion de substitution permettent d'avancer des fondements pour poursuivre le travail engagé.

Mots clés

Calcul algébrique, distributivité, analyse épistémographique, théorie anthropologique du didactique, aspects formalisateur unificateurs et généralisateurs

UN REGARD SUR LES ERREURS D'ELEVES ET LES SAVOIRS MATHEMATIQUES

Les origines du travail de thèse présenté ici se situent dans des observations d'erreurs d'élèves récurrentes dans le domaine du calcul algébrique (Constantin, 2014). Ces erreurs sont celles de Yoan et Joanna par exemple (Constantin, 2008) dont la biographie didactique met à jour des logiques d'apprentissage tout au long de leur année de Seconde face à des achoppements constants. Les difficultés qu'ils donnent à voir se situent bien en amont de complexifications à l'occasion d'adaptations de connaissances anciennes (Robert, 2005) dans le calcul algébrique. Elles relèvent de reconnaissance de formes ou d'implicites dans les choix des techniques à opérer en lien avec les domaines d'efficacité de ces techniques. Elles s'accompagnent de malentendus avec les textes de savoirs qui s'entretiennent et contribuent à cloisonner les techniques de calcul, et faire obstacle aux adaptations. Ces élèves se heurtent à des difficultés protomathématiques (Chevallard 1985) prégnantes :

Une telle difficulté peut surgir de *la non maîtrise d'une capacité requise par le contrat didactique pour le bon entendement de celui-ci*, la maîtrise en question figurant alors

comme *prérequis du contrat didactique*. [...]

4.29. Les notions protomathématiques, par exemple la notion de « pattern », se situent à un niveau d'*implication* plus profond (pour l'enseignant, pour l'élève). Ce caractère d'implicite s'exprime, dans le contrat didactique, par le fait *qu'elles « vont de soi »* - sauf précisément lorsqu'il y a difficulté protomathématique et *rupture de contrat*. (Chevallard, 1985 p. 55)

Les observations de techniques assujetties aux formes d'expressions, à des modifications mathématiquement non pertinentes comme le degré ou la nature des coefficients pour ces deux élèves font écho à des résultats d'autres travaux comme ceux de Tonnelle (1979) ou de Croset (2009). Toutefois, de la modélisation de l'activité de l'élève en termes de praxéologies dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1997) émergent des savoirs mathématiques qui éclairent peu les savoir-faire dans la finesse des adaptations à produire en fonction des formes d'expression. L'importance d'éléments ostensifs (Chevallard et Bosch, 1994), la prise d'indices visuels incontrôlés donnent à voir côté élèves des praxéologies muettes ou faibles (Wozniak, 2012), c'est-à-dire des praxéologies dont la composante technologique ne fonctionne pas avec la composante praxique dans un rapport d'action, de formulation et de validation.

Ce constat s'érige à tous les niveaux, des savoirs appris aux savoirs à enseigner et enseignés. Par exemple, les analyses de manuels et de programmes menées par Assude, Coppé & Pressiat (2012) témoignent d'un « émiettement des tâches séparées de leur élément technologique » et combien « la propriété de distributivité perd de sa prépondérance technologique pour justifier et valider les calculs ». Ces constats m'ont conduite à interroger les savoirs liés au calcul algébrique : peut-on identifier ou élucider des savoirs accompagnant les savoirs mathématiques, et qui seraient véritablement opérationnels pour le calcul algébrique ? Par savoirs opérationnels, j'entends des savoirs qui permettent des adaptations de connaissances (Robert, 2005) et qui puissent nourrir un discours (Mercier, 2012) éclairant la portée des techniques. Les difficultés protomathématiques en lien avec les indices ostensifs mathématiquement pertinents m'ont amenée à m'intéresser plus particulièrement aux traitements des expressions symboliques algébriques (Drouhard, 1992), et à exclure de fait le cas des propositions et du calcul équationnel, pour me centrer sur les genres de tâches scolaires liées au développement, à la factorisation et à la réduction tels qu'on les rencontre dans les classes. Les technologies mathématiques associées telles qu'elles apparaissent dans les programmes du collège où elles se construisent, prennent la forme d'identités algébriques. Etant donné que ces identités ne suffisent pas à rendre compte de la finesse des adaptations des techniques, existe-t-il d'autres savoirs utiles, complémentaires à même d'éclairer véritablement ces techniques ?

Je me suis de plus centrée sur la propriété de distributivité, comme propriété fondamentale à ce niveau d'enseignement.

Des analyses de différents savoirs susceptibles d'accompagner les techniques du calcul algébrique menées dans la thèse ont émergé deux types de savoirs qui semblaient revêtir un potentiel comme savoir opérationnel. Il s'agit d'une part de savoirs de nature sémio-linguistique en appui sur la notion de transformation de mouvement (Drouhard, 1992), et d'autre part de savoirs de nature numérique-algébrique fondés par les aspects formalisateur, unificateur et généralisateur (ou FUG, Robert, 1998). Dès lors, quels savoirs à enseigner y associer, et dans quelle mesure et comment peuvent-ils être enseignés et appris ?

Je précise ici, mais cela est développé dans la thèse, que les savoirs considérés ne sont envisagés que comme des savoirs complémentaires pour l'enseignement des formalismes (Chevallard, 1989).

Le modèle des expressions symbolique algébriques dont participent les transformations de mouvement, s'inscrit dans la perspective d'une description linguistique des objets de l'algèbre élémentaire et de leur manipulation tels qu'on les rencontre dans les classes. Le calcul algébrique est alors modélisé par un ensemble d'applications d'un langage dans lui-même $\mathcal{T}: L \rightarrow L$ qui à une expression symbolique algébrique associe une autre expression symbolique algébrique qui lui est égale, en appui sur des propriétés mathématiques de corps commutatif ordonnée de l'ensemble des nombres réels pour les expressions qui nous occupent. Ces applications sont appelées transformations de mouvement (Drouhard 1992, Drouhard et Panizza 2012). Les transformations de mouvement s'insèrent dans l'analyse épistémographique (Drouhard 2013) qui considère que les savoirs relatifs aux objets mathématiques sont situés dans un espace essentiellement à trois dimensions :

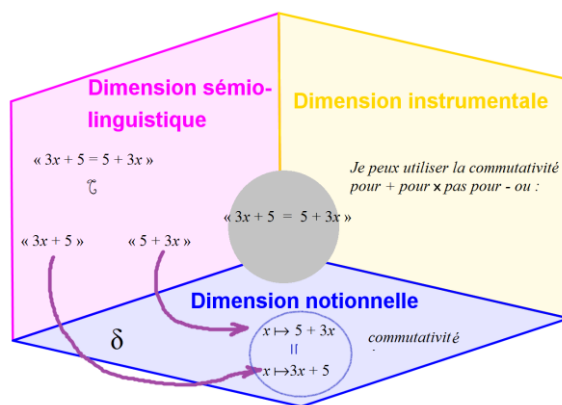


Figure 1 – Schéma simplifié de la projection des savoirs relatifs à un objet dans le cadre de l'analyse épistémographique

Cette modélisation permet à la fois de mettre l'accent sur l'action et sur une interprétation de l'égalité en termes de production de manipulation d'ostensifs dans la dimension sémio-linguistique et ce en lien avec la dimension notionnelle regroupant des savoirs relatifs aux définitions et propriétés des objets observés. Les transformations de mouvement permettent dès lors de se saisir d'un savoir complémentaire permettant de multiples interprétations (dans le sens de *flexibility of thinking*, Sfard & Linchevski, 1994) des écritures d'égalités. Elles doivent pouvoir être considérées à la fois comme égalités d'expressions algébriques, comme équivalence de programmes de calcul (Bosch & Chevallard, 2012, Drouhard, 1995) E_1 et E_2 , mais aussi comme résultante d'une transformation de mouvement. Autrement dit, l'expression $E_2(x)$ doit pouvoir être interprétée comme image de l'expression $E_1(x)$ par une transformation de mouvement ou d'une composition de transformations de mouvement. Elles portent une modification profonde de l'égalité au moment de la construction du calcul algébrique, d'autant qu'il n'y a pas de véritable précurseur d'une telle interprétation à l'école primaire sur les écritures arithmétiques.

Par ailleurs, la notion de transformation de mouvement permet de s'attaquer à la question du discours. Drouhard (1992) montre qu'il est possible de décrire les transformations de mouvement à partir des fonctions syntaxiques qui déterminent les invariants permettant d'identifier les sous-expressions à transformer, indépendamment des différences de forme entre expressions. Le fait que le discours puisse s'affranchir des catégories amène à supposer qu'il puisse résister, autrement dit à être de nature à soutenir les adaptations à différentes catégories

comme des monômes, des sommes, ou à différentes écritures de nombres (en lien avec les fractions ou les racines par exemple). Celles-ci renvoient aux domaines d'application de plus en plus vastes en particulier pour la distributivité. Ceci m'amène au deuxième type de savoirs apparentés aux caractères FUG de la distributivité afin d'approcher des enjeux de co-construction et d'évolution de la notion dans une certaine dialectique entre numérique et algébrique, entre systèmes de nombres et théorie du calcul algébrique.

Une notion revêt, à un moment donné du curriculum, un caractère formalisateur si elle offre un formalisme nouveau de connaissances anciennes. Elle présente un caractère unificateur si elle unifie des connaissances anciennes traitées de manière isolée jusque là, et enfin un aspect généralisateur si elle apporte une extension de l'ancien. Des analyses globales de programmes et de manuels du primaire et du collège conduites dans la thèse montrent que la distributivité, lorsqu'elle devient objet d'enseignement en 5^e, unifie des pratiques anciennes de calcul mental et de calcul posé de produits tel qu'il est enseigné usuellement. La distributivité porte un formalisme nouveau, algébrique, et orchestre un double mouvement de généralisation. Elle s'étend par préconstruction des nombres entiers aux nombres décimaux, puis dans un second mouvement, l'extension est posée comme postulat pour la construction de la règle de multiplication sur les nombres relatifs en 4^e, avant d'être de nouveau étendue d'une certaine manière à l'ensemble des nombres réels avec l'apparition des racines carrées en 3^e. De façon concomitante, on observe une extension de son usage au-delà des nombres, à des expressions algébriques apparentées à des polynômes. Le schéma suivant récapitule ces aspects :

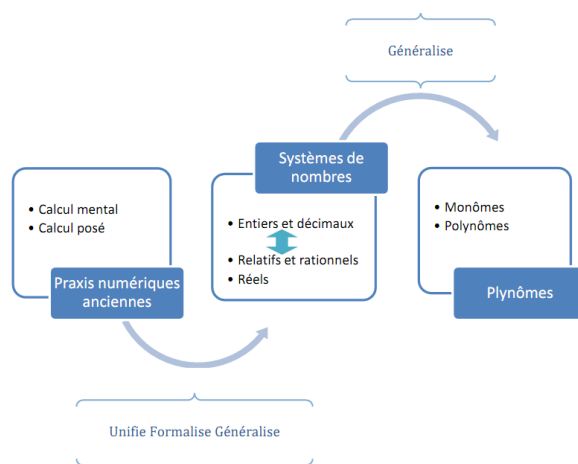


Figure 2 – Schéma des aspects FUG de la propriété de distributivité

Afin de pister dans quelle mesure et comment les savoirs envisagés peuvent être enseignés et appris, la méthodologie de la thèse a suivi trois voies. La première consiste à explorer les savoirs à enseigner et enseignés en appui sur des analyses de manuels de programmes, et de discours d'enseignants afin d'éclairer les projets d'enseignement possibles autour de ces savoirs (et non d'analyser leurs pratiques). La seconde correspond à l'élaboration et l'expérimentation d'une ingénierie didactique fondée par les caractères FUG de la distributivité et la notion de transformation de mouvement. La troisième relève d'une analyse épistémographique d'un savoir enseigné existant en acte autour d'une certaine extension de l'utilisation de la distributivité du côté des polynômes : la substitution.

Ces trois voies correspondent à chacune des parties suivantes de ce texte.

UNE TRANSPOSITION POSSIBLE DES SAVOIRS A ENSEIGNER SUR LA

DISTRIBUTIVITE

Dans le cadre de ce texte, nous n'exposerons que quelques résultats des analyses conduites. Pour cela nous nous centrerons sur la première partie du schéma précédent et en particulier sur l'unification de praxis numériques anciennes associés au calcul mental et posé de produits.

Tout d'abord les analyses de manuels et de programmes du primaire attestent de l'utilisation en acte de la distributivité pour calculer des produits comme 14×12 mentalement. L'une des techniques possibles consiste à calculer $14 \times 10 + 14 \times 2$. De même, pour le calcul posé de multiplication, les manuels de CM₂ donnent à voir les produits partiels qui sous-tendent la technique à l'instar de l'exemple suivant :

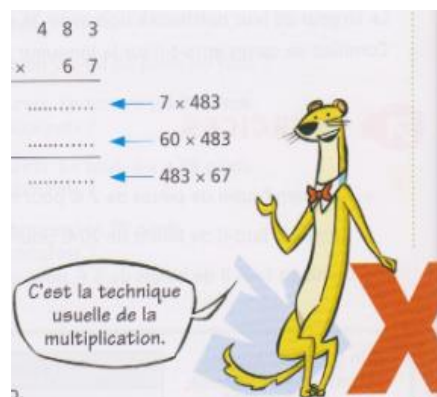


Figure 3 – Euro Maths CM₂ (2009) p. 24

Toutefois, les résultats des analyses de manuels de 6^e montrent l'absence de traces de ces produits partiels au profit d'éléments liés à la numération décimale de position, en utilisant parfois même des ostensifs comme les points à la place des zéros qui tendent à masquer davantage l'utilisation implicite de la distributivité :

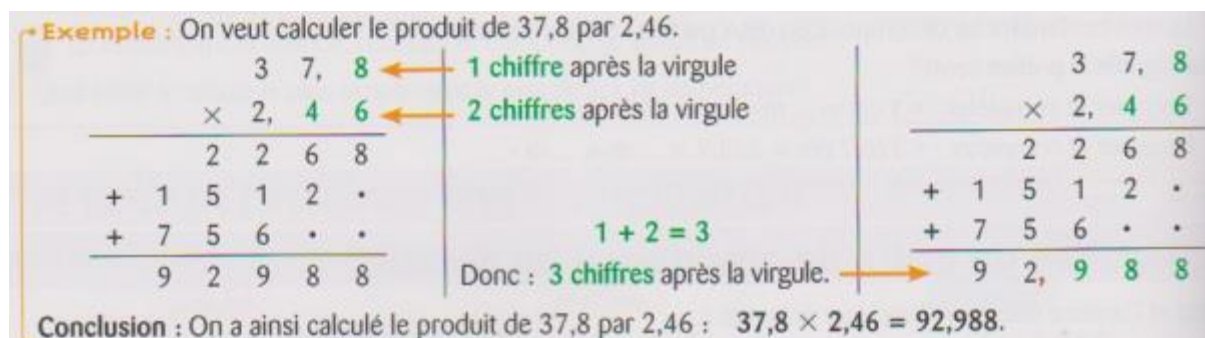


Figure 4 – Phare 6^e (2014) p. 62

D'autre part, l'analyse plus détaillée des techniques de calcul mental montre combien la distributivité peut n'être que l'un des éléments technologiques parmi bien d'autres. Ainsi pour calculer 48×250 , un document ressources décrit-il une technique possible formalisée pour les enseignants de la manière suivante :

$48 \times 250 = 48 \times 200 + 48 \times 50 = 48 \times 2 \times 100 + 48 \times 100 \div 2 = 96 \times 100 + 4\,800 \div 2$
 $48 \times 250 = 9\,600 + 2\,400 = 12\,000$
 Etc.

Figure 5 – Le nombre au cycle 3, apprentissages numériques p.38 La distributivité n'est à l'œuvre que pour la première étape de la technique, tandis que d'autres éléments technologiques apparaissent à la suite, liés à l'associativité ou à des connaissances de nombres.

Plus généralement, les analyses conduites montrent que la distributivité peut se révéler évanescence au regard d'autres éléments technologiques liés notamment à la numération décimale de position. Ceux-ci peuvent de plus faire obstacle à l'identification de son usage implicite. En effet, pour donner accès à une description de technique fondée sur la distributivité, celle-ci doit pouvoir se faire à partir de nombres et non à partir de chiffres. Les manuels de primaire témoignent également de la prégnance de l'utilisation de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, vis-à-vis de la soustraction, et ce dans le sens du développement. Cet usage peut de plus être « oublié » en 6^e, les résultats des analyses conduites témoignent d'occasions d'utilisation variable pour le calcul mental selon les manuels, de sorte que l'on puisse faire l'hypothèse qu'il en va de même dans les classes. Il n'en demeure pas moins que la distributivité constitue l'arrière plan technologique de praxis numériques anciennes de calcul mental comme de calcul posé.

Toutefois aucun des cinq manuels de 5^e analysés ne propose de retour sur la technique opératoire de la multiplication posée, que ce soit au moment de l'introduction de la notion ou dans les exercices. La prise en compte du calcul mental quant à elle pose question au regard des praxis numériques anciennes. Les manuels Triangle et Phare n'en proposent en effet qu'à l'occasion d'applications de la technologie de la distributivité établie au préalable sous sa forme symbolique algébrique. Pour le premier, le calcul mental de produits n'apparaît que dans la partie exercices et n'en représente que 2% (2/121). Pour le second, si le calcul mental apparaît dans la partie Activité, les spécimens, lorsqu'ils ne relèvent pas d'une différence de deux produits donc d'un calcul reposant sur la factorisation qui ne correspond pas aux praxis anciennes, sont accompagnés d'une aide sous la forme $k = 7,3$; $a = 3,259$ et $b = 1,259$ qui ne laisse aucun doute quant au statut de la tâche : il ne s'agit pas véritablement de compléter les praxéologies de calcul anciennes, mais bien d'utiliser le formalisme algébrique. Ceci est corroboré dans la partie Cours par des exemples sur d'utilisation de la distributivité sur des expressions numériques, sans poursuivre le calcul, c'est-à-dire sans même de résultat.

D'autres manuels montrent cependant une certaine prise en compte des praxis anciennes de calcul mental de produits en utilisant implicitement la distributivité au moment de son introduction. Cependant, l'analyse des spécimens afférents révèle la prégnance d'un facteur égal à 1 dans les produits partiels. Ainsi les produits donnés à effectués sont par exemple des produits par 11, par 21, par 1001, ou par 19, c'est-à-dire par des nombres dont les décompositions sous forme de somme ou de différence conduisent à des écritures du type $a \pm 1$ où a est le produit d'un entier non nul par une puissance de 10 différente de 1. Ce choix ne semble pas véritablement propice à l'émergence de la distributivité, d'autant que, comme en attestent les analyses de manuels de CM₂ que nous avons conduites, les pratiques du primaire afférentes correspondent plutôt à l'utilisation de l'addition itérée et de la définition de la multiplication sur les entiers. Effectuer 54×11 en utilisant $54 \times 10 + 54 \times 1$ demande de penser et d'effectuer un produit par 1 supplémentaire par rapport à la technique reposant sur $54 \times 10 + 54$.

De plus les analyses des choix des spécimens montrent que ces facteurs égaux à 1 sont majoritaires dans les parties activités comme dans les parties exercices :

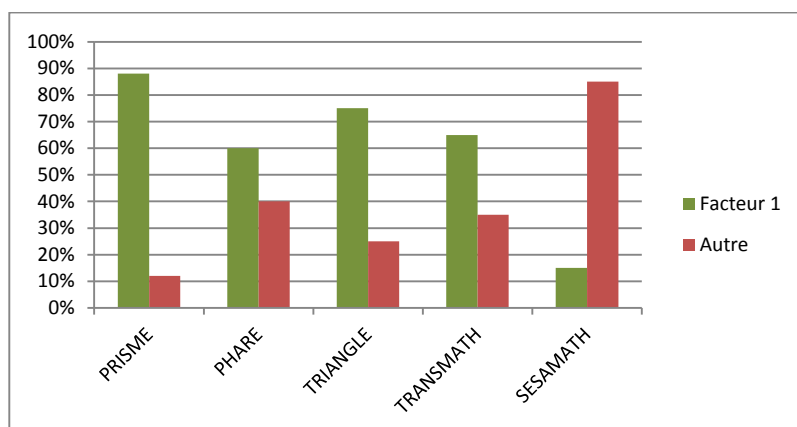


Figure 6 – Comparaison relative des places des spécimens de calcul de produits engageant avec la distributivité un facteur égal à 1 dans les produits partiels

Notons que le manuel Sésamath, faisant exception dans la partie Exercices, met pourtant très majoritairement en avant dans la partie Activité ces facteurs égaux à 1. De plus, une analyse fine des tâches proposées dans cette partie (Constantin, 2014) montre que l'unification n'est pas un enjeu d'étude.

Plus généralement, l'étude que nous avons conduite montre que la distributivité présente des caractères formalisateur, unificateur et généralisateur en l'état peu pris en compte par les manuels ou de façon incomplète. L'unification véhiculée par les agrégations potentielles des praxéologies anciennes et nouvelles, complétées à la fois du point de vue technologique et théorique, semble, comme nous venons de le voir avec l'absence du calcul posé ou la prégnance de facteurs égaux à 1, un enjeu ignoré ou faiblement exploré dans l'existant. Le même constat s'érige à propos de l'unification entre les praxéologies liées au développement et à la factorisation que devrait unifier la distributivité : elles apparaissent cloisonnées par les manuels, et nos analyses concordent avec d'autres recherches (Croset, 2009 ou Assude, Coppé & Pressiat, 2012). Les extensions aux différents types de nombres (entiers, décimaux, rationnels, et certains réels avec les racines carrées) sont dans l'ensemble incomplètes, avec des enjeux de généralisation dans les constructions de systèmes de nombres absents ou peu mis en avant. Celles-ci vont de pair avec une faible exploration des formalismes, de leur articulation, et de leurs usages au fur et à mesure des extensions à des ensembles de nombres de plus en plus vastes tout au long du collège. Elles s'accompagnent même de généralisations silencieuses du côté des polynômes qui s'opèrent au travers de substitutions muettes y compris en début d'apprentissage.

En cela la construction curriculaire que nous envisageons au travers des caractères FUG est une alternative.

Etant donné que nous considérons la distributivité comme un savoir nouveau particulier, nous avons été amenée à envisager une ingénierie dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998) en appui sur la notion de milieu destiné à favoriser l'émergence de la distributivité enfouie dans les connaissances anciennes. Le formalisme nouveau amène de plus à envisager de penser un passage de l'interprétation de l'égalité en termes d'annonce de résultat à relation d'équivalence et résultante de transformation de mouvement.

UNE INGENIERIE DIDACTIQUE POUR INTRODUIRE LA DISTRIBUTIVITE

L'ingénierie élaborée et expérimentée en 5^e se compose essentiellement de quatre situations.

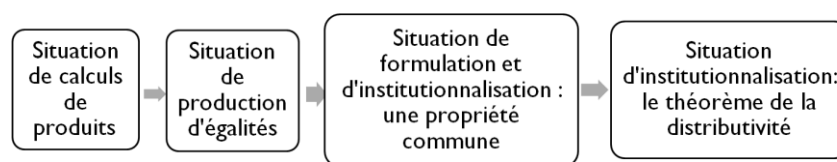


Figure 7 – Schéma récapitulatif de l'ingénierie

La première situation consiste pour les élèves à effectuer un certain nombre de produits d'entiers mentalement comme 12×203 ou 35×98 destinés *a priori* à favoriser l'utilisation en acte de la distributivité, même si d'autres techniques peuvent émerger sans que cela gêne la suite du travail. Les techniques sont explicitées à l'oral puis des multiplications sont données à poser, et l'utilisation de la calculatrice est autorisée pour contrôler les produits intermédiaires comme le résultat. Ces calculs et ces descriptions vont alors servir de milieu pour la situation suivante. Celle-ci demande d'écrire des égalités en appui sur ces descriptions. Les écritures visées étant par exemple $12 \times (200 + 3) = 12 \times 200 + 12 \times 3$. A partir d'un certain nombre d'égalités produites lors de cette situation, la situation de formulation consiste alors à identifier « une chose commune » pour faire émerger la propriété de distributivité avant de l'institutionnaliser sous forme rhétorique et symbolique. Nous allons étayer cette description rapide pour présenter quelques-uns des principaux résultats de l'expérimentation menée.

Analyses *a priori* : rôle des variables didactiques

Le choix des variables didactiques de la situation de calculs doit *a priori* conduire à l'élaboration d'un milieu riche permettant de favoriser la formalisation, l'unification et la généralisation tout au long des situations suivantes.

Par exemple, la variable *nombre de chiffres des facteurs* peut prendre les valeurs de 1 à 4. Lorsque l'un des facteurs ne comporte qu'un chiffre, l'autre est nécessairement celui qui sera décomposé en somme, de sorte qu'à condition que les élèves n'échangent pas les écritures des facteurs dans les produits comme 7×32 ou 46×3 , nous supposons que puissent apparaître des écritures relevant de distributivité à gauche ou à droite. En outre, lorsque le nombre de chiffres des facteurs est de 3 ou 4, des sommes de trois ou quatre termes peuvent alors émerger.

La variable *compléments à 100 ou à 200 de l'un des facteurs* permet aussi d'envisager que la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction soit favorisée pour calculer par exemple 35×98 et par suite que des écritures produites lors de la situation suivante en relèvent.

Cette diversité des formalismes intermédiaires associés lors de la situation de production d'égalités est essentielle pour la suite des situations envisagées. Elle permet de prendre en compte différentes formes possible de la connaissance ancienne pour préparer les caractères FUG, mais aussi l'émergence d'une transformation de mouvement véhiculée par des descriptions qui doivent pouvoir s'effectuer à partir de fonctions syntaxiques et non de lectures brutes d'ostensifs. La flexibilité des écritures envisagée est également essentielle pour fonder une généralisation portant ces différentes instanciations possibles et en même temps un certain domaine d'application. Le rôle de la mémoire didactique est de ce point de vue *a priori* déterminant.

Analyses *a priori* : rôle de la mémoire didactique

Nous supposons que l'enchaînement des situations envisagé soit susceptible de favoriser de multiples interprétations des écritures ainsi que la construction d'une transformation de mouvement.

Lors de la situation de production d'égalités en effet, la consigne impose un formalisme nouveau pour décrire les techniques puisqu'il s'agit d'« écrire des égalités montrant les procédés de calcul ». Elle explicite de plus une rupture de contrat (Brousseau 1998) : « l'égalité ne doit pas montrer de résultat ». Elle engage de fait une extension de l'usage du signe =. Les analyses des praxéologies en jeu montrent toutefois qu'il est peu probable que les écritures visées émergent d'elles même et le scénario prévoit qu'une élaboration collective soit nécessaire pour produire une écriture comme $134 \times (20 + 2) = 134 \times 20 + 134 \times 2$ à partir d'une écriture envisagée comme $134 \times 22 = 134 \times 20 + 134 \times 2$. De sorte que l'analogie scripturale qui puisse être à l'œuvre par la suite pose question, et puisse être de nature à empêcher la diversité des formalismes envisagée. En outre, dans cette situation, les tâches de vérifications envisagées sont *a priori* destinées à compléter une interprétation des expressions comme programme de calcul et en particulier pour les sommes comme $(20+2)$ qui émergent comme écriture de nombre.

Lors de la situation de formulation et d'institutionnalisation, la mémoire des situations de calcul et de production d'égalités amène à penser que les descriptions d'une chose commune qui émergent dans la classe puissent se faire en appui sur des programmes de calcul, et sur des manipulations des écritures, afin d'aboutir à une première formulation rhétorique. La consigne suivante s'attachant à écrire des égalités en appui sur ce premier discours engage de plus à faire évoluer les praxéologies afférentes pour inclure cet embryon technologique et amorcer l'utilisation d'une transformation de mouvement. De sorte qu'il est possible que cette nouvelle confrontation se révèle être un levier pour compléter les discours du côté de manipulations ostensives.

Cependant, lors de la dernière situation d'institutionnalisation, le théorème ne s'est pas constitué comme technologie des praxéologies de calcul. Une fois prouvé sur les entiers et explicité sous des formalismes à la fois rhétoriques et algébriques, c'est une nouvelle confrontation aux types de tâches consistant à écrire des égalités ou à calculer des produits qui permettra *a priori* de réorganiser les praxéologies. Les analyses *a posteriori* s'attacheront donc à pister le rôle technologique du théorème ainsi élaboré lors de ces épisodes.

Analyse *a posteriori* de la situation de production d'égalités

Les résultats des analyses *a posteriori* de la situation de production d'égalités montrent tout d'abord que la dévolution a bien lieu. Les élèves s'emparent véritablement de la rupture de contrat, qui se révèle au cœur des débats au sein des groupes comme en témoigne l'extrait suivant :

Flo : on écrit 43 fois 2

Gre : est égal à 86 [...]

Flo : mais faut pas marquer les résultats, tu mets 43 fois 2 ... plus

Gre : pourquoi tu mets plus

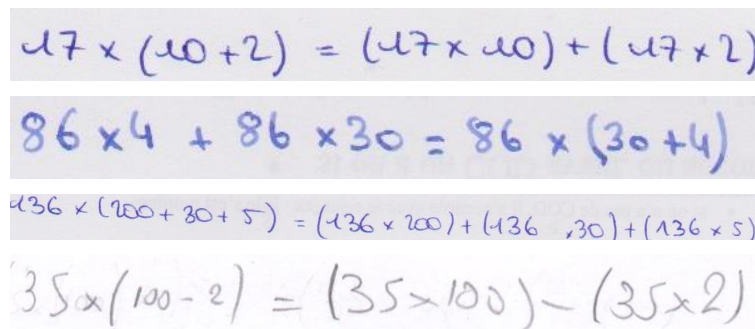
Séb : faut marquer le résultat

Flo : mais non

Gre : mais si

Ainsi que l'analyse *a priori* le prévoyait, les premières écritures produites ne sont pas de la forme attendue, et c'est l'intervention du professeur qui permettra d'aboutir. Toutefois l'expérimentation menée montre que l'analogie scripturale n'aura par la suite que peu d'effet.

Les écritures produites sont d'une grande diversité, en lien avec les choix des valeurs des variables didactiques :



The figure shows four examples of handwritten mathematical equalities, each on a separate line of paper. The first line is $47 \times (10 + 2) = (47 \times 10) + (47 \times 2)$. The second line is $86 \times 4 + 86 \times 30 = 86 \times (30 + 4)$. The third line is $136 \times (100 + 30 + 5) = (136 \times 100) + (136 \times 30) + (136 \times 5)$. The fourth line is $35 \times (100 - 2) = (35 \times 100) - (35 \times 2)$.

Figure 8 – Exemples d'égalités produites par les groupes

La souplesse des écritures qui s'y créent de façon assez remarquable s'explique par le choix des variables didactiques portant sur les produits donnés à effectuer aux élèves dans la première situation, et qui a été généré par les enjeux d'unification et de généralisation visés. Les égalités produites montrent à la fois le sens du développement comme de la factorisation, des distributivités à gauche ou à droite, des décompositions de facteurs sous la forme de sommes de deux, trois ou quatre termes. Les localisations géographiques des termes et des facteurs sont variables entre les membres de gauche et de droite d'une même égalité. Or, nous avons vu que ceci était une condition nécessaire pour l'émergence de reconnaissance des fonctions syntaxiques en amont de descriptions de transformations de mouvement susceptibles de favoriser des adaptations futures. Nous allons voir comment.

Analyse *a posteriori* de la situation de formulation

La mémoire des situations précédentes, par l'intervention d'une élève va ainsi faire basculer les premières reconnaissances ostensives brutes (les signes +, les parenthèses) comme « chose commune », vers l'identification d'une technique de manipulation ostensive productrice de l'égalité. La construction d'un discours demande du temps, des reprises, des décontextualisations et recontextualisations dont le rôle n'est pas négligeable : elles permettent de s'entendre sur ce dont on parle avant d'en trouver une manière générale de le désigner. De ce point de vue, la souplesse des écritures permet bien de chercher à se saisir des fonctions syntaxiques :

Elv : A chaque fois ça reprend le même chiffre [...]

Dav : Oui puisque celle d'après c'est 62 qui est heu, c'est 62 qu'on reprend deux fois, après y'a le 86, le 68 et ...

Art : Ah ouais

P : Alors qu'est-ce que c'est ? ce... On reprend deux fois oui ?

Dav : le facteur

P : [...] On reprend deux fois le facteur ? Mar ?

Mar : ben qui est pas additionné

La mémoire des situations précédentes joue à nouveau un rôle déterminant : elle permet une double interprétation des écritures. Ainsi, Mar parle-t-elle de façon saisissante de « facteur qui est pas additionné ». Le premier milieu des calculs sert de référence forte en permettant d'éviter la difficulté de reconnaissance d'un produit. La seconde situation permet de façon essentielle d'interpréter la somme comme un facteur et comme une écriture de nombre, tout en préparant les formulations rhétoriques visées du théorème de la distributivité. Nous ne présenterons que succinctement ici quelques éléments à l'issue de l'élaboration du théorème afin de déterminer s'il se constitue comme composante technologique aux praxéologies de calcul et d'écriture d'égalités.

Analyse *a posteriori* de la situation d'institutionnalisation

L'épisode suivant rend compte d'un épisode à l'occasion de la correction du calcul du produit 34×102 :

P : on reprend le premier ? Donc Mau a écrit 34 multiplié par 100 plus 34 multiplié par 2 ... est-ce que c'est bien égal à ce qui est écrit là à gauche ?

Classe : oui

P : pourquoi ?

Mat : parce que c'est la même chose qu'a fait Chr et c'est le théorème, enfin en fait elle a décortiqué le nombre elle a fait 100 plus 2

On y observe des descriptions de techniques mais pas de technologie spontanément, le professeur insiste, en demandant pourquoi. Dès lors, Mat le justifie par l'évocation du théorème, qui prend donc bien la place d'élément technologique dans la praxéologie. Mat évoque aussi le premier membre des égalités produites correspondant à la manipulation des écritures : « elle a décortiqué le nombre » dit-elle. P pousse alors les descriptions, et demande de recontextualiser, Mat s'exécute, non sans difficulté, mais parvient à décrire les programmes de calcul, même si le premier omet l'un des facteurs qui est 34 :

P : elle a fait 100 plus 2 et après ?

Dav : de l'autre côté

Mat : 100 et 2 ça fait 102 donc heu 34 fois 100 elle a trouvé le résultat après elle l'a ajouté

à 34 fois 2 pour faire 100 plus 2 et elle a trouvé le résultat

Ce qui manque cependant dans cette description est l'idée d'équivalence, de sorte que le professeur relance :

P : oui mais qu'est-ce qui vous assure que là, ça ce calcul là il est bien égal à celui là ? Clo ?

Clo : c'est le théorème qui le dit

Le théorème est bien élément technologique assurant l'égalité, ou plus exactement équivalence des programmes de calcul. Les échanges qui se poursuivent sont nombreux et parfois difficiles, mais leurs analyses montrent que s'y construisent bel et bien des articulations entre dimension mathématique et sémio-linguistique avec des allers-retours entre formulations générales et instanciées. Ainsi l'expression $100 + 2$ est-elle ici interprétée comme écriture de nombre (« elle a décortiqué 102 »), comme programme de calcul (« 100 et 2 ça fait 102 ») ou comme somme de termes correspondant au théorème.

Plus généralement, les analyses des discours qui apparaissent dans la classe montrent que les élèves se saisissent du théorème et des formulations qui servent doublement. Elles permettent de justifier l'équivalence implicitement employée relevant de la distributivité, qui assume son rôle technologique de ce point de vue à la fois dans les praxéologies de calcul et d'écriture d'égalités. Elles permettent de soutenir les manipulations dans les descriptions des gestes de transformation d'écriture, à la fois numériques et algébriques.

Des savoirs opérationnels à l'issue de l'ingénierie

Plus généralement, les résultats des analyses *a priori* et *a posteriori* montrent que les situations envisagées permettent de construire divers formalismes associés à la propriété de distributivité, à la fois rhétoriques et algébriques. Les interprétations associées articulent les dimensions sémio-linguistique (transformation de mouvement) et mathématique ou notionnelle (programme de calcul) et l'expérimentation menée montre que les élèves parviennent à se saisir des discours afférents. Les difficultés langagières sont importantes, et les interventions didactiques du professeur prévisibles apparaissent avec toutes leurs maladresses. Pourtant, la mémoire des milieux successivement construits joue un rôle déterminant pour permettre des interprétations multiples des égalités et une évolution des discours en construction. Ces discours prennent du temps, nécessitent de nombreuses reprises faites de décontextualisations et recontextualisations, mais ils n'en s'élaborent pas moins en se nourrissant des interventions des uns et des autres. C'est là l'un des résultats saillants de l'expérimentation : celui de l'émergence de dialectiques fines entre les dimensions sémio-linguistique et mathématique véhiculées par les transformations de mouvement et qui accompagnent les réorganisations praxéologiques conduisant à ce que la distributivité occupe une place dans la composante technologique tout en s'articulant avec un travail sur et avec les ostensifs. Les interprétations des expressions réfèrent à la fois à des écritures de nombres, à des programmes de calcul et à des transformations de mouvement.

Un autre résultat réside dans la construction de formalismes rhétoriques qui, tout comme le jeu construit sur les variables didactiques à l'origine, permettent que subsistent une certaine souplesse des écritures tout au long des situations. Ceci conduit à penser que les manipulations ostensives qui s'exercent se fondent sur les fonctions syntaxiques. Cette flexibilité persiste en

partie¹ au moment de l'évaluation, avec des contrôles qui semblent s'exercer pour la commutativité selon les opérations à l'instar de l'extrait suivant :

$$6 \times (x + 4) = 6 \times 4 + 6 \times x.$$

$$(x - 8) \times 2 = 2 \times x - 2 \times 8.$$

$$5 \times c + 5 \times 7 = 5 \times (c + 7).$$

Figure 9 – Extrait d'une copie

Les unifications entre factorisation et développement et distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction auront alors été à l'étude.

L'ingénierie que nous avons élaborée et expérimentée est en réalité une première étape d'un projet global de construction d'une alternative pour l'enseignement du calcul algébrique au collège à partir d'enjeux formalisateur unificateur et généralisateur. Les analyses de manuels tout au long de la scolarité obligatoire et dont nous n'avons donné que quelques résultats ici montrent qu'une organisation des savoirs à enseigner autour du calcul algébrique est possible de ce point de vue, voire même en arrière plan des programmes, et en même temps qu'elle ne vit pas réellement en l'état dans l'enseignement. De multiples incomplétudes peuvent faire obstacle du côté des praxis anciennes de calcul au primaire. Les enjeux de co-constructions des systèmes de nombres et d'extension de l'usage de la distributivité s'avèrent implicites, ou peu explorés. Ils se déploient pourtant tout au long du collège, des nombres entiers ou décimaux aux nombres relatifs, ainsi qu'aux « racines carrées » de nombres positifs. Notre étude met également à jour des extensions du côté des polynômes dans l'utilisation de la distributivité qui s'exercent silencieusement dans l'institution, et qui s'accompagnent de substitutions muettes ou présentées comme allant de soi dans les manuels. Elles concernent des monômes par exemple lorsqu'il s'agit de développer $4(5x + 2)$ ou des sommes lorsqu'il s'agit de factoriser $(3x + 8)(7x - 4) + 2(3x + 8)$. Elles peuvent être précoces dans le cas des monômes. Elles interrogent dès lors la transparence du lien de la construction de la distributivité en appui sur les systèmes de nombres, son ou ses formalismes algébriques et leurs usages. Peut-on dès lors considérer la substitution comme un nouveau savoir opérationnel pour outiller la pratique du calcul algébrique ?

LA SUBSTITUTION, UNE NOTION FUG COMPLÉMENTAIRE VOIRE INCONTOURNABLE ?

Nous cherchons d'une part à déterminer dans quelle mesure la substitution existe-t-elle dans les savoirs enseignés ou à enseigner tout au long du collège comme savoir opérationnel. Nous présentons pour cela quelques résultats des analyses de manuels et de discours enseignants de la thèse, afin de pister à la fois des conditions, des contraintes mais aussi des difficultés potentielles. Nous cherchons d'autre part à déterminer dans quelle mesure doit-elle ou peut-elle être un objet d'enseignement. La réflexion épistémologique conduite dans notre recherche s'est faite en articulant des éléments liés à l'émergence historique de la notion en appui sur les travaux de Serfati (2005) et un point de vue épistémographique pour envisager à la fois des potentialités et des limites pour un tel enseignement.

Les résultats des analyses de manuels montrent une généralisation de l'utilisation des formalismes algébriques de la distributivité qui apparaît lorsqu'il s'agit par exemple de

¹ La majorité des élèves ont très normalement standardisé leurs écritures, cependant les extraits de cahiers et du contrôle qui a lieu près d'un mois après montrent qu'un quart des élèves utilisent des écritures souples.

développer $3x(x + 5)$ en appui sur l'égalité $k(a + b) = ka + kb$. Ce faisant, ce produit de trois facteurs est interprété comme produit de deux facteurs, sans que le choix opéré, dicté par l'efficacité de la technique, ne soit mis à jour. Plus encore, un monôme comme $3x$ peut être interprété soit comme Produit, soit comme Pseudo-Monôme selon que l'on développe ou que l'on factorise. La transparence de l'adaptation réalisée pose également question au regard des altérations des catégories initialement utilisées pour la construction : les manuels indiquent que k , a , et b désignent des nombres, l'interprétation de $3x$ comme une écriture de nombre est-elle évidente pour les élèves ?

Quoi qu'il en soit, les observations de substitutions implicites se révèlent muettes et précoces. Elles peuvent apparaître dès les débuts d'apprentissages en 5^e, puis en 4^e et concernent à la fois les catégories Pseudo-Monômes et Sommes. La substitution apparaît plus présente en 3^e pour outiller les factorisations, mais non les développements (ou de façon marginale), elle peut être alors posée, mais ne fait pas l'objet d'un discours. De sorte que les généralisations qui s'exercent silencieusement et les unifications qu'elles véhiculent ne semblent guère mises à l'étude. Pourtant, la substitution pourrait donner accès à des complexifications ostensives possibles, y compris en début d'apprentissage où l'expérience des formes fait défaut, et ce au regard de deux enjeux.

Elle pourrait d'une part outiller des adaptations de techniques en lien avec l'usage du ou des formalismes algébriques. Par exemple $k \rightsquigarrow (3x)$, $a \rightsquigarrow x$, $b \rightsquigarrow 5$ dans la forme « $k(a + b) = ka + kb$ » donne $(3x)x + (3x)5$. Elle pourrait même nourrir de nouvelles adaptations permettant de développer le carré d'une somme de trois termes.

Elle pourrait d'autre part permettre de créer de nouvelles identités comme

$$k(a + (b + c)) \underset{b \rightsquigarrow (b+c)}{=} ka + k(b + c) \underset{\mathcal{F}}{=} ka + kb + kc.$$

La substitution peut toutefois rigidifier la pratique, les transformations de mouvement paraissent donc complémentaires.

Toutefois de nombreuses questions demeurent, comme celle des ostensifs à utiliser pour poser une substitution. Emploie-t-on une flèche à l'instar des écritures précédentes, ou un signe = dont on étendrait encore l'usage ?

Emploie-t-on des parenthèses pour écrire les substituant ? L'extension peut être intéressante pour désigner un résultat constitué, mais jusqu'où parenthéser ?

Les assemblages dûment complétés permettent un travail aveugle dans le registre combinatoire, mais dans quelle mesure outillent-ils ou au contraire gênent-ils les interprétations ou les manipulations ?

La substitution pourrait ainsi s'avérer motrice pour articuler les différents formalismes des identités soutenant le calcul algébrique, de la distributivité sous sa forme simple, ou double et inversement. Elle pourrait soutenir explicitement des adaptations existantes, en particulier en début d'apprentissage où l'expérience des formes fait défaut, ou même permettre des adaptations nouvelles comme le développement d'un carré d'une somme de trois termes. Cependant nous ne l'envisageons que comme complémentaire aux transformations de mouvement, car son exercice dans la dimension sémio-linguistique peut rigidifier en partie les techniques. Elle s'avère avoir de l'avenir dans les types de tâches au lycée où elle peut apparaître posée pour le calcul intégral par exemple. Il reste toutefois une réflexion à conduire pour envisager ce qui peut ou doit être enseigné sur la substitution, à quel moment et sous quelles conditions, d'autant qu'en toute fin, la substitution experte se passe d'ostensifs. Quoi qu'il en soit, les transformations de mouvement comme la substitution sont envisagées pour le

travail des formalismes, nécessaire dans toute pratique d'un langage symbolique. Elles permettent d'aborder un enseignement des articulations entre dimensions sémio-linguistique et mathématique à penser. Elles sont complémentaires aux autres voies explorées par la recherche autour de la modélisation, c'est-à-dire qu'elles paraissent pouvoir faire le lien entre ces praxéologies et celles du calcul algébrique, pour sa construction, même si le travail n'est qu'amorcé ici.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BROUSSEAU G. (1990) Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9(2/3) 309-336.

ASSUDE T., COPPE S., PRESSIAT A. (2012) Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège : atomisation et réduction, *Recherche en Didactique des Mathématiques, Hors Série, Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives*.

BOSCH M., CHEVALLARD Y. (1994) Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique. *Actes du Séminaire de l'Associazione Mathesis*. 1993-1994, pp. 190-200

BROUSSEAU G. (1998) Théorie des situations didactiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1985) *La transposition didactique* Grenoble : La Pensée Sauvage. Rééd. augmentée (1991).

CHEVALLARD Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. *Petit x* 19, pp. 43-72

CROSET M.-C. (2009) Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel éducatif d'algèbre. Etude des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en-acte. *Thèse de doctorat*, Université de Grenoble.

CONSTANTIN C. (2008), Des fragilités du collégien aux difficultés du lycéen en mathématiques, deux études de cas : Yoan et Joanna, *Mémoire de Master 2 Recherche*, Université de Paris 7.

CONSTANTIN C. (2014) Quelles alternatives pour l'enseignement du calcul algébrique au collège ? *Thèse de doctorat*, Aix-Marseille Université.

DROUHARD J.-P. (1992) Les écritures symboliques de l'Algèbre élémentaire, *Thèse de l'université Paris 7*.

DROUHARD J.-P. (1995) Algèbre, calcul symbolique et didactique, In Noirfalise R., Perrin-Glorian M.-J. (Eds.) *Actes de la 8ème Ecole d'été de la Didactique des mathématiques* (pp. 325-344). Clermont-Ferrand : IREM.

DROUHARD J.-P. (2012) L'épistémographie, un outil au service de la didactique des mathématiques. In M. Abboud-Blanchard & M. Flückiger (Eds.) *Actes du Séminaire national de didactiques des mathématiques (Année 2011)*. IREM de Paris 7 – Université Paris Diderot. Pp. 129-133.

DROUHARD J.-P., PANIZZA M. (2012) Hansel et Gretel et l'implicite sémio-linguistique en algèbre élémentaire, *Recherche en Didactique des Mathématiques, Hors Série, Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives*.

DROUHARD J.-P. (2013) El análisis epistemográfico : un análisis multidimensional de los saberes para la didáctica de la matemática. Comunicación en las XXIV Jornadas de Epistemología e Historia de la Ciencia, La Falda, Córdoba. Area Lógico-Epistemológica de la Escuela de Filosofía y Centro de Investigaciones de la Facultad de Filosofía y Humanidades de la Universidad Nacional de Córdoba.

MERCIER A. (2012) Vous avez dit algèbre ? *Recherche en Didactique des Mathématiques, Hors Série, Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives*.

ROBERT A. (1998) Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherche en didactique des mathématiques*, 18(2), 139-190.

ROBERT A. (2005) Deux exemples d'activités en formation des enseignants de mathématiques du second degré. *Petit x*, 67, 63-76.

SERFATI M. (2005) *La révolution symbolique, la constitution de l'écriture symbolique mathématique*. Editions PETRA.

SFARD A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

TONNELLE J. (1979) *Le monde clos de la factorisation au premier cycle*. Mémoire de DEA des Universités de Bordeaux I et d'Aix-Marseille 2. Marseille : IREM d'Aix-Marseille.

WOZNIAK F. (2012) Des professeurs des écoles face à un problème de modélisation : une question d'équipement praxéologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 32(1)

MANUELS SCOLAIRES

BRAULT R., DARO I., FERRERO C., PERBOS-RAIMBOURG C., TELMON C. (2009) *Mathématiques 6^e* Collection PHARE, Editions Hachette

BRIAND J., NGONO B., PELITIER M.-L., VERGNES D. (2009) *Euromaths CM2*, Editions Hatier.

MEN-CNDP (2012), *Calcul et conceptualisation* (Butlen et Masselot), Le nombre au cycle 3, Apprentissages numériques, Collection « Ressources pour faire la classe ».