

# L'ACTIVITE MATHEMATIQUE DES ELEVES : NOUVEAU REGARD SUR LES RELATIONS CONTRAT DIDACTIQUE-MILIEU ET PERSPECTIVE COMPARATISTE

Magali **HERSANT**

ESPE de Nantes, Université de Nantes, CREN

magali.hersant@univ-nantes.fr

## Résumé

Quelles conditions didactiques permettent une activité des élèves source d'apprentissages mathématiques ? Cette question est au cœur des travaux didactiques. Dans mon intervention, je travaille cette question d'abord à l'aide des concepts de contrat didactique et de milieu (Brousseau, 1998). En distinguant, facette épistémologique et facette sociale du contrat didactique (Hersant, 2014), j'étudie les relations entre contrat et milieu dans le jeu de l'enseignant à partir de trois exemples. Cela permet de montrer que l'appui sur le contrat didactique peut, dans certains cas, constituer une condition pour préserver une activité mathématique chez les élèves. Dans une perspective comparatiste, j'analyse aussi deux de ces exemples avec le point de vue de la théorie des situations et celui de la problématisation (Fabre, Orange, 1997 ; Orange, 2012) pour questionner les relations entre contrat didactique, adidacticité et construction du problème.

**Mots clés : activité mathématique de l'élève, contrat didactique, facette du contrat didactique, milieu, problématisation**

## 1. INTRODUCTION

Mes travaux portent sur l'étude des conditions didactiques de la rencontre des élèves avec le savoir ; ils visent à comprendre l'effet de ces conditions sur l'activité mathématique des élèves et leurs apprentissages.

L'activité de l'enseignant détermine une part importante de ces conditions, de par la situation que l'enseignant choisit et ses interventions orales au cours de la séance. Mais elle ne détermine, ni l'ensemble des conditions de la rencontre avec le savoir, ni l'activité réelle de l'élève dans la classe de mathématiques. Ces hypothèses sont partagées par les didacticiens, elles sont mises au travail à partir de différents cadres théoriques. Ainsi, par exemple, le cadre de la double approche (Robert, Rogalski, 2002 ; Vandebrouck 2008) accorde une importance particulière à l'effet des aides et compléments que l'enseignant apporte à la tâche initiale et considère en conséquence l'activité potentielle des élèves. Mais Robert pointe aussi l'effet des habitudes de la classe, au-delà des interventions orales de l'enseignant, sur cette activité (Robert, 2004, p. 69) : « l'importance des habitudes est bien réelle et donc une part des activités des élèves est supposée enclenchée par de tels effets. »

J'ai choisi de modéliser l'activité de l'enseignant et de l'élève, d'abord, avec le cadre de la

théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998). Et, dans l'étude des conditions de la rencontre avec le savoir, j'accorde une importance particulière au contrat didactique. En effet, je considère qu'il affecte la lecture que l'élève peut faire de la situation, au-delà du discours de l'enseignant et des ajouts à l'énoncé qu'il propose, et influence donc son activité. Par ailleurs, je considère aussi que l'activité de l'enseignant ne peut être envisagée uniquement comme un projet d'organiser cognitivement la rencontre des élèves avec le savoir. En effet, l'enseignant a à gérer d'autres contraintes, en particulier des contraintes d'avancée du temps didactique. C'est une façon pour moi de prendre en compte, de façon minimale, l'aspect métier de l'enseignement. Cela me conduit à faire l'hypothèse d'un jeu possible de l'enseignant sur deux leviers pour permettre l'avancée du temps didactique : un jeu sur le milieu et un jeu sur le contrat didactique (Hersant, 2010 ; Hersant, 2012). Ainsi, dans l'étude des conditions didactiques de la rencontre de l'élève avec le savoir, je considère la situation à la fois avec le point de vue de l'enseignant non strictement envisagé comme un organisateur cognitif et avec le point de vue de l'élève envisagé comme un sujet épistémique et culturel. Autrement dit, je considère que les concepts « milieu » et « contrat didactique » sont de bons candidats pour analyser, à la fois, l'activité de l'enseignant en tenant compte de son projet didactique et des régulations qu'il y apporte lorsqu'il est confronté à la contingence et l'activité de l'élève, sans la réduire à sa stricte interaction avec le milieu de la situation dans la mesure où, d'une part, le milieu n'est pas toujours assez consistant et, d'autre part, la rencontre de l'élève avec le savoir se réalise de façon différentielle en fonction de l'intérêt que l'élève porte à la situation (sa volonté de s'y confronter en particulier), de ses connaissances mathématiques et de ses connaissances sur le fonctionnement des situations didactiques. La mobilisation conjointe des concepts de contrat didactique et milieu permet d'envisager leurs interactions et leurs effets sur l'activité des élèves.

Ce choix de modélisation de l'activité conjointe de l'enseignant et de l'élève, au cœur de mon projet de recherche depuis ma thèse, génère quelques problèmes didactiques. Pour y répondre j'ai développé la notion de contrat didactique (structuration en niveau et facettes) afin de la rendre fonctionnelle pour des analyses plus fines. Ces problèmes didactiques m'ont aussi amenée à questionner, dans une perspective de didactique comparée, les relations entre contrat didactique, milieu et problématisation (Fabre, Orange, 1997) dans l'étude de l'activité de l'élève.

Dans ce texte, je commencerais par rappeler les problèmes didactiques que j'ai rencontrés et la modélisation du contrat didactique que je propose pour y répondre. Ensuite, en m'appuyant sur deux exemples, je montrerai ce qu'apportent ces développements du contrat didactique, d'une part, pour l'analyse de l'activité de l'élève et la compréhension des relations entre contrat didactique et milieu et, d'autre part, l'étude des relations entre contrat didactique et problématisation.

## **2. QUELQUES PROBLEMES DIDACTIQUES LIES A L'USAGE DU MILIEU ET DU CONTRAT DIDACTIQUE POUR L'ANALYSE CONJOINTE DE L'ACTIVITE DE L'ENSEIGNANT ET DE L'ELEVE**

Les notions de milieu et de contrat didactique présentes dès le début dans la théorie des situations didactiques ont été aménagées dans les années 90 pour fournir des outils d'analyse des situations ordinaires. Ces aménagements peuvent être résumés de la façon suivante.

Les premières précisions ont concerné la notion de milieu. La structuration du milieu (Brousseau, 1990 ; Margolinas, 1995) a permis d'effectuer des analyses *a posteriori* de

situations. Puis le contrat didactique a été envisagé comme les stratégies de l'enseignant (Brousseau, 1996) ; cela a permis de caractériser le partage de responsabilités entre le système enseignant et le système enseigné. A partir de cette caractérisation Comiti et Grenier (1997) ont défini les contrats didactiques locaux comme des moyens de gérer et maintenir la relation didactique dans les classes ordinaires (1997, p. 85)

Lorsque l'on s'intéresse aux interactions survenant en situation de classe et notamment aux régulations qui s'exercent sur le contenu mathématique en jeu, le modèle global [du contrat didactique] ne suffit pas. Les changements de règle ou de niveaux d'activités que l'on observe relèvent de modèles 'locaux' liés à des événements contingents et ont pour objet principal de maintenir la relation didactique : l'analyse porte alors sur ces modèles locaux, les moyens de régulation pouvant être la négociation d'un nouveau contrat, que nous caractériserons alors de contrat local.

Ces précisions ont permis de nombreux travaux sur les pratiques ordinaires. Mais, dans mon travail de thèse (Hersant, 2001), confrontée à un corpus où certaines situations avaient très peu de potentialités adidactiques, pour moi, deux questions restaient en suspens :

- *quid* de l'outil milieu quand les potentialités adidactiques de la situation sont nulles et que l'enseignant pilote essentiellement par le contrat ?
- au-delà du local, le contrat didactique participe des conditions de la rencontre de l'élève avec le savoir et a un effet sur son activité (l'effet « âge du capitaine » par exemple) : comment rendre compte à un niveau non local du contrat didactique dans ces cas-là et dans les autres ?

Aussi, pour permettre l'analyse de ces situations à faibles potentialités didactiques j'ai identifié des composantes du contrat didactique (domaine, statut didactique du savoir, caractéristique méso de la situation, partage de responsabilités) et structuré le contrat didactique en trois niveaux (macro, méso, micro). Ces travaux ont permis des premières précisions sur les relations entre contrat didactique et milieu (Hersant, 2001 ; Perrin-Glorian et Hersant, 2003 ; Hersant et Perrin-Glorian, 2005).

En poursuivant l'analyse de séances ordinaires avec ces outils et en travaillant sur des ingénieries (Hersant, 2010a) j'ai formulé d'autres problèmes relatifs aux effets d'ouverture / fermeture de la situation sur l'activité des élèves. En effet, certaines actions de régulation de l'enseignant qui visent à ouvrir ou fermer la situation ne correspondent pas à un jeu sur la répartition des responsabilités par rapport au savoir mais relèvent tout de même du jeu sur le contrat didactique et influencent l'activité des élèves, dans son rapport éventuel avec le milieu de la situation et dans la nature de cette activité. Comment en rendre compte ? Que ce soit pour les ingénieries didactiques ou pour les classes ordinaires est-ce que toutes ces régulations d'ouverture / fermeture de situation se valent ? Où se jouent les différences ? M.J. Perrin-Glorian m'a demandé à ma soutenance d'HDR « quelle différence, s'il y en a, entre introduire un objet dans le milieu ou introduire une question ? ». Je pense que c'est fondamentalement une question de contrat didactique que l'on peut décliner en sous-questions : à quelles conditions préserve-t-on une activité mathématique chez les élèves lorsqu'on introduit une question dans le milieu ? Comment saisir finement la nature de cette activité ?

Ces questions m'ont conduite à préciser encore la notion de contrat didactique - en distinguant une facette épistémologique et une facette sociale - et les relations contrat didactique - milieu (Hersant, 2010b, 2012, 2014). Elles m'ont aussi incité à effectuer des travaux comparatistes en mobilisant le cadre de la problématisation pour étudier les rapports entre contrat didactique, construction de savoirs et construction de problème, dans les classes ordinaires ou dans les ingénieries didactiques.

### 3. FACETTES SOCIALE ET EPISTEMOLOGIQUE DU CONTRAT DIDACTIQUE

Cette partie reprend, de façon résumée, l'article paru dans le numéro 34(1) de la revue *Recherche en didactique des mathématiques* en janvier 2014 (Hersant, 2014).

Je considère le contrat didactique comme un *ensemble de clauses relatives au savoir et à sa construction dans le système scolaire*. Ces clauses correspondent à une analyse du chercheur, elles ne sont généralement pas explicites pour l'enseignant, ni pour les élèves, bien qu'elles permettent de régler leurs attentes réciproques à propos du savoir. Du côté de l'enseignant, ces clauses constituent des moyens de permettre la dévolution du problème ou de faire avancer sa résolution. Du côté des élèves ce sont des outils de lecture de la situation didactique, et, en particulier des attentes de l'enseignant.

Certaines clauses correspondent à des connaissances mathématiques ou sur les pratiques des mathématiques, d'autres à des connaissances sur le fonctionnement de la classe de mathématique ou sur le fonctionnement plus général de la classe. C'est à partir de cette différence de nature des clauses que je distingue respectivement la facette épistémologique, et la facette sociale du contrat didactique. Évidemment, il y a du social dans l'épistémologique mais c'est la difficulté de désigner les choses.

Par ailleurs, ces clauses renvoient à des niveaux de granularité différents : en géométrie, le fait qu'on n'ait pas le droit de mesurer pour montrer l'égalité de longueurs est une clause du contrat didactique valable à un niveau macro à partir de la moitié du collège. En CM1, au cours de la séquence sur les fractions - décimaux, mais après que les nombres décimaux ont été introduits, quand le professeur dit « à l'aide de la bande unité, indiquer la longueur de ce segment » il attend une écriture fractionnaire de cette longueur (et non décimale). C'est une convention locale, au niveau du méso-contrat didactique. Enfin, lorsque le professeur donne un exercice il attend que les élèves se mettent travail, c'est une clause au niveau micro, valable au-delà de la classe de maths.

Le croisement des facettes du contrat didactique et de ses niveaux permet de modéliser la structuration du contrat didactique avec le tableau suivant (Hersant, 2014, p. 24) :

| Niveau de contrat didactique concerné | Composantes du contrat stables à ce niveau                     | Facette épistémologique                                                                                                                                                                                                     | Facette sociale                                                                                                                                                        |
|---------------------------------------|----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                       |                                                                | Exemples de clauses (certaines sont des connaissances élèves fausses)                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                        |
| Macro-contrat didactique              | Discipline mathématique / pédagogie                            | On prouve toujours son résultat.<br>Un contre-exemple invalide une proposition. (discipline)                                                                                                                                | Ce que le professeur écrit au tableau est utile pour résoudre le problème.<br>Si le professeur écrit quelque chose au tableau c'est qu'il faut l'utiliser. (pédagogie) |
|                                       | Domaine mathématique                                           | En algèbre on utilise des lettres.<br>Quand il y a des lettres dans un énoncé il faut écrire une équation.<br>En géométrie, pour démontrer on ne mesure pas (valable à partir de la mi-collège)                             | Dans le chapitre d'algèbre (resp. de proportionnalité), il faut utiliser l'algèbre (resp. la proportionnalité) pour résoudre tous les exercices.                       |
| Méso-contrat                          | Statut didactique du savoir & caractéristiques de la situation | Dans ce chapitre, lorsque l'enseignante indique « avec la calculatrice » cela veut dire qu'elle attend que je calcule le prix final en utilisant le coefficient de proportionnalité entre le prix initial et le prix final. | Quand on fait une activité, c'est pour introduire un nouveau chapitre.                                                                                                 |
| Micro-contrat                         | Répartition des responsabilités                                |                                                                                                                                                                                                                             | Quand il pose un exercice, le professeur attend de chacun des élèves qu'il cherche le problème.                                                                        |

Figure 1 : structuration du contrat didactique en facettes et niveaux

Je vais utiliser cette modélisation pour analyser des exemples.

#### 4. JEUX DE COULEUR

Il est commun de dire qu'un changement volontaire de couleur de craie par l'enseignant peut avoir un effet négatif sur l'activité des élèves et d'associer ce jeu de couleurs à des phénomènes de contrat didactique. A partir de deux exemples, je vais d'abord montrer que la modélisation du contrat didactique présentée ci-dessus permet, à partir d'une analyse fine des phénomènes de contrat en jeu et des interactions contrat – milieu, de préciser cela en analysant les effets potentiels d'un tel jeu sur l'activité des élèves.

Les deux exemples sont issus de séances sur le problème « Les trois nombres qui se suivent » (ERMEL 1999) réalisées par deux enseignants différents dans deux classes de cycle 3. J'ai déjà proposé une analyse de ces séances du point de vue des micro-contrats didactiques (Hersant 2013), des jeux respectifs des enseignants sur le contrat didactique et le milieu (Hersant, 2010a).

Il s'agit ici d'effectuer des analyses plus fines des relations contrat – milieu pour envisager les effets des actions de l'enseignant sur l'activité des élèves.

Le problème proposé aux élèves est composé de plusieurs questions identiques : 15 peut-il se décomposer en la somme de trois qui se suivent ? Oui ? Non ? Pourquoi ? Idem pour 36, 96, 46. Je vais m'intéresser à la phase où, ayant montré que 15, 36 et 96 se décomposent, les élèves travaillent sur le cas de 46. L'objectif de cette phase est d'amener les élèves à montrer que 46 ne se décompose pas à partir d'une recherche exhaustive des possibles. Ce problème n'est pas évident au cycle 3 et les deux enseignants observés ont recours à un jeu de couleur pour faire avancer plus vite le temps didactique.

## **Analyse des interactions contrat didactique - milieu et de l'activité potentielle des élèves**

### ***Premier jeu de couleur***

Dans la première classe, le professeur écrit d'emblée au tableau la question pour 46 en rouge alors qu'il a écrit les précédentes en blanc.

15 se décompose t-il en la somme de trois nombres qui se suivent ? Oui ? Non ? Pourquoi ?  
36 se décompose t-il en la somme de trois nombres qui se suivent ? Oui ? Non ? Pourquoi ?  
96 se décompose t-il en la somme de trois nombres qui se suivent ? Oui ? Non ? Pourquoi ?  
**46 se décompose t-il en la somme de trois nombres qui se suivent ? Oui ? Non ? Pourquoi ?**

Ce changement volontaire de couleur n'est accompagné d'aucun commentaire de l'enseignant mais il est clairement identifié par les élèves comme une volonté de mettre en évidence une différence avec les cas précédents. Ce qui leur permet d'interpréter ainsi l'action de l'enseignant – de façon plus ou moins consciente – est la clause suivante : « si le prof change de couleur c'est qu'il veut nous indiquer quelque chose ».

J'analyse cette action de l'enseignant comme un jeu sur la facette sociale du contrat didactique à un niveau macro qui ne concerne pas le domaine mathématique. Il s'agit de la facette sociale car la clause en jeu renvoie à une lecture de la situation qui ne concerne pas les savoirs mathématiques. Quelles sont les conséquences de cette action sur l'activité des élèves ? L'enseignant suggère la spécificité de 46 : contrairement à 15, 36 et 96, 46 ne se décompose pas. Il prive ainsi les élèves d'une interaction avec le milieu de la situation qui aurait permis la confrontation empirique à l'impossibilité de décomposer 46, l'émergence d'un doute dont Balacheff souligne qu'il est le moteur de la preuve et la formulation d'une conjecture. Par ce jeu sur le contrat didactique, l'enseignant transforme la question en une devinette et fournit un raccourci vers la solution : 46 ne se décompose pas parce que le professeur l'a dit. Dès lors l'activité des élèves ne peut correspondre à un travail consistant sur l'élaboration de la preuve : il ne s'agit plus de produire une preuve pour lever le doute ou convaincre de l'impossibilité de décomposer 46 mais de produire une preuve formelle. La nature même de l'activité des élèves est modifiée. De plus, à un niveau qui dépasse la résolution de ce problème, dans cette configuration, les élèves, parce que le travail empirique est court-circuité, ne sont pas mis en situation de déconstruire une croyance forte : tous les problèmes de mathématiques sont possibles.

### ***Deuxième jeu de couleurs***

Dans la seconde classe, les élèves ont montré qu'on peut décomposer 15, 96 et 36 et

l'enseignante a écrit ces résultats au tableau. Elle pose la question pour 46 sans donner d'indice sur la réponse. Les élèves produisent des affiches par groupe. Sur les six affiches, quatre justifient l'impossibilité de décomposer 46 par le fait qu'il est impair. L'argument de parité est très prégnant dans la classe et les élèves n'accordent aucun crédit aux affiches qui font référence à l'argument attendu.

Les échanges entre l'enseignante et les élèves ainsi que les productions des élèves montrent que pour la plupart des élèves de la classe, le milieu comprend les résultats des problèmes précédents (15, 36 et 96 se décomposent), des faits comme «  $45 = 14+15+16$  » et «  $48 = 15+16+17$  », le fait que « 46 est impair » et une définition erronée de « nombre impair », sauf pour Manuella qui connaît visiblement la définition. Le milieu apparaît insuffisant pour invalider l'argument de parité dans la mesure où la définition de nombre pair / impair n'est pas une connaissance stabilisée et partagée dans la classe.

L'enseignante le perçoit et, vraisemblablement, ne semble pas vouloir passer en force (elle pourrait s'appuyer sur Manuella). Elle mène alors plusieurs actions que l'on peut résumer ainsi. D'abord, elle procède à un premier aménagement du milieu : elle demande la définition d'un nombre impair, puis interroge les élèves sur la parité de 46, 15, 36 et, pour chacun de ces nombres, elle fait préciser oralement s'il se décompose ou pas. L'enseignante essaie alors d'obtenir une formulation de la preuve mais l'argument de parité revient, sauf pour Siam et Manuella. L'enseignante réactive alors le milieu en obtenant un rappel de la définition d'un nombre pair et d'un nombre impair. Quentin, réagit : « Pourquoi est-ce que ça marche avec 15 alors ? », mais les autres ne mettent toujours pas en relation la définition avec les éléments établis précédemment. La résolution du problème n'avance pas ! L'enseignante prend alors une craie verte (alors qu'elle avait écrit précédemment en blanc) et complète son tableau noir de la façon suivante (figure 2) en interrogeant les élèves :

816. P : 46 ça finit par 6, donc c'est.... pair. 46 il est pair, je vais écrire ça ici.

*Les élèves commencent à parler*

821. P : 15 on a réussi, il est impair. 46 il est pair. Qu'est-ce qu'on a d'autre ? Impair ... Quentin, Quentin ?

822. Quentin : 36 il est pair aussi.

823. P : 36 il est pair.

824. Manuella : et 96 est pair parce que ça se finit par 6.

828. P : donc qu'est-ce qu'on peut dire ? ... ouais on a réussi...

830. P : 15 il est impair et on a réussi. 96 il est pair et on a réussi. Alors est-ce que de dire c'est pair ou impair qu'est-ce que ça nous permet ?

831. Naïm : rien, rien parce que ...

833. P : chut, chut, chut... Naïm ?

834. Naïm : ça fait rien du tout parce que c'est soit impair ou pair heu.... Tu peux...

835. P : exactement. Naïm, répète bien fort ce que tu viens de me... ce que tu viens de nous dire.

836. Naïm : ben ça change rien si on fait, si c'est impair ou pair ben heu...

837. P : voilà

838. N : on peut ... on peut toujours chercher ...

840. E : c'est impossible.

Figure 2 : Les flèches rouges indiquent les ajouts que l'enseignante fait au tableau initial.

Cette dernière action de l'enseignante est aussi un jeu sur la facette sociale du contrat didactique au niveau macro, hors domaine mathématique ; elle s'appuie sur la même clause que dans l'autre classe. Mais, elle est associée à un aménagement du milieu de la situation qui précise les données à mettre en relation pour résoudre le problème et arrive comme un soutien à cet aménagement du milieu. Ainsi, ce jeu de couleurs ménage un part d'adidacticité à la situation dans la mesure où il revient aux élèves de mobiliser la notion de contre-exemple pour invalider la conjecture à partir des éléments fournis. L'activité mathématique des élèves est consistante : ils ont à charge de montrer que l'argument est invalide parce qu'il y a à la fois des nombres pairs et impairs qui se décomposent.

### Quelques remarques de synthèse

Dans les deux cas, les enseignants s'appuient sur la clause « si le prof change de couleur c'est qu'il veut nous indiquer quelque chose » et joue sur la facette sociale du contrat didactique, hors domaine. Mais l'analyse met en évidence que les interactions contrat didactique - milieu sont différentes et que ces deux jeux sur le contrat didactique ont, en conséquence, des effets très différents sur l'activité des élèves.

Ces exemples montrent en particulier qu'un jeu sur la facette sociale du contrat didactique n'implique pas forcément une impossibilité d'adidacticité. Au contraire, cela peut être un moyen pour permettre cette adidacticité. Cette remarque est pour moi très importante car, dans l'analyse des pratiques enseignantes, on peut être tenté d'envisager le contrat didactique uniquement comme un élément qui prive les élèves d'une activité mathématique consistante.

Le second exemple encourage à mener des analyses fines des relations entre contrat et milieu. D'après les « cas » dont je dispose actuellement, je formule l'hypothèse que la préservation du potentiel adidactique d'une situation semble étroitement dépendre des associations « niveau de contrat didactique » – « nature de la facette du contrat didactique ». C'est une hypothèse à consolider.

### Quelle(s) problématisation(s) pour les élèves ?

Dans ce paragraphe, j'utilise le cadre de la problématisation (Fabre, Orange, 1997) pour étudier et comparer les actions de ces deux enseignants sur l'activité des élèves. Même si ce cadre est issu de la didactique des Sciences de la Vie et de la Terre et même s'il n'adopte pas les mêmes hypothèses d'apprentissage que la théorie des situations didactiques, il me paraît pertinent pour l'analyse didactique de l'activité mathématique des élèves, en relation avec la notion de milieu (pour des précisions voir Hersant, 2010a).



Dans les termes de la problématisation, le premier jeu de couleur permet la constitution implicite d'une série :

15    oui  
36    oui  
96    oui  
46    ?

Cette série (nombre, décomposition possible ou pas) crée deux types de couples : (nombre écrit en blanc, se décompose) et (nombre écrit en rouge, indéterminé). Elle n'est pas problématique et suggère une partition de l'ensemble des entiers en fonction du critère de couleur congruente avec une partition en fonction du critère de possibilité de décomposition. Je pense que cette série crée des associations qui risquent de court-circuiter la construction du problème et qu'alors l'activité des élèves relève d'une problématisation technique mais en aucun cas d'une problématisation théorique, au sens donné par Orange (2005) à ces deux types d'activité :

[dans la problématisation technique] les nécessités et les possibilités repérées le sont comme moyen d'arriver à une solution concernant ce cas. Ce sont des problématizations orientées vers les solutions.

“Cette problématisation [la problématisation théorique] est généralisante et abstraite, et non pas contextualisée. [...] Cette problématisation est orientée vers les conditions et non vers la solution comme dans les problématizations techniques (Orange, 2005) : alors que dans une problématisation technique, la problématisation et la détermination des conditions (contraintes) est un moyen d'accéder à une solution, dans une problématisation théorique ce sont les nécessités [...] qui sont le véritable résultat du travail du problème : elles établissent un savoir, théorique et critique parce qu'apodictique. Les solutions trouvées ou envisagées ne sont qu'un moyen de dégager le contingent du nécessaire.

Dans la seconde classe, le jeu de couleur permet la constitution implicite d'une autre série :

46    pair    ?  
15    impair    oui  
36    pair    oui  
96    pair    oui

Cette série (nombre, parité, décomposition possible ou pas) met en jeu trois critères et permet la constitution de triplets non homogènes (nombre, pair, décomposition possible), (nombre, impair, décomposition possible) et (nombre, pair, indéterminé). Autrement dit, le jeu de couleur met en évidence la variation de parité des nombres au regard de la stabilité des possibilités de décomposition. Il est ainsi susceptible de générer un questionnement source d'une problématisation théorique.

De fait, dans la classe, à partir du moment où l'enseignante organise cette série au tableau, les élèves construisent la nécessité « la parité n'a rien à voir avec la possibilité de décomposer ou pas 46. » Il ne faut pas exclure un effet cumulatif des actions de l'enseignante mais pour moi, cette organisation en série est une des raisons de leur réaction. En effet, comme je l'ai indiqué précédemment, les premiers aménagements du milieu ne fonctionnent pas : tout se passe comme si les élèves considéraient les rappels de la définition utiles seulement pour décider de la parité de 46, la présence à l'oral des faits « 46 est pair », « 36 est pair » « 15 est impair », isolés les uns des autres, ne suffit pas à invalider l'argument de parité. Mais les derniers aménagements du milieu qui constituent la série fonctionnent. Est-ce parce qu'ils correspondent à une mise en série écrite bien que non organisée spatialement ? Parce que la série est exhaustive ? Parce que cette mise en série est associée à la facette sociale du contrat didactique ? Ces hypothèses sont pour moi non exclusives les unes des autres, et peut-être même qu'il y a une

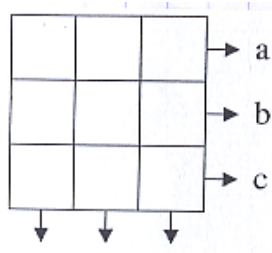
variation selon les élèves.

## 5. INTRODUIRE UNE QUESTION DANS LE MILIEU

Dans un travail d'HDR, j'ai proposé une ingénierie didactique pour le cycle 3 visant à travailler sur ce que j'ai appelé « l'obstacle de l'empirisme naïf » (Hersant, 2010a). Cet obstacle consiste à justifier l'impossibilité mathématique par une impossibilité en acte (« c'est impossible car je n'ai pas réussi »). Pour cela, avec un groupe d'enseignants et de formateurs, nous avons fait travailler les élèves sur des problèmes d'optimisation discrète (Hersant, Thomas, 2009 ; Hersant, 2010a) : dans un premier temps, il s'agissait de trouver des solutions, sans chercher à obtenir la meilleure solution possible de façon à permettre l'émergence de conjectures puis, dans un second temps, d'établir des résultats faibles (« c'est possible car on l'a fait »), des preuves de courts-circuits (« c'est impossible car... ») et la preuve finale<sup>1</sup>.

Le problème ci-dessous (figure 3) a posé une difficulté particulière dans l'ingénierie.

Placer dans la grille les nombres de 1 à 9 puis calculer la somme de chaque ligne et colonne. On note S la plus grande valeur ainsi obtenue. Placer les nombres dans la grille tel que S soit la plus petite possible.



### Preuve attendue

Il y a une disposition des nombres telle que  $S = 15$ .

Par ailleurs, S ne peut être inférieur à 15 car  $a+b+c=45$  (N1) et si a, b et c sont inférieurs ou égaux à 14 leur somme est inférieure ou égale à 42 (N2).

Donc S vaut 15.

Figure 3 : le problème « Carré magique » et sa solution

En effet, les élèves peuvent produire facilement des résultats faibles à partir de premières recherches (on peut faire 16, 17, 22, éventuellement 15). Ils peuvent aussi produire des conjectures à partir de leur expérience (15 est impossible, 14 est impossible). Ils peuvent prouver que S ne peut pas être égal à 9, 10 ou 11. Mais prouver que S ne peut être égal à 14 pose problème. En effet, pour cela est-il utile de savoir que  $a+b+c = 45$  ? Or, cette connaissance n'a aucune raison d'être activée chez les élèves.

En effet, cette situation est proposée à la suite d'autres situations de même type (optimisation discrète) et est donc repérable par les élèves comme relevant d'une séance de résolution de problème où opère un macro contrat didactique de recherche (facette épistémologique, composante domaine). En particulier, les élèves savent que l'on attend des essais puis des conjectures, puis des preuves et, comme ils ne sont pas dans un contrat arithmétique, ils n'ont

<sup>1</sup> Pour le détail de ce travail d'ingénierie je renvoie à mon HDR disponible en ligne : [http://magali.hersant.free.fr/articles/MC\\_HDR\\_Hersant\\_sansannexe.pdf](http://magali.hersant.free.fr/articles/MC_HDR_Hersant_sansannexe.pdf)

pas de raisons de chercher des égalités. De plus, dans la situation, rien n'évoque la somme des neuf premiers nombres, au contraire la phase d'énumération encourage à fonctionner uniquement avec des sommes de trois nombres en ligne ou en colonne. Se pose alors la question de comment introduire cette information dans le milieu (par une information ? par une question ?) et des effets de ce choix sur l'activité des élèves : qu'est-ce qu'on produit du point de vue du jeu sur le couple (contrat didactique, milieu) ? Sur l'adidacticité de la situation ? Sur les apprentissages des élèves ?

Le choix a été d'introduire la connaissance dans le milieu à partir d'une question. A partir d'une séance réalisée dans une classe de CM2, j'analyse l'effet de l'introduction de cette question dans le milieu sur l'activité des élèves.

A l'issue de l'énumération, les meilleures grilles produites dans les groupes sont affichées, les élèves montrent qu'on ne peut pas faire 13, 12... Ils ne savent pas trop quoi penser pour 14. L'enseignant demande de faire la somme des sommes obtenues sur les lignes « pour leur faire remarquer quelque chose ».

P : je vais vous faire remarquer quelque chose d'abord [...] Vous allez faire un petit peu de calcul mental et puis sur chacune des affiches, vous allez faire le total qui est là. Ces trois nombres là *sommes en lignes* [...] donc les trois nombres qui sont là, les trois nombres là, les trois nombres là, c'est souvent les mêmes, hein. Les trois nombres qui sont là. Et...

e : on trouve le même résultat

P : et ça fait, comme certains disent, ça fait toujours le même résultat. Et ma question : c'est pur hasard ? C'est extraordinaire ? On a eu un coup de chance ou, si je changeais les nombres là, dans la grille ça ferait toujours... alors ça fait combien là ? 16 et 14 ça fait 30 et 15 ça fait 45. Là c'est les mêmes 3 fois 15 ça fait aussi 45. Là c'est le même qu'au début. Là 13 et 17 ça fait 30 et 15 45. Là c'est les mêmes. On arrive toujours à 45 au total. Mais question c'est : c'est un hasard ça ou c'est pas un hasard ? [...] On va prendre 30 secondes pour que chacun réfléchisse dans sa tête à la question suivante : si je changeais ben tiens ouvrez donc votre cahier et prenez celle que vous avez faites au début est-ce que ça fait 45 ?

pe : oui

p : oui, c'est extraordinaire. [...] *temps* J'attends que chacun essaie de réfléchir à cette question-là : pourquoi donc ça ferait toujours 45 ? [...] Ben, oui forcément.  $1+2+4+\dots+9$  ... ça fait 45. [...] normalement, là on va toujours trouver 45.

Les questions de l'enseignant permettent d'introduire deux éléments dans le milieu :  $a+b+c=45$  et  $1+2+\dots+9=45$  (N1). Ses interventions signifient l'utilité des éléments par un jeu sur la facette sociale du contrat didactique à un niveau macro. Dans le même temps, elles introduisent des éléments du contrat arithmétique par un jeu sur la facette épistémologique du macro-contrat au niveau du domaine. Le micro-contrat didactique est plutôt de production individuelle. Cette action de l'enseignant permet de produire l'argument visé et initie même un processus de recherche de preuve chez certains élèves (Dimitri).

P : normalement, là on va toujours trouver 45. Alors Dimitri qu'est-ce que tu veux nous dire ?

Dimitri : je voulais dire après que pour trouver c'est impossible 14 eh ben, il faut heu, il faut diviser 45 par 3 et tu trouves 15.

P : j'ai pas bien suivi pourquoi donc il faudrait diviser 45 par 3. Y'en a qui comprennent pourquoi il faudrait diviser 45 par 3 ?

Axel : moi je sais. *Il y a plusieurs mains levées*

P : alors Axel ?

Axel : On peut pas faire 14 parce que quand on divise 45 par 3 ça fait 15 et ici tu en enlèves un, alors t'es obligé d'en rajouter un.

P : alors, honnêtement, pour moi dans ce problème, y'a pas de division du tout. Je ne vois pas pourquoi vous divisez 45 par 3. Alors, Jean.

Jean : parce que pour nous, il y a 3 lignes

p : oui

Jean : et le résultat des trois lignes en même temps ça fera 45.

p : alors la première ligne, plus la deuxième ligne, plus la troisième ligne, ça fait 45. Ouais. On est d'accord là-dessus.

Sacha : 45 divisé par les trois lignes, ça fait

P : ben, oui, mais pourquoi ? Qui est-ce qui a dit qu'il fallait qu'elles soient toutes égales. On fait une division par 3 quand on partage en parts égales. Mais qui a dit qu'il fallait que les parts soient égales, là ? [...]

P : Baissez vos mains et puis je vais vous proposer de réfléchir à la question suivante. On imagine, on imagine que quelqu'un, pour l'instant vous me dites que c'est impossible, mais heu... on est allé chercher un grand savant, prix Nobel de quelque chose, c'est peut-être un charlatan, on sait pas mais bon. Il nous dit : "moi j'ai réussi là, sur cette ligne là, ça fait moins que 15". Mais il ne nous dit pas combien. "Et puis là c'est moins que 15 et puis là c'est moins que 15"

pe : ah, non pas possible / impossible

pe : c'est un charlatan

P : attendez, "et puis là, pareil c'est moins que 15 et puis là aussi, ici c'est moins que 15" *il fait une grille au tableau avec en face de chaque ligne écrit "moins que 15"*

pe : mais c'est pas possible

pe : c'est un charlatan

P : "et puis là, c'est moins que 15 et puis là c'est moins que 15 et puis là c'est moins que 15."

pe : c'est pas possible / c'est un charlatan

P : on terminera là-dessus. La question que je vous pose c'est : est-ce que c'est possible ? et si vous dites que c'est un charlatan, il va être vexé, il suffit pas de dire que c'est un charlatan, qu'est-ce qui vous permet d'être sûr que ce qu'il dit là n'est pas vrai. Alors prenez le temps, vous retournez une dernière fois dans les petits groupes et essayez une dernière fois de vous mettre d'accord sur une explication... parce que si votre explication n'est pas solide, il va être vexé.

La référence au contrat arithmétique (facette épistémologique, niveau du macro-contrat didactique, clause « en arithmétique, on fait des opérations ») fonctionne bien, voire trop bien : les élèves cherchent des relations arithmétiques entre 45 et les données du problème, ils produisent des divisions ( $45:3=15$ ) mais ne semblent pas attribuer d'importance au sens de ces divisions pour prouver qu'il est impossible d'avoir  $S=14$ . Il s'agit alors de ramener les élèves à un macro-contrat didactique de preuve. Pour cela l'enseignant complète encore le milieu de la situation en proposant une solution à moins de 15 (strictement) sur chaque ligne, proposée par une personne dont on ne sait pas si c'est un savant ou un charlatan. Il demande de statuer sur cette proposition, en justifiant sa réponse, de façon à éviter de vexer le savant / charlatan.

Sacha : c'est impossible parce que 14 c'est le maximum qui est en-bas de 15, 14 fois trois ça fait en dessous de 45 et comme tous les nombres rajoutés ça fait 45 donc c'est pas possible.

P : alors, voilà une façon de le dire. Hein. Moi j'ai dit plus petit que 15. Lui il nous dit : ben, si tout est plus petit que 15, le plus possible c'est 14 14 14. Le plus grand nombre entier en-dessous de 15 c'est 14. Donc le charlatan, il fera peut-être 14 14 14. 14 plus 14 plus 14 ça fait que 42. Ça ne fait pas 45, ça ne peut pas marcher.

Ce faisant, l'enseignant joue sur la facette sociale du contrat didactique au niveau micro (clause « quand le professeur propose un problème il attend qu'on le résolve ») pour soutenir un jeu sur le milieu. Il s'en suit que des élèves produisent N2 avec une part de responsabilité assez grande (micro-contrat de production collective).

Cet exemple illustre que l'introduction un peu abrupte dans le milieu d'une question, qui implique nécessairement un jeu sur le contrat didactique, ne modifie pas forcément la part de responsabilité des élèves dans la production même de la preuve. Mais je pense que cela a toutefois un effet non négligeable sur le rapport au savoir, et ici à la preuve, que l'on développe chez l'élève puisque *de facto*, la lecture que les élèves font de la situation didactique, *via* le contrat didactique, diminue leur part de responsabilité dans la nécessité de mobiliser un argument pertinent : produire un argument pertinent comme une nécessité pour résoudre le problème (mobilisation autonome de la nécessité de prouver en mathématiques) vs produire un

argument pour se conformer aux attentes de l'enseignant ou éviter de vexer savant. Et cela a à voir avec le travail de construction de problème par les élèves en mathématiques et avec le jeu auquel on joue quand on fait des mathématiques en classe. Il me semble que si l'on ne prête pas attention à cela on prend le risque que l'activité mathématique des élèves soit privée de sa substantifique moelle.

## EN GUISE DE CONCLUSION

A partir de ces exemples, j'ai montré qu'un appui sur le contrat didactique ne prive pas toujours l'élève d'une activité mathématique consistante. Au contraire le jeu sur le contrat didactique peut venir soutenir une action sur le milieu. L'étude des relations entre contrat didactique et milieu et de ses effets de l'activité de l'enseignant sur l'activité de l'élève est à poursuivre à partir d'autres cas, à différents niveaux de scolarité. La question de la sensibilité différente des élèves aux facettes du contrat didactique me semble aussi une question à explorer.

En mobilisant le cadre de la problématisation, j'ai aussi abordé la question des relations entre préserver une dose d'adidacticité à une situation et préserver la construction du problème. Il me semble là encore que des analyses plus nombreuses sont utiles pour comprendre les effets des jeux de contrat didactique et milieu sur l'activité mathématiques de l'élève et ses apprentissages.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BROUSSEAU, G. (1990) Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 309-336. Consulté à l'adresse <http://guy-brousseau.com/2325/le-contrat-didactique-et-le-concept-de-milieu-devolution-1990/>

BROUSSEAU, G. (1996) L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. In *Actes de la 8ème Ecole d'Été de didactique des mathématiques* (Noirfalise., Perrin, p. 3-46). Clermont-Ferrand : IREM.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

COMITI, C., & GRENIER, D. (1997) Régulations didactiques et changements de contrats. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(3), 81-102.

FABRE, M., & ORANGE, C. (1997) Construction des problèmes et franchissements d'obstacles. *ASTER*, 24, 37-57.

HERSANT, M. (2001) *Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège*. Paris 7, Paris. Consulté à l'adresse [https://tel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/122340/filename/these\\_Hersant.pdf](https://tel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/122340/filename/these_Hersant.pdf)

HERSANT, M. (2010a) *Empirisme et rationalité à l'école élémentaire, vers la preuve au cycle 3* (Mémoire de recherche, Habilitation à Diriger des recherches). Université de Nantes. Consulté à l'adresse <https://sites.google.com/site/magalihersant/publications/habilitation-a-diriger-des-recherches>

HERSANT, M. (2010b) *Le couple (contrat didactique, milieu) et les conditions de la rencontre avec le savoir : de l'analyse de séquences ordinaires au développement de situations didactiques*. (Note de synthèse des travaux, habilitation à diriger des recherches). Université de Nantes. Consulté à l'adresse <https://sites.google.com/site/magalihersant/publications/habilitation-a-diriger-des-recherches>

- HERSANT, M. (2012) Le couple (contrat didactique, milieu) et les conditions de la rencontre avec le savoir en mathématiques : de l'analyse de pratiques ordinaires au développement de situations pour les classes ordinaires. In *Actes du Séminaire national de Didactique des mathématiques 2011* (p. 263-277). Paris : IREM Paris 7, ARDM.
- HERSANT, M. (2013) Le contrat didactique et l'organisation de la rencontre des élèves avec le savoir. In *Pratiques enseignantes en mathématiques : expérience, savoirs et normes* (M. Hersant & C. Morin, p. 292). Bordeaux : Presses Universitaires de Bordeaux.
- HERSANT, M. (2014) Facette épistémologique et facette sociale du contrat didactique : une distinction pour mieux caractériser la relation contrat didactique milieu, l'action de l'enseignant et l'activité potentielle des élèves. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(1), 9-31.
- HERSANT, M., & PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2005) Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactic situations. *Educational Studies in Mathematics*, 59(1), 113-151.
- HERSANT, M., & THOMAS, Y. (2009) Quels savoirs mathématiques dans les problèmes pour chercher à l'école élémentaire ? Le cas de problèmes d'optimisation au cycle 3. In *Actes du 35<sup>e</sup> colloque de la Copirelem*. Bombannes : IREM de Bordeaux.
- MARGOLINAS, C. (1995) La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori de situations. In *Les débats en didactiques des mathématiques, annales 1993-1994* (Margolinas, p. 89-103). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- ORANGE, C. (2005). Problème et problématisation dans l'enseignement scientifique. *Aster*, 40, 1-7.
- PERRIN-GLORIAN, M. J., & HERSANT, M. (2003) Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(2), 217-276.
- ROBERT, A. (2004) Une analyse de séance de mathématiques au collège à partir d'une vidéo filmée classe. La question des alternatives dans les pratiques d'enseignants, perspectives en formation d'enseignants. *Petit x*, 65, 52-79.
- ROBERT, A., & ROGALSKI, J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Canadian Journal of Sciences, Mathematics and Technologies Education*, 2(4), 505-528.
- VANDEBROUCK, F. (2008) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (Première édition). Toulouse : Octares Editions.