ÉTUDE DIDACTIQUE DE LA REPRISE DE L'ALGEBRE PAR L'INTRODUCTION DE L'ALGORITHMIQUE AU NIVEAU DE LA CLASSE DE SECONDE DU LYCEE FRANÇAIS

Nathalie **BRIANT**

Laboratoire LIRDEF[1], FDE, Université de Montpellier

nathalie.briant@fde.univ-montp2.fr

Résumé

La réforme des lycées en France de 2009 s'est accompagnée d'un changement de programmes en mathématiques. Relativement à la classe de seconde, deux sujets nous questionnent : d'une part, la nouvelle place de l'algèbre, désormais plongée dans le domaine fonctionnel, et d'autre part l'introduction d'une familiarisation avec l'algorithmique. De par l'intérêt de lier ces deux sujets, une étude didactique de la *reprise* de l'algèbre élémentaire en classe de seconde est proposée. En particulier, nous étudions des objets gravitant autour du concept d'équation, objets dont nous cherchons à affiner le sens par le *détour* de l'algorithmique.

Nous situant dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique de Chevallard (1992, 1999), nous étudions les conditions et les contraintes de cette reprise, au travers d'une ingénierie didactique mise en place avec la collaboration de trois enseignants.

Nous tirons quelques conséquences de ce travail sur les conceptions des équations chez les élèves, sur les praxéologies algébriques mises en œuvre par les enseignants et sur l'intégration de l'algorithmique dans les programmes de mathématiques.

Mots clés

Algèbre élémentaire, concept d'équation, résolution d'équation, algorithmique, algorithme, programmation, transposition didactique et informatique, classe de seconde.

Ces actes constituent une synthèse de mes travaux de thèse, soutenue en décembre 2013 à l'Université de Montpellier II. Après avoir introduit mon thème d'études ainsi que les origines et les motivations de ces recherches, j'expose la problématique en y incluant mes hypothèses de recherche, et en explicitant le cadre didactique dans lequel je me situe. Je détaille ensuite la méthodologie de recherche suivie, en insistant davantage sur quelques points précis, comme l'ingénierie didactique élaborée en collaboration d'enseignants de lycée. Puis j'indique les principaux résultats de ces travaux et des éléments de réponse à ma problématique. Ces résultats sont déclinés en deux volets, constitués d'un point de vue élève, en ce qui concerne les apprentissages algébriques et d'un point de vue enseignant, au sujet des enseignements de l'algèbre et de l'algorithmique, ainsi que des possibilités de liens entre ces deux domaines.

[1] Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Didactique, Éducation et Formation. Université de Montpellier.

LES ORIGINES DE LA RECHERCHE ET LES PREMIERES QUESTIONS

Afin d'expliciter les origines de mes travaux, et en considérant le titre de la thèse, j'en extrais trois mots-clefs : *algèbre, algorithmique* et *classe de seconde*, dont j'explicite ici les liens.
Ayant exercé comme enseignante en lycée durant une douzaine d'années, j'ai vécu « de l'intérieur » – par la confrontation avec les difficultés récurrentes des élèves – les nombreux obstacles de l'*algèbre,* obstacles étudiés par moult recherches épistémologiques et didactiques depuis les années 1980. J'ai ainsi souhaité transformé mon questionnement sur ce domaine en tant qu'enseignante en questionnement en tant que chercheuse. En outre, le choix de ce domaine constitue une continuité avec les travaux du LIRDEF, en particulier avec les travaux de Bronner (1997) sur le numérique-algébrique. Pour l'*algorithmique,* sans doute ai-je été influencée par ma formation initiale d'ingénieur physicien, et en particulier par l'enseignement en informatique que j'ai reçu. Ces connaissances m'ont sensibilisée à l'intégration des Technologies de l'Information et de la Communication pour l'Enseignement (TICE). Mon passage à l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) dans l'équipe « intégration des calculatrices à l'enseignement des mathématiques » a également contribué à cet intérêt. Le troisième mot-clef « *classe de seconde* », est relatif à un niveau où j'ai longtemps enseigné, et dont le programme a récemment changé avec la réforme des lycées de 2009[2]. Ces changements portent notamment sur l'introduction de l'algorithmique et sur une modification de la place de l'algèbre. De plus, ce niveau de classe a retenu mon attention cat il représente pour chaque élève suivant une filière générale un passage, une classe charnière entre le collège et la série du cycle terminal du lycée qui sera choisie. L'*algèbre* y trouve une place spécifique, puisqu'elle fonctionne comme un verrou d'accès aux études mathématiques et scientifiques. Ainsi ces trois mots-clefs sont-ils à la fois au carrefour de mon parcours personnel et au carrefour de différents éléments d'enseignement qui suscitent un questionnement.

Les changements dans les programmes officiels de mathématiques suite à la réforme des lycées de 2009

Précisons quelques points de la réforme des lycées de 2009. Cette réforme s'est accompagnée de changements de programmes en mathématiques qui concernent, entre autres, le domaine *numérique - algébrique* : la question de la *reprise* (Larguier, 2009) des premiers concepts de ce domaine vus au collège se pose aux professeurs de lycée d'une façon nouvelle, d'autant plus que des changements de programmes au niveau du collège ont également été opérés. Un autre changement institutionnel concerne l'introduction, dans toutes les classes de la voie générale et technologique du lycée, de l'*algorithmique* dans les programmes de mathématiques. Celle-ci est présentée par les auteurs des programmes comme *une formation des élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes.*
À propos de la modification de la place de l'algèbre dans ce programme et sur l'interprétation que j'en fais, la lecture du bulletin officiel de mathématiques de la classe de seconde (MEN, 2009) montre un découpage des savoirs en trois domaines nommés « *Fonctions ; Géométrie ; Statistiques et probabilités* ». L'algèbre n'y apparaît pas comme un domaine[3] à proprement parler. Pour « trouver » l'algèbre, il faut explorer le contenu du domaine *Fonctions.* Le tableau qui suit (cf. figure 1) présente des extraits choisis de ce domaine (MEN, 2009a, p.4) déclinés en contenus, capacités et commentaires, où j'ai indiqué en caractères gras les concepts algébriques à enseigner.

[2] Cette réforme a débuté en classe de seconde en 2009 et s'est poursuivie en classes de première et de terminale en 2011 et 2012
[3] Les termes *domaine, secteur d'étude, thème d'étude* et *sujet d'étude* sont à prendre au sens des niveaux de l'échelle de codétermination didactique de Chevallard (2002).

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Fonctions Image, antécédent, courbe	Traduire le lien entre deux quantités par une **formule**. […]	[…]
Étude qualitative de fonctions	[…]	[…]
Expressions algébriques **Transformations d'expressions algébriques** en vue d'une résolution de problème**.**	- Associer à un problème une **expression algébrique**. - **Identifier la forme la plus adéquate (développée, factorisée) d'une expression** en vue de la résolution du problème donné. - **Développer, factoriser des expressions polynomiales simples ; transformer des expressions rationnelles simples**.	**Les activités de calcul** nécessitent une certaine maîtrise technique et doivent être l'occasion de raisonner. Les élèves apprennent à développer des stratégies s'appuyant sur l'observation de courbes, **l'anticipation et l'intelligence du calcu**l. […]
Équations **Résolution** graphique et **algébrique d'équations.**	- Mettre un problème **en équation.** - **Résoudre une équation se ramenant au premier degré.** […]	Pour un même problème, combiner résolution graphique et **contrôle algébrique.** […]
Fonctions de référence Fonctions linéaires et affines […]	**Donner le tableau de signes de $ax + b$ pour des valeurs numériques données de a et b.** […]	[…]
Étude de fonctions. Fonctions polynômes de degré 2 Fonctions homographiques	[…]	[…]
Inéquations **Résolution** graphique et **algébrique d'inéquations.**	- Modéliser un problème par **une inéquation.** - Résoudre graphiquement des inéquations de la forme : $f(x) < k$; $f(x) < g(x)$. - **Résoudre une inéquation à partir de l'étude du signe d'une expression produit ou quotient de facteurs du premier degré.** - **Résoudre algébriquement les inéquations** nécessaires à la résolution d'un problème.	Pour un même problème, il s'agit de : - combiner les apports de l'utilisation d'un graphique et **d'une résolution algébrique**, - mettre en relief les limites de l'information donnée par une représentation graphique. […]
Trigonométrie	[…]	[…]

Figure 1 – *Extraits du domaine "Fonctions" du programme de seconde de 2009*

L'analyse de ce tableau montre que les concepts algébriques sont scindés en différents secteurs qui apparaissent disséminés parmi les secteurs fonctionnels : par exemple, le secteur des *équations* est situé entre *l'étude qualitative des fonctions* et l'étude des *fonctions de référence*. De même, le secteur des *inéquations* se trouve entre l'étude *des fonctions polynomiales et homographiques* et la *trigonométrie*. Remarquons enfin que chacun des secteurs comportant de l'algèbre inclut des thèmes algébriques mais également des thèmes fonctionnels : par exemple, les thèmes « *résoudre graphiquement une inéquation* » et « *résoudre algébriquement une inéquation* » cohabitent dans le secteur des inéquations.

Cette brève étude des programmes nous permet de conclure sur la volonté de la noosphère de considérer l'algèbre dans le *champ conceptuel* (Vergnaud, 1990) des fonctions, mais également de ne pas faire apparaître l'algèbre comme un *domaine*. L'algèbre ne se présente plus comme une branche des mathématiques étudiée pour elle-même, mais comme un *outil* (Douady, 1986) au service des autres branches des mathématiques et plus particulièrement de l'analyse. Une réelle insistance est faite en ce sens, puisque ces recommandations persistent dans un des documents ressources de la classe de seconde (MEN, 2009b), comme le montre cet extrait :

> Si un certain degré de maîtrise technique est à faire acquérir aux élèves et donc à travailler, il est essentiel, pour lui donner du sens, de toujours situer le calcul algébrique dans la perspective d'une

> résolution de problème, le fait d'associer à un problème une formule devant être obtenu des élèves eux- mêmes. […] Toutefois le degré de technicité attendu de certains élèves peut, et doit, rester modeste. Quand la complexité du calcul devient plus grande, ou du moins trop grande pour eux, un recours à des logiciels de calcul formel est possible et est à favoriser. (Op. Cité, p.13)

Je me suis donc questionnée sur la lecture que l'enseignant fait de ces programmes. Comment le professeur de la classe de seconde interprète-t-il la logique des concepteurs des programmes, où l'algèbre est considérée essentiellement comme un outil pour l'analyse ? Parvient-il à *toujours* situer l'algèbre dans la perspective d'une résolution de problème (cf. citation ci-dessus) ? Confronté aux difficultés de ses élèves, n'est-il pas dans l'obligation de s'attarder sur l'algèbre en tant qu'*objet* (Douady, 1986) et de mettre en place ou de reprendre des praxéologies algébriques, en les décontextualisant des contextes des problèmes ?
De la même manière, en me situant du côté de l'élève, je me suis interrogée sur la représentation de l'algèbre que celui-ci va se forger, si celle-ci est essentiellement étudiée au travers de problèmes empruntés à d'autres champs mathématiques et si l'élève utilise des outils de calcul formel qui remplacent la technique et la technologie sous-jacente. Quel degré de variabilité des élèves est observable sur leur capacité à révéler l'algèbre en tant qu'objet par rapport à l'utilisation qu'ils en font en tant qu'outil ?

Le lien entre algèbre et algorithmique

Ainsi, me posant la question de savoir si cette place de l'algèbre – présentée comme *outil* et particulièrement dans le cadre fonctionnel – est suffisante pour l'enseignement et l'apprentissage de ses concepts, je me suis intéressée à un secteur algébrique particulier, celui des équations polynomiales du 1er et du 2nd degré et de leur résolution.
En effet, vu l'étendue du domaine algébrique, il me fallait circonscrire un secteur de l'algèbre, un secteur qui permette de travailler sur les *objets* eux-mêmes, et également un secteur qui puisse être lié à l'algorithmique, puisque ma volonté était d'intégrer ce domaine à ma problématique et d'en montrer l'intérêt. Je me suis inspirée d'Al Khawarizmi et de son traité « *Al-Kitab al mukhtasar hisab al-jabr wa'l-muqabala* » qui répertorie de façon systématique, algorithmique pourrait-on dire, des méthodes de résolution d'équations du 1er et du 2nd degré.
Pour justifier en quoi l'algorithmique peut apporter une aide à la résolution d'équations, je commencerai par présenter quelques erreurs d'élèves de la classe de seconde[4]. Ces productions ont été choisies pour leur représentativité et leur typicité.

[4] Productions d'élèves relevées dans le cadre de mes travaux de thèse (Briant, 2013)

Équation proposée à la résolution	Production d'élève
$2(x-1) + 5x = 3x + 4 - 2(x+1)$	$2x-2+5x=3x+4-2(x+1)$ $7x-2 \quad \mid \quad x+2$ $7x-2=0 \quad \mid \quad x+2=0$ $7x=2 \quad \mid \quad x=-2$ $x=\frac{2}{7}$
$x^2 + 6x + 9 = 0$	$x^2+6x=-9$ $x^2+x=-\frac{9}{6}$ $x^3=-\frac{9}{6}$
$(3x + 1)^2 - 4 = 0$	$9x^2+6x+3-4=0$ $9x^2+6x=-1$ $3x+\sqrt{6}x=-1$ $3\sqrt{6}x=-1$ $x=-\frac{1}{3\sqrt{6}}$

Figure 2 – *Quelques productions d'élèves sur la résolution d'équations polynomiales*

La première production montre une confusion de techniques, l'élève essayant d'appliquer ici la « méthode du produit nul » à une équation du 1er degré. Les deuxième et troisième productions montrent des équations du 2nd degré où les élèves tentent d'isoler l'inconnue *x* dans un membre comme on peut le faire pour résoudre une équation du 1er degré : on trouve ici des concaténations, des fausses linéarités (Grugeon, 1995) ou des conceptions erronées sur les puissances et racines carrées (Bronner, 1997). Ces difficultés ne concernent pas que quelques élèves, comme l'ont montré des recherches antérieures et comme le confirme l'étude que j'ai menée (Briant, 2013) sur la compétence algébrique des élèves en fin de seconde. Les élèves ont certaines connaissances, ils connaissent quelques types d'équations et quelques techniques, mais ils éprouvent des difficultés à déterminer quel type de technique correspond à quel type d'équation.

Pour arriver à ce que les élèves associent type d'équation et type de technique de résolution, l'idée de l'introduction de l'algorithmique pourrait être synthétisée à l'aide d'un organigramme comme celui de la figure 3.

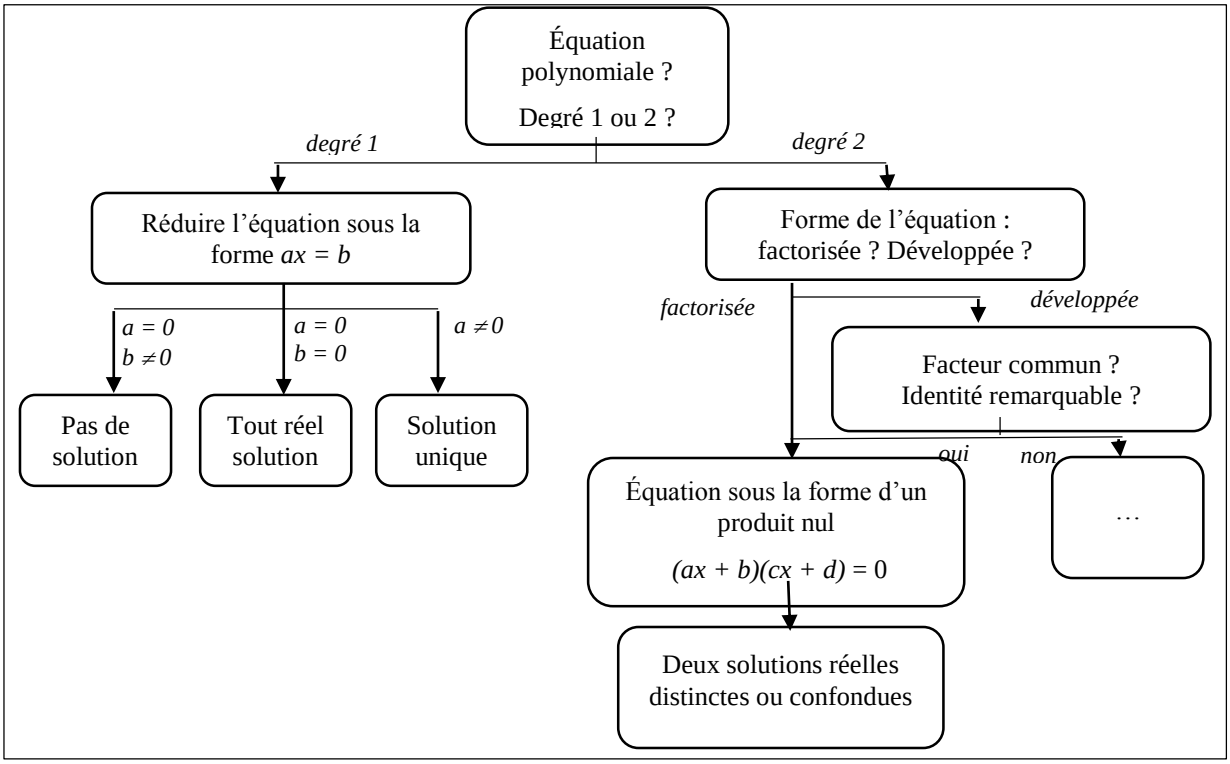

Figure 3 – *Algorithmes de résolution d'équations polynomiales de degré 1 ou 2*

Cet organigramme succinct de résolution des équations polynomiales de degré 1 ou 2 est accessible à des élèves de seconde qui ne connaissent pas encore la technique dite « du discriminant » pour résoudre les équations de degré 2, c'est-à-dire que tout type d'équation du 2nd degré ne peut encore être résolu à ce niveau selon une technique unificatrice. Notons que le schéma de la figure 3 n'est pas à considérer comme un objectif en soi, il figure ici comme illustration d'un schéma mental, résumé des questions que les élèves devraient se poser avant de résoudre une équation, et pendant la résolution. Les quelques productions rapportées en figure 2, sont révélatrices que ce schéma mental fait défaut à un certain nombre d'élèves. C'est ainsi que l'idée de mettre l'algorithmique au service de l'algèbre en tant qu'*outil* est née, avec l'algèbre au cœur de l'utilisation de l'algorithmique, c'est-à-dire l'*objet* sur lequel l'algorithmique opère.

Résoudre une équation du 1er ou du 2nd degré demande de reconnaître une certaine catégorie d'équations, puis d'effectuer un traitement algébrique selon des techniques éprouvées permettant sa résolution. Il s'agit donc, à la manière d'Al Khawarizmi, de *classer* puis de *résoudre* des équations. L'objectif à atteindre est que les élèves, aussi bien en environnement informatisé qu'en environnement papier-crayon, parviennent à catégoriser type d'équation et technique de résolution correspondante.

Il s'agit donc de *reprendre* les équations qui ont déjà été étudiées dans les classes de 4e et 3e au collège en y ajoutant l'algorithmique. Le concept de *reprise* est défini ainsi par Larguier (2005) :

> La reprise se situe donc au moment d'une nouvelle mise en scène de savoirs déjà institutionnalisés dans les classes antérieures. La reprise peut alors aller à l'extrême d'un redoublement du temps didactique, et constitue alors un recommencement qui se traduit dans les classes par des rappels ou encore par des révisions ; jusqu'à une « reprise d'étude » et une reprise de l'avancée du temps didactique qui fait apparaître de nouveaux enjeux d'étude et qui est alors une poursuite de l'étude amorcée dans les classes antérieures. (Op. Cité, p.17)

Ce chercheur met l'accent sur deux extrêmes de reprise, soit une reprise à l'identique de

connaissances déjà rencontrées, soit une reprise qui permet une avancée du temps didactique en ajoutant aux connaissances anciennes de nouvelles connaissances. Dans ces travaux de recherche, c'est la *reprise* dans ce second sens qui est convoquée, puisque les types d'équations retravaillés sont ceux enseignés au collège, mais que sont *noués ensemble de l'ancien et du nouveau* (Larguier, 2009), par l'ajout de l'étude d'algorithmes et de programmes. Les résultats présentés plus loin montrent comment une avancée du temps didactique s'est faite pour le concept d'équation.

CADRE THEORIQUE, PROBLEMATIQUE ET METHODOLOGIE

Cadre théorique

Le titre de la thèse annonce que les travaux entrepris se situent à la frontière de différents champs, de différents domaines qui s'articulent entre eux. Il s'ensuit que le travail d'analyse et de synthèse nécessite des outils théoriques issus de plusieurs origines et avec différentes approches. Aussi, afin de modéliser le travail de l'enseignant et celui de ses élèves, en tenant compte des conditions et contraintes qui s'exercent sur eux, j'ai choisi un cadre théorique permettant des analyses autant de niveau macro-didactique que de niveau micro-didactique telle la *théorie anthropologique du didactique* de Chevallard (1985, 1992, 1999). Ce cadre est notamment complété par les travaux de Brousseau (1998) sur la *théorie des situations* pour la création des situations de *l'ingénierie didactique* (Artigue, 1990) mises en place dans l'expérimentation, et que je définis en section suivante. Également les concepts de *champ conceptuel* (Vergnaud, 1990), de la *dialectique outil-objet* (Douady, 1986), et celui de *reprise* (Larguier, 2009) sont convoqués.
Des cadres plus spécifiques relatifs aux domaines de l'algèbre et de l'algorithmique ont également été utilisés. Ainsi pour l'algèbre, mes principales références sont les travaux de Grugeon (1995) sur la *compétence algébrique*, ceux de Sfard (1991, 1994) sur les *conceptions structurale et procédurale* des expressions algébriques, et également les travaux de Bronner (1997) sur l'articulation numérique-algébrique. Pour l'intégration didactique des TICE, je me suis inscrite dans les travaux de Rabardel (1995) sur la *genèse instrumentale*, ceux de Balacheff (1994) sur la *transposition informatique* et ceux d'Artigue (1997) sur la *pseudo-transparence*. Notons que pour l'algorithmique à proprement parler, je me suis basée sur les thèses de Nguyen (2005) et de Modeste (2012), et que peu de travaux de recherche en didactique existent à ce jour dans ce domaine.

Problématique et hypothèses de recherche

La problématique de mes travaux peut se résumer par cette question :
Quelles sont les conditions et les contraintes, côté enseignant et côté apprenant, pour une reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique dans le cadre de la classe de seconde du lycée ?
À partir de cette problématique, quatre hypothèses de recherche ont été déclinées, qui concernent :
- le rapport des enseignants au programme institutionnel, sur la nécessité de considérer l'algèbre, non seulement comme un outil pour résoudre des problèmes mais aussi comme un objet à étudier (hypothèse H1) ;
- le rapport des élèves à la considération des concepts algébriques dans leur dimension objet (hypothèse H2) ;
- l'apport de l'algorithmique liée à la programmation pour l'enseignement et l'apprentissage de

concepts algébriques (hypothèse H3) ;
- l'impact des choix d'organisations mathématiques et didactiques, dans l'expérimentation, sur les possibilités d'apprentissages des élèves (hypothèse H4).
La problématique propose donc d'étudier diverses conditions et contraintes relativement aux élèves, aux enseignants et à l'institution Éducation Nationale, afin d'aborder comment vivent les domaines de l'algèbre et de l'algorithmique,

Méthodologie de recherche

Afin de répondre à cette problématique et d'éprouver mes hypothèses de recherche, j'ai élaboré quatre études :
- une analyse institutionnelle sur l'enseignement des équations à la fin du collège et au début du lycée, conjuguant une analyse des programmes officiels et de manuels de mathématiques ;
- une étude diagnostique des connaissances d'élèves de fin de seconde en algèbre élémentaire ;
- une *ingénierie didactique* en classe de seconde comportant trois *situations* expérimentées dans trois classes de seconde sur la reprise du concept d'équation, en utilisant l'algorithmique ;
- des entretiens des professeurs expérimentateurs à propos des conditions et contraintes de l'introduction de l'algorithmique au lycée sur leurs pratiques, en lien avec l'expérimentation réalisée dans leur classe, en amont et en aval de celle-ci.
Dans cette synthèse, j'axerai mes propos sur l'ingénierie didactique mise en place, en développant plus particulièrement la méthodologie employée. Je ne reviendrai pas ici sur la méthodologie des trois autres études, dont je donnerai simplement quelques résultats par la suite. Précisons tout d'abord les raisons d'être de cette expérimentation.
D'une part, les programmes institutionnels n'incitant pas à mêler algèbre et algorithmique[5], les professeurs ne semblent pas proposer spontanément des situations présentant cette articulation entre algèbre et algorithmique. En particulier, les enseignants ayant participé à l'expérimentation n'inscrivent pas ou peu ce type de situations dans leurs pratiques. Étant donné que mes travaux sont basés sur cette articulation, une *étude clinique* stricte est de ce fait exclue, et il m'est apparu nécessaire de proposer une *ingénierie didactique* où algèbre et algorithmique sont liées. D'autre part, comme je souhaite étudier certains choix d'organisations mathématique et didactique des professeurs expérimentateurs et tenir compte de leurs conditions et contraintes d'enseignement (cf. hypothèse H4), ceci nécessite que l'ingénierie ne soit pas complètement achevée et modifiable sur certains points. C'est ainsi que j'ai développé une expérimentation spécifique, construite de façon collaborative avec trois enseignants de lycée. La collaboration est à prendre dans le sens des principes de la *recherche collaborative* développés par Bednarz et Desgagné (1997, 2005). J'ai choisi ici cette citation de Desgagné (1997) qui explicite en quelques mots cette collaboration, telle que j'ai souhaité la réaliser :

> Le chercheur sollicite des praticiens, parce qu'il croit à une construction de connaissances qui ne peut faire fi ni du contexte réel d'exploration, ni du point de vue de l'acteur praticien en action dans ce contexte. (Op. cité, p.381)

Desgagné et Bednarz ajoutent un regard croisé entre le chercheur et le praticien, qui par une volonté commune de construire des liens, les fait progresser tous deux dans la constitution d'objets *co-situés,* spécifiques, comme par exemple la conception de séquences ou de scénarios d'enseignement. Mais toutes les étapes de l'expérimentation ne sont pas co-construites. La méthodologie suivie se schématise selon la figure 4 et est explicitée ci-dessous.

[5] Une étude des programmes institutionnels des classes du lycée (Briant, 2013) montrent en effet que les *niches* de l'algorithmique sont surtout proposées dans les domaines de l'analyse, de la géométrie et des statistiques et probabilités. Seul le secteur « second degré » du domaine algèbre est cité comme pouvant faire l'objet *d'activités algorithmiques* au niveau du programme des classes de première S et ES (MEN, 2010a-b).

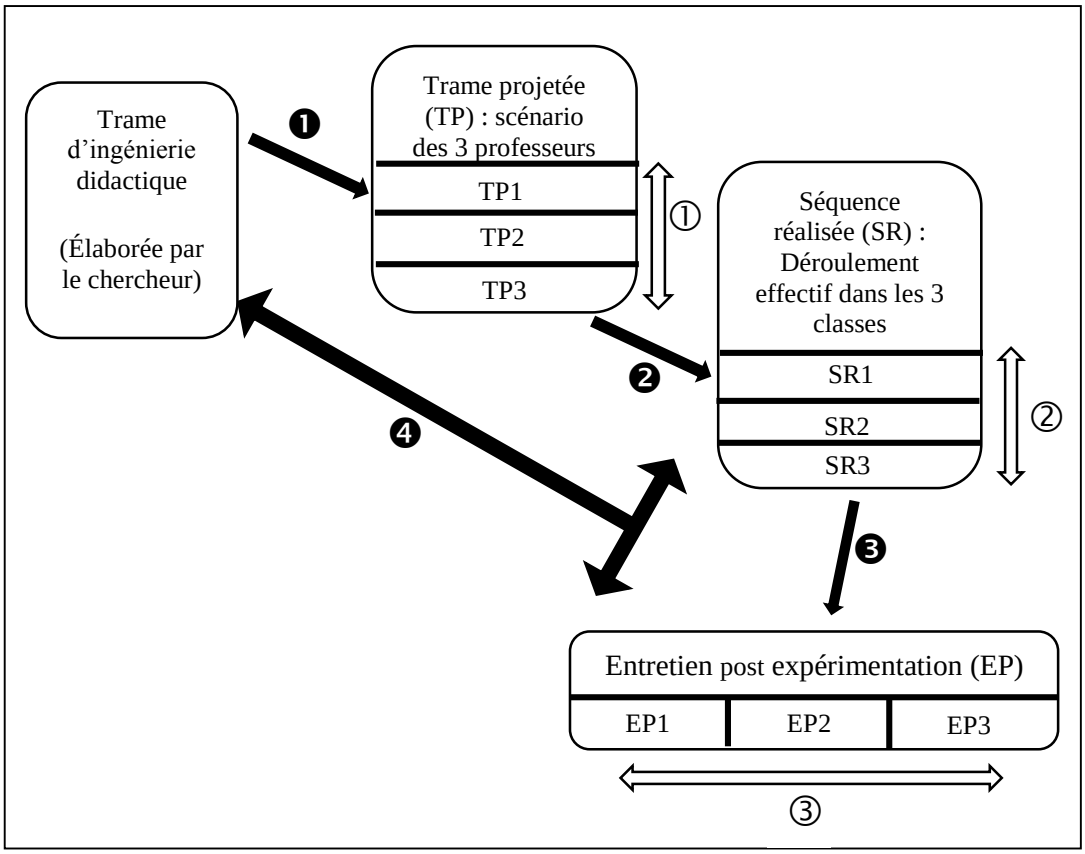

Figure 4 – *Synthèse des phases du dispositif expérimental de l'ingénierie didactique*

Le dispositif expérimental mis en place comporte les phases suivantes :
- une *trame d'ingénierie* élaborée par le chercheur seul, composée de trois *situations* (Brousseau, 1998), permettant de lier le secteur algébrique des équations et l'algorithmique. Cette trame se situe dans le *monde du chercheur*, selon une expression de Bednarz (ibid.), c'est-à-dire correspond à ses préoccupations de recherche. Dans cette trame, des éléments imposés et des éléments modulables des situations sont présents. Par exemple, le fait de travailler les équations avec l'algorithmique et la programmation est imposé mais les organisations mathématiques et didactiques ne sont pas complètement définies : les enseignants peuvent en choisir des éléments comme les exemples d'équations à résoudre, les consignes, les modalités de travail des élèves, le fait de faire ou non une institutionnalisation, etc. ;
- la *trame projetée* consiste en l'adaptation particulière que chaque professeur réalise de la trame d'ingénierie en complétant les éléments modulables. Cette trame projetée est réalisée en collaboration entre le chercheur et chaque enseignant, elle correspond à la *construction d'un objet co-situé* (Desgagné, 1997), objet présentant un intérêt d'étude pour le chercheur et pour les enseignants. Pour le premier, il s'agit d'analyser, par les choix d'adaptation de la trame d'ingénierie, les conditions et les contraintes de l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre au niveau de la classe de seconde Pour les seconds, il s'agit d'explorer dans leurs classes l'apprentissage de l'algorithmique ou de questionner de façon nouvelle les résultats de leurs élèves dans le domaine algébrique ;
- à la suite de la *trame projetée*, chaque enseignant expérimentateur ajuste seul sa propre séquence, composée de plusieurs séances. Ces séquences sont alors conduites dans les classes de seconde par les professeurs eux-mêmes. Les séquences sont ensuite analysées a posteriori par le chercheur seul ;
- les *entretiens post-expérimentation* sont individuels. Leur objectif principal est l'évaluation par les enseignants du dispositif d'expérimentation mis en place. Cette évaluation s'intéresse

au rapport de chaque enseignant à l'expérimentation, du point de vue de la construction de savoirs algébriques, algorithmiques et de l'articulation des deux, du point de vue des programmes, du point de vue de l'élève et du point de vue des praxéologies de l'expérimentation proposées par le chercheur et réellement mises en œuvre par les enseignants. Pour terminer, notons que les flèches noires correspondent à la chronologie des analyses, mettant en rapport les éléments du corpus de données précisés ci-dessus. Quant aux flèches blanches, elles correspondent aux comparaisons effectuées entre les trois trames projetées TP_i ($1 \leq i \leq 3$), les trois séquences réalisées SR_i ($1 \leq i \leq 3$) et les trois entretiens EP_i ($1 \leq i \leq 3$).

Les situations de la trame d'ingénierie et les trames projetées

Afin de mieux comprendre les résultats exposés dans la section suivante, je détaille ici deux points de la méthodologie adoptée. Ces points portent sur la constitution des situations de la trame d'ingénierie et sur quelques éléments de la constitution des trames projetées.
Les trois situations proposées de la trame d'ingénierie se déclinent de la façon suivante : la situation n°1 permet un travail sur la *catégorisation* d'équations de degré 1 et 2, les situations n°2 (équations de degré 1) et n°3 (équations de degré 2) offrent, pour chacune d'elles, deux types de tâches :
- le premier sur la *modélisation* des équations, ce qui consiste en la détermination d'une équation *paramétrée* qui couvre tous les cas de figure d'une liste d'équations donnée ;
- le second sur la détermination des techniques de résolution de types d'équations reconnues, par le biais de l'algorithmique et de la programmation.

Ainsi, la situation n°1 amène à considérer l'aspect *structural* d'une équation (Sfard, 1991), cet aspect permettant d'identifier globalement à quelle catégorie l'équation appartient, puis l'aspect *procédural* entre en jeu (Sfard, ibid.) lors des situations n°2 et n°3, rendant possible l'application d'une technique de résolution à un type d'équations reconnu. C'est cet enchaînement des deux aspects qui constitue la base de l'*algorithmisation* des techniques de résolution, et qui permet de déterminer des *algorithmes* de résolution des équations, à la manière d'Al Khawarizmi. En effet, considérons la définition donnée par Modeste (2012) d'un algorithme :

> Un algorithme est une procédure de résolution de problème, s'appliquant à une famille d'instances du problème et produisant, en un nombre fini d'étapes constructives, effectives, non-ambigües et organisées, la réponse au problème pour toute instance de cette famille. (Op. cité, p.25)

Cette définition indique la fonction de celui-ci, avec les termes « *résolution d'une famille d'instances d'un problème* ». En effet, un algorithme sert à décrire les étapes de la résolution d'un problème, où le terme *problème* est à considérer comme un *type de problème*. C'est en ce sens que j'ai considéré la définition d'un algorithme puisque l'objectif principal de ces situations est de montrer aux élèves que la résolution des équations de degré 1 et 2 peut se faire « automatiquement », autrement dit de manière *algorithmisée*. Et ainsi, amener ces élèves à comprendre que la reconnaissance de la nature et de la forme d'une équation leur permet de choisir dans leur catalogue de techniques la technique la plus adéquate pour résoudre l'équation donnée.
Dans la situation n°1, les élèves recherchent une catégorisation des équations proposées du 1er ou du 2nd degré, factorisées ou non, réduites ou non. Un exemple de choix de ces équations, élaboré par l'un des professeurs expérimentateurs est donné en figure 5.

Équation 1 : $1000x = 0$	Équation 11 : $7(x + 2) + 4(x - 3) = 0$
Équation 2 : $-1000x = 0$	Équation 12 : $(3 - 4x) - (2x - 1) = 0$
Équation 3 : $-1000 + x = 0$	Équation 13 : $(3 - 4x)(2x - 1) = 0$
Équation 4 : $\sqrt{2} + x = 3$	Équation 14 : $3x(x + \sqrt{5}) = 0$
Équation 5 : $\sqrt{x} + 2 = 3$	Équation 15 : $x^2 = 7$
Équation 6 : $-\frac{x}{5} = 1$	Équation 16 : $\frac{x^2}{27} = 0{,}01$
Équation 7 : $\frac{-5}{x} = 1$	Équation 17 : $9x^2 - 16 = 0$
Équation 8 : $\pi x + 3 = 4$	Équation 18 : $x^2 - 8x + 15 = 0$
Équation 9 : $1{,}8x - 3 = 2{,}5x + 7{,}4$	Équation 19 : $x^2 + 3x = \frac{7}{2}$
Équation 10 : $3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$	

Figure 5 – *Choix des équations de la situation n°1 par le professeur Annabelle*

Dans une première phase, les élèves effectuent, en groupes, un travail de recherche de catégorisation de ces équations, puis une phase de mise en commun est réalisée, où les différents groupes affichent leur production au tableau, et un rapporteur commente les classes d'équations formées.

Pour les situations n°2 et n°3, le travail se déroule en salle informatique en binômes, l'organisation est similaire dans les deux cas, les élèves disposant d'un poste informatique et d'une liste d'équations à résoudre, résolution à effectuer en élaborant un ou des algorithmes qui sont ensuite programmés.

Les analyses effectuées reposent sur deux pôles :

- pour le pôle élève, est analysée la reprise des techniques de résolution des équations du 1er et du 2nd degré par l'algorithmique ;
- pour le pôle professeur, ce sont les choix d'organisation mathématique et didactique qui sont analysés. Suit un exemple de ces choix, en figure 6 montrant comment les modulations opérées de la trame d'ingénierie ont produit des *trames projetées* différentes et des organisations différentes pour la situation n°2, visant la création d'algorithmes de résolution des équations de degré 1. Je n'aborderai pas dans cette synthèse la situation n°3, devant faire un choix, consécutif au volume autorisé de ces actes.

Énoncé de la fiche élève pour la situation n°2 de d'Annabelle	Énoncé de la fiche élève pour la situation n°2 d'Alex
1. *Réaliser un algorithme sur le logiciel Algobox permettant de résoudre les trois premières équations ci-dessous,* ***sans les transformer au préalable****.* 2. *Signaler par une * les équations similaires. Faire fonctionner l'algorithme pour ces équations.* 3. *Comment peut-on résoudre les équations restantes avec un autre algorithme ? Le construire et résoudre les autres équations à l'aide de ce nouvel algorithme.* *Équation 1 : $x + 3 = 0$ *Équation 2 : $2x - 3 = 4$ *Équation 3 : $3 - 2x = -2$ Équation 4 : $2 + x = 5x$ Équation 5 : $2x + 3 = 3x + 1$ Équation 6 : $8 - x = \sqrt{2}$ Équation 7 : $\frac{7}{2}x + 3 = \frac{2}{3}$ Équation 8 : $\frac{7}{2}x + \frac{2}{5} = \frac{8}{3} + \frac{1}{2}x$ Équation 9 : $3 = 2x + 1$ Équation 10 : $3x + 2 = 5 + 3x$ Équation 11 : $1{,}8x - 3 = 2{,}5x + 7{,}4$	*Réaliser sur Algobox un (ou des) algorithme(s) permettant de résoudre les équations ci-dessous. Résoudre les équations proposées à l'aide de votre algorithme. Indiquer à côté de chaque équation, sa ou ses solutions, si elles existent.* Équation 1 : $x + 3 = 0$ Équation 2 : $-1000x = 0$ Équation 3 : $-1000 + x = 0$ Équation 4 : $\sqrt{2} + x = 3$ Équation 5 : $\frac{10x}{0{,}001} = 4$ Équation 6 : $\pi x + 3 = 4$ Équation 7 : $3x - 5 = 3 - 10x$ Équation 8 : $3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$ Équation 9 : $\sqrt{2}x - 1 = 4 - \sqrt{3}x$ Équation 10 : $7(x + 2) + 4(x - 3) = 0$

Figure 6 – *Comparaison des organisations de la situation n°2*

L'énoncé d'Alex apparaît plus ouvert que celui d'Annabelle : la possibilité est laissée aux élèves de ne réaliser qu'un seul algorithme qui permette la résolution de toutes les équations proposées, moyennant quelques transformations de base de celles-ci. L'énoncé plus fermé d'Annabelle présente d'autres avantages :

- l'écriture du premier algorithme de résolution de l'équation $ax + b = c$ ne nécessite pas de réaliser de test sur la nullité de a. Ainsi, la tâche des élèves reste-t-elle concentrée sur la constitution principale de la structure de l'algorithme, en en dégageant les éléments à partir de la résolution littérale de l'équation ;
- la constitution du second algorithme apparaît comme un prolongement, une complexification du premier et la *reprise* faite ici directement après le premier algorithme peut permettre d'asseoir les concepts algorithmiques mis en œuvre précédemment ;
- ce second algorithme peut être réalisé en deux temps. L'algorithme peut d'abord être conçu pour résoudre des équations du type $ax + b = cx + d$ avec $a \neq c$. La présence de l'équation 10 ($3x + 2 = 5 + 3x$) permet de montrer l'incomplétude de cet algorithme qui pourra ensuite être parachevé en ajoutant un test sur l'égalité des paramètres a et c et en adaptant les solutions en sortie de l'algorithme.

Ainsi, si l'énoncé d'Alex présente les avantages d'un problème ouvert, celui d'Annabelle montre une progressivité dans l'apprentissage de la constitution d'un algorithme que l'on améliore pas à pas.

QUELQUES RESULTATS DE LA RECHERCHE

Dans cette dernière section, je présente quelques résultats de mes travaux, relatifs aux situations n°1 et n°2 expérimentées, et en particulier au pôle élève, sur les résultats de la catégorisation des équations et sur la constitution des algorithmes de résolution des équations du 1er degré. Je dégage également de mes recherches une schématisation de la *transposition* qui s'opère lors de

la recherche d'algorithmes pour résoudre un type de problème mathématique.

La catégorisation des équations

Sur la centaine d'élèves ayant participé à l'expérimentation, soit sur 21 affiches, j'ai recensé les techniques utilisées pour réaliser la classification d'équations de la situation n°1. Le total dépasse 100% car, dans la plupart des affiches, au moins deux types de classement cohabitent. Par exemple, il existe des classements d'élèves où les équations du 2nd degré se trouvent réparties dans plusieurs catégories, certaines dans la catégorie « degré », d'autres dans la catégorie dite « des identités remarquables » (notées équations-identités en figure 7), ou encore dans celle « où le second membre est nul »[6].

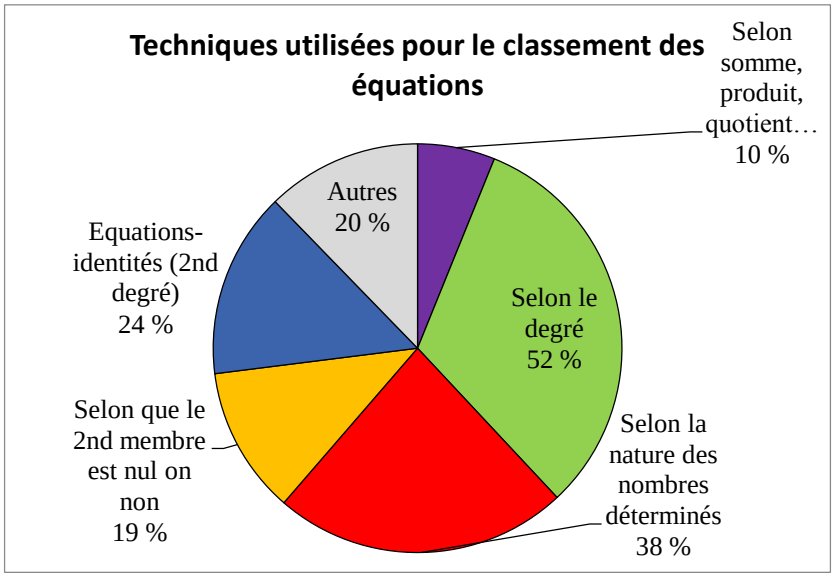

Figure 7 – *Répartition des techniques utilisées pour le classement des équations*

Les analyses ont révélé les points suivants sur les connaissances des élèves au sujet des équations :
- il existe des connaissances juxtaposées qui ne s'imbriquent pas les unes dans les autres. Les savoirs *anciens* (Douady, 1986) comme la notion d'identité remarquable, la règle du produit nul ne viennent pas se fondre dans les savoirs nouveaux de la classe de seconde ;
- il subsiste des difficultés à intégrer les nombres en écriture fractionnaire et les racines carrées dans l'ensemble des nombres réels, et même, pour certains élèves à leur accorder le statut de nombre. Ces difficultés viennent interférer avec la compréhension de l'objet équation et de sa résolution.

Pour montrer le contraste de conception sur les équations entre des élèves d'une même classe, et le type de catégories que les élèves créent, je présente les productions de deux groupes d'élèves.

[6] Ces dénominations sont celles données par les élèves de seconde comme titre de leurs catégories.

Classe 1	$-1000 + x = 0$ $-1000x = 0$ $1000x = 0$	Classe 4	$3x(x + \sqrt{5}) = 0$ $7(x + 2) + 4(x - 3) = 0$	Classe 7	$9x^2 - 16 = 0$ $x^2 - 8x + 15 = 0$ $x^2 = 7$ $x^2 + 3x = \frac{7}{2}$
Classe 2	$\frac{x^2}{27} = 0{,}01$ $-\frac{x}{5} = 1$ $\quad \frac{-5}{x} = 1$	Classe 5	$3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$ $1{,}8x - 3 = 2{,}5x + 7{,}4$		
Classe 3	$\sqrt{2} + x = 3$ $\pi x + 3 = 4$ $\sqrt{x} + 2 = 3$	Classe 6	$(3 - 4x) - (2x - 1) = 0$ $(3 - 4x)(2x - 1) = 0$		

Figure 8 – *Les catégories déterminées par un groupe d'élèves dit « faible »*

Cette première classification, proposée par un groupe dont le niveau en mathématiques est qualifié de « faible »[7] par leur enseignant, est composée de sept classes, pour un total de 19 équations. Ce type de classement, où plus de cinq catégories sont répertoriées, se retrouve pour un élève sur deux sur la centaine d'élèves testés (11 affiches sur 21). Les élèves s'attachent uniquement aux *ostensifs* (Bosch & Chevallard, 1999) présents dans les équations : la valeur des coefficients (cf. classes 1et 6, figure 8), la nature des coefficients selon leur ensemble d'appartenance (cf. classes 2 et 3), les parenthèses (cf. classe 4), la présence d'un x^2 visible (cf. classe 7), … Ces ostensifs sont prégnants et occultent d'autres éléments de ces équations qui seraient plus pertinents dans l'objectif de les résoudre.

À l'autre extrême, des élèves produisent le type de catégorisation de la figure 9, avec un seul critère de classement, le nombre de solutions des équations. Ce type de classement se rencontre pour un quart des élèves sur une centaine d'élèves testés (5 affiches sur 21).

Classe 1 : « *Plusieurs solutions de x* »		Classe 2 : « *Une seule solution de x* »		
$x^2 - 8x + 15 = 0$	$3x(x + \sqrt{5}) = 0$	$-1000 + x = 0$	$-1000x = 0$	$3x - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} - 2$
$9x^2 - 16 = 0$	$\frac{x^2}{27} = 0{,}01$	$\sqrt{2} + x = 3$	$\pi x + 3 = 4$	$\sqrt{x} + 2 = 3$
$(3 - 4x)(2x - 1) = 0$	$9x^2 - 16 = 0$	$7(x + 2) + 4(x - 3) = 0$		$1000x = 0$
$x^2 = 7$	$x^2 + 3x = \frac{7}{2}$	$(3 - 4x) - (2x - 1) = 0$		$-\frac{x}{5} = 1$
		$1{,}8x - 3 = 2{,}5x + 7{,}4$		$\frac{-5}{x} = 1$

Figure 9 – *Les catégories déterminées par un groupe d'élèves dit « fort »*

Notons que pour ce groupe d'élèves, la notion de degré n'apparaît pas dans l'appellation des intitulés des classes, même si elle est sous-jacente. Les deux titres choisis par les élèves de ce groupe, « *Plusieurs solutions de x* » et « *Une seule solution de x* » pour désigner leurs catégories, évoquent clairement qu'ils ont considéré la résolution de ces équations, puisque le vocable « *solution* » est usité. De prime abord, cette dénomination peut sembler plus conforme à celle d'équations du premier ou du second degré, puisque les équations ne sont pas toutes polynomiales (cf. $\frac{-5}{x} = 1$ et $\sqrt{x} + 2 = 3$). En revanche, les élèves admettent, sans vérification, que toutes ces équations possèdent des solutions réelles (cf. $x^2 - 8x + 15 = 0$ et $x^2 + 3x = \frac{7}{2}$). Côté enseignants, bien que les trois professeurs expérimentateurs soient des enseignants chevronnés ayant plus de 15 ans d'enseignement en lycée, ils ont admis que cette situation leur a permis de réajuster leurs représentations sur les conceptions d'équation des élèves, à l'instar du témoignage du professeur Alex :

> La classification des équations, c'est un truc sur lequel je n'avais jamais réfléchi parce que ça me paraissait évident. Ça me paraissait évident qu'un élève de seconde soit capable de voir une équation du premier degré, du deuxième, de pas mélanger les deux, de savoir la direction à prendre pour les utiliser ou les simplifier, mais en fait …non, je me suis aperçu que c'était pas du tout clair dans leur tête, mais peut-être que ce n'était pas clair dans leur tête non plus parce que je ne m'étais pas penché dessus. Ça m'a vraiment

[7] Notons que les qualificatifs « faible » et « fort » sont attribués par les enseignants, qui se basent sur les résultats de ces élèves aux différentes évaluations réalisées en classe.

questionné sur mon enseignement et sur la façon de recevoir ce qu'on fait.

La situation n°1 a en effet proposé une *tâche non routinière* qui apporte à l'enseignant une meilleure connaissance des obstacles rencontrés par les élèves sur les équations.

L'algorithmique et la programmation pour la résolution d'équations

Pour les situations suivantes, la finalité étant de concevoir des programmes informatiques qui résolvent une certaine catégorie d'équations – du 1er degré pour la situation n°2 et du 2nd degré pour la situation n°3 –, le type de tâches est ici *local* (Chevallard, 2002), non routinier pour les élèves, et les techniques nécessitent un découpage en sous-tâches, elles-mêmes non routinières. Ces types de sous-tâches, non nécessairement séquentiels, peuvent s'énoncer de la façon suivante (cf. figure 6 pour la situation n°2) : reconnaissance d'une forme générique paramétrée pour la série d'équations donnée (type T_1), résolution sous forme littérale de l'équation paramétrée précédente (type T_2), conception d'un algorithme permettant d'automatiser la résolution des équations ayant la forme générique reconnue (type T_3), écriture, sous un logiciel de programmation donné, d'un programme traduisant l'algorithme précédent (type T_4), puis utilisation du programme réalisé pour résoudre les équations données (type T_5).

Avant de revenir sur la façon dont ces types de tâches ont permis de travailler sur les objets de l'algèbre, précisons les types de tâches T_2 à T_4 et les liens qu'elles entretiennent entre elles.

Pour cela, j'évoquerai la *double transposition* de la résolution de ce problème mathématique en vue de sa programmation. Je schématise en figure 10 cette double transposition, en contextualisant les trois étapes à la situation n°2, c'est-à-dire pour l'obtention d'un programme de résolution de l'équation du premier degré $ax + b = cx + d$ (a, b, c, d réels donnés).

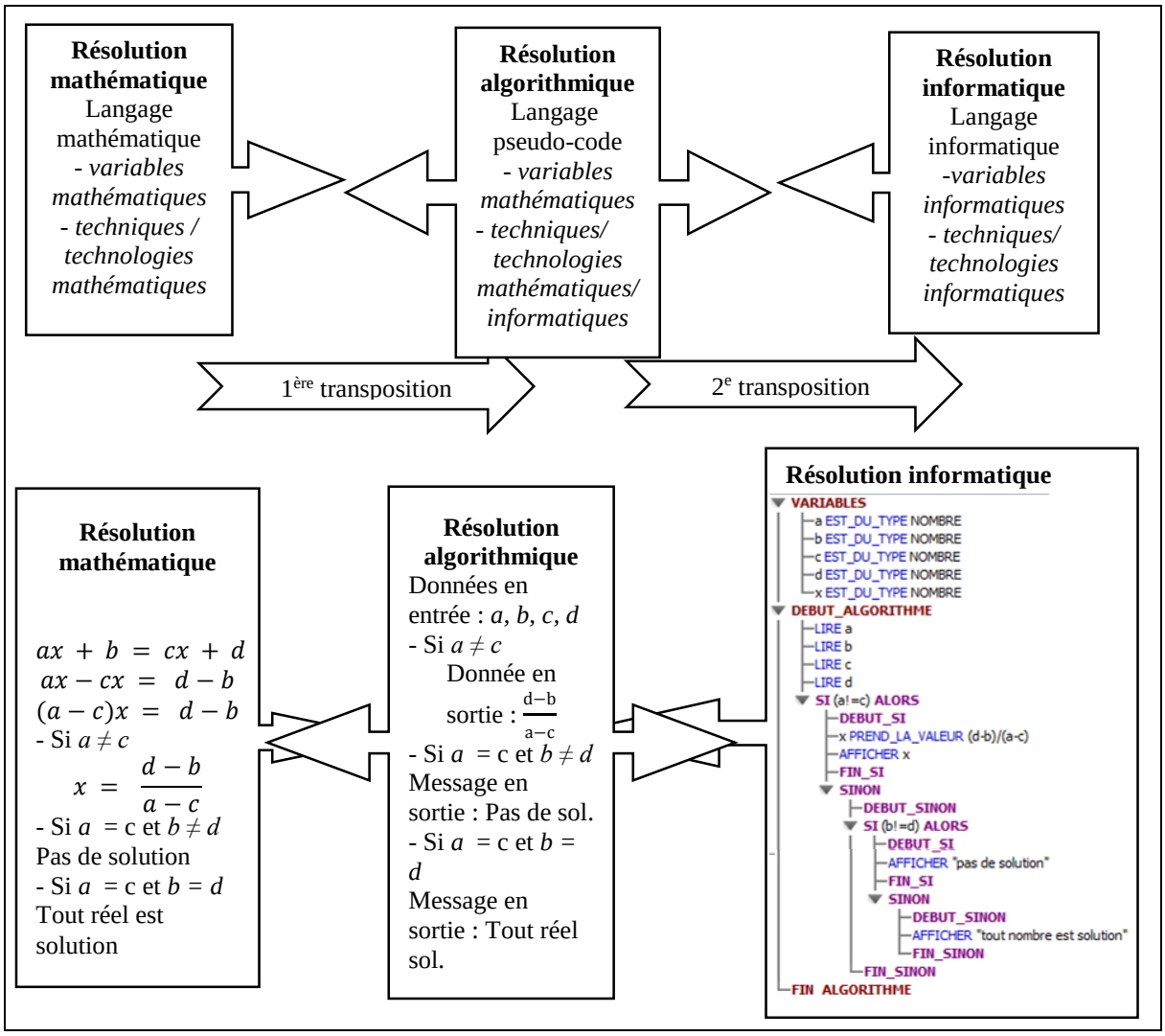

Figure 10 *- Double transposition de la résolution d'un problème mathématique en vue de sa programmation*

Cette double transposition a les caractéristiques suivantes :

- la *première transposition* nécessaire à la conception d'un algorithme à partir de la résolution « mathématique » de l'équation du premier degré implique la disparition d'étapes intermédiaires de la résolution en environnement papier-crayon (indiquées en pointillés sur la figure 10). Il existe ici une *pseudo-transparence* (Artigue, 1997) des environnements papier-crayon et algorithmique et une *non-congruence* de ces deux environnements, au sens de Duval (1995). Il y a un réel travail de transposition à effectuer pour passer du résultat mathématique suivant : « L'équation $ax + b = cx + d$ admet pour solution $\frac{d-b}{a-c}$, si $a \neq c$ » à la formulation algorithmique associée. D'autre part, la condition « si $a \neq c$ » arrive en fin de la résolution « à la main », sous forme d'une discussion selon la nullité ou non de $a - c$, alors qu'elle est nécessaire tout au début de l'algorithme. Il y a toute une *reconstruction* nécessaire à envisager pour concevoir l'algorithme à partir de la résolution de l'équation, une pensée *algorithmique* dans laquelle il faut entrer ;
- la *seconde transposition* pour la conception du programme informatique à partir d'un algorithme nécessite non seulement la compréhension d'un nouveau langage, mais également une adaptation de l'algorithme aux contraintes du logiciel utilisé. Par exemple, le logiciel

Algobox[8] ne permet pas l'affichage direct d'une expression à calculer. Le logiciel n'accepte pas l'instruction « *afficher (d – b)/(a – c)* », ce qui oblige à passer par une variable intermédiaire. Ceci induit ici encore une non-congruence entre l'algorithme conçu et le programme informatique.
Pour illustrer cette double transposition, voici une analyse comparée des productions de deux élèves de seconde, Thomas et Alliaume, en environnements papier-crayon et informatisé. Les programmes sont conçus ici pour résoudre les équations du type $ax + b = c$ (a, b, c réels donnés et a non nul). Ils sont différents mais tous deux corrects. Nous schématisons en figure 11 la rencontre de ces environnements.

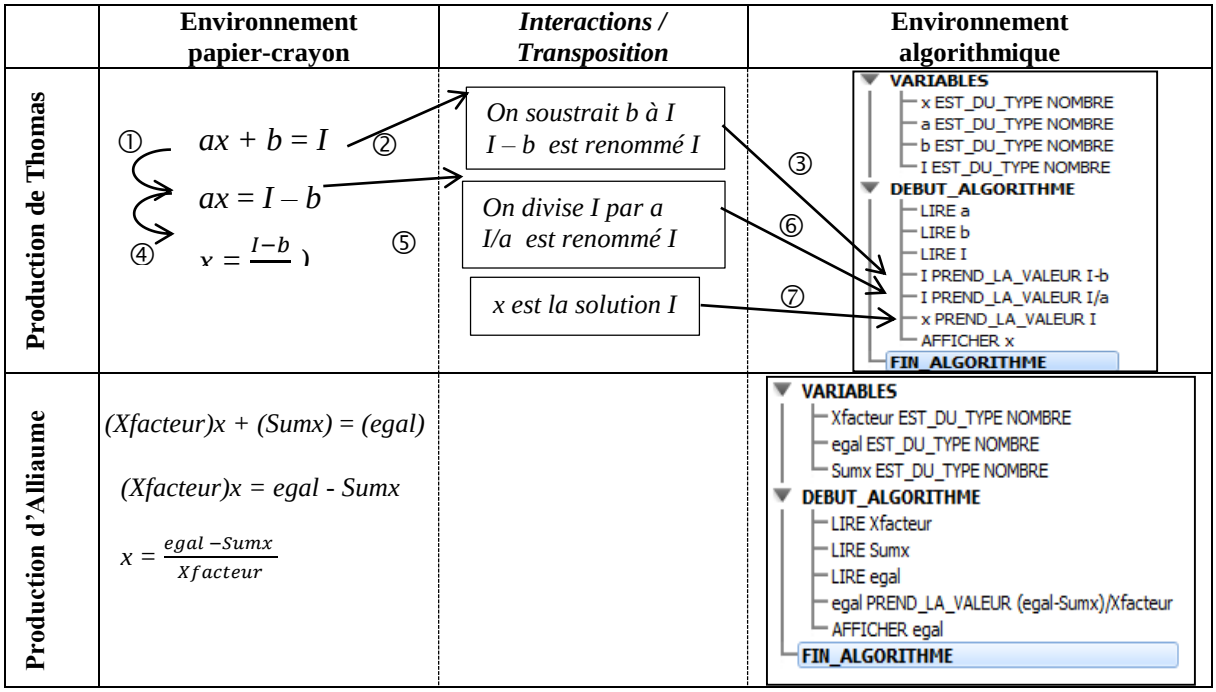

Figure 11- *Exemples de rencontre des environnements papier-crayon et algorithmique*

Pour la production de Thomas, les étapes successives de résolution de l'équation et de *transposition* qui s'opèrent au fur et à mesure pour passer d'un environnement à l'autre ont été fléchées. L'élève réduit l'équation pour la ramener au type $ax = I$: tout se passe comme s'il calculait au fur et à mesure le résultat obtenu pour le membre de droite pour ne l'exprimer que sous un seul nombre, qui se nomme de nouveau I après chaque étape. Ce cheminement lui permet d'accéder à *l'aspect structural* (Sfard, 1991) d'une expression algébrique : par exemple, en écrivant $I – b$ sous la forme I, l'élève visualise que l'ordinateur calcule l'expression $I – b$ et lui retourne un nombre calculé, « unique » qu'il nomme I. L'expression $I – b$ est alors « visualisée » comme le résultat de la soustraction et non plus seulement comme une opération inachevée. D'autre part, Thomas utilise une technique de programmation, qui consiste à réutiliser une variable informatique (I) pour lui attribuer des valeurs successives, dépendant de la valeur précédente de la variable informatique. Thomas essaie d'être en adéquation dans son programme avec son raisonnement. Bien qu'il n'y ait pas *congruence* (Duval, 1995) entre les deux registres, l'élève tente ici de minimiser la distance entre les deux environnements. Cette

[8] Algobox est un logiciel de programmation, libre et gratuit, développé en 2009 par Pascal Brachet, professeur de mathématiques au lycée Bernard Palissy à Agen. L'auteur le définit lui-même comme un *logiciel pédagogique d'aide à la création et à l'exécution d'algorithmes*. C'est le logiciel qu'utilisent les trois professeurs expérimentateurs dans leurs classes.

méthode qui fonctionne ici, se révèlerait plus périlleuse pour un autre type d'équation.
En revanche la production d'Aliaume montre un élève détaché de sa résolution en environnement papier-crayon et qui produit un programme optimisé en nombre de variables et d'instructions. Pour désigner la forme générique des équations du type $ax + b = c$, l'élève Aliaume utilise des noms pour les paramètres, évocateurs de leur statut. Il nomme cette équation *(Xfacteur)x + (Sumx) = (egal)*. Le coefficient de l'inconnue, notée *x* dans sa production parpier-crayon, est nommé « *Xfacteur* », pour rappeler le rôle que joue ce paramètre que l'on multiplie par *x*. Le second terme du membre de gauche s'appelle « *Sumx* », ce qui lui confère le statut d'un nombre que l'on ajoute au terme en *x*. Enfin le paramètre de droite est dénommé « *egal* », évoquant l'annonce du résultat d'une opération, conférant un sens orienté au signe d'égalité. Ces notations sont plus qu'un simple choix de vocabulaire et dénotent bien le sens attribué à ces objets. Elles permettent à l'élève de retrouver facilement de quel paramètre il s'agit, lorsqu'il manipule une équation avec des coefficients déterminés. C'est ici le détour par une *pensée algorithmique* qui favorise cette démarche.

CONCLUSION

Pour conclure, je commencerai par les apports, les limites et les perspectives de cette recherche pour présenter ensuite les principales conclusions relatives à ma problématique.

Apports, limites et perspectives

Ce travail m'a permis de mettre au point une méthodologie de recherche collaborative, avec une coopération entre chercheur et enseignants, méthodologie que j'ai développée et expérimentée de façon empirique. Pour poursuivre ce travail, il serait possible de faire de ce dispositif de collaboration un objet d'étude et d'en déterminer les conditions et les contraintes. Par exemple, que doit « apporter » le chercheur pour être accepté par les enseignants, que peut-il imposer ? Et au contraire, quels types d'éléments modulables peut-il et doit-il laisser aux enseignants pour que la collaboration soit efficiente ?
Un second apport est une étude transpositive, en vue de l'intégration de l'algorithmique/programmation dans l'enseignement des mathématiques, ce qui n'avait pas encore vraiment fait l'objet d'une recherche spécifique, vue la récente introduction de ces domaines dans les programmes du lycée. Cette étude, même si l'expérimentation proposée a été réduite à trois enseignants, a été assujettie aux contraintes et conditions institutionnelles. Les acteurs se sont heurtés aux problèmes de congruence avec l'enseignement usuel et les problèmes soulevés semblent aller au-delà de ces études singulières pour penser des utilisations de l'algorithmique et aussi pour penser la formation nécessaire, initiale et continue, des enseignants.
À propos du choix des enseignants, tous sont expérimentés ici, et une étude plus étendue pourrait être envisagée avec des enseignants débutants. Mais le fait que ces enseignants ne soient pas des experts en algorithmique a été intéressant ce point de vue, puisque les résultats obtenus peuvent être transposables plus facilement.
Pour les perspectives envisagées à la suite de ce travail, une reprise des situations proposées avec des modifications, des améliorations, en tenant compte des résultats obtenus et en intégrant le tout dans une séquence complète, pourrait être expérimentée en classe de seconde. Cette reprise est d'ailleurs succinctement proposée en fin de l'écrit de la thèse (Briant, 2013). Celle-ci pourrait conjuguer la prise en compte d'autres environnements ou avec des professeurs débutants pour étudier la robustesse de l'expérimentation. D'autres logiciels de programmation pourraient également être testés. Dans mon travail, une étude comparative des possibilités des

logiciels de programmation aurait d'ailleurs pu être menée, mais le choix des professeurs expérimentateurs s'étant fixé sur Algobox et la *genèse instrumentale* (Rabardel, 1995) ayant débuté dans les classes sur ce logiciel, j'ai considéré cet élément comme un élément imposé par les enseignants.

Quelques éléments de réponse à la problématique

Donnons maintenant quelques éléments de réponse à la problématique, par un retour sur les hypothèses de recherche.

J'ai émis l'hypothèse (H1) de la non-conformité des enseignants au programme institutionnel de seconde et celle-ci est en grande partie confirmée : les enseignants expérimentateurs évoquent la dénaturation de l'algèbre, et pas seulement en classe de seconde ; ils la signalent également dans le cycle terminal du lycée. Des chercheurs comme Chevallard et Bosch (2012) ou encore Assude et al. (2012) évoquent ce même problème dans le cadre de l'enseignement de l'algèbre au collège. L'absence d'un domaine algébrique sérié donne l'impression aux enseignants de pratiquer un *saupoudrage* de quelques techniques algébriques, et de ne pas présenter de praxéologies algébriques *complètes*. Néanmoins ces enseignants se conforment aux programmes : ils acceptent de plonger l'algèbre dans des cadres divers, fonctionnel et géométrique en particulier, mais ils effectuent en parallèle des reprises décontextualisées de l'algèbre. Par exemple, les trois enseignants incluent dans leur progression annuelle des séquences nommées « équations, inéquations », ou encore « factorisation, développement » où ils traitent l'algèbre comme objet, sans la plonger dans un cadre fonctionnel ou géométrique.

J'ai fait également fait l'hypothèse (H2) d'une capacité très variable des élèves à décontextualiser les concepts algébriques. Ici encore cette hypothèse est confortée. Non seulement l'analyse de l'étude diagnostique des connaissances des élèves en fin de seconde a corroboré des résultats de recherches antérieures sur les difficultés des élèves à transposer des connaissances algébriques contextualisées, mais l'étude des manuels de 3^{e} et de 2nde a montré que cette difficulté à décontextualiser l'algèbre peut également venir des praxéologies algébriques proposées, incomplètes ou ponctuelles. L'incomplétude des praxéologies porte soit sur le type de tâches (par exemple les équations répertoriées dans les manuels sont très souvent proposées avec des coefficients entiers, occultant ainsi les nombres décimaux, rationnels ou irrationnels), soit sur les techniques exposées. Ces dernières sont souvent ponctuelles, ce sont des microtechniques montrant comment, par exemple, on résout une équation du type $x^2 = a$ ou $(ax + b)(cx + d) = 0$, mais on ne trouve généralement pas de praxéologies locales qui permettraient d'unifier ces savoirs, sous une technologie commune.

J'ai aussi émis l'hypothèse (H3) que l'algorithmique serait une aide à l'enseignement et à l'apprentissage de concepts algébriques. Suit le témoignage d'un des professeurs expérimentateurs, lors de l'entretien post-expérimentation :

> Professeur Éric : J'ai trouvé ça vraiment porteur, parce qu'ils ont réussi, à la fin des séances, à repérer de suite quel type d'équations c'était, qui est *a*, qui est *b*, etc. Alors que souvent, quand je fais cours avec les seconde, on fait ça petit à petit, et je sais que ce n'est pas ancré, ça a toujours été un problème. Par rapport à ce que je fais d'habitude, ça c'est largement ancré.
>
> Chercheur : Tu dirais que ce qu'on a gagné ici dans l'apprentissage de l'algèbre, c'est la compréhension des paramètres ?
>
> Professeur Éric : Exactement, oui. Et par rapport aux équations, ils se posent la question de quel type d'équations c'est, et une fois qu'on a relevé le type d'équations, ils savent à peu près faire la démarche, je dis à peu près parce que ce n'est pas complètement ancré. Mais ceci dit, avant il y avait vraiment un gros problème, quand il y avait des nombres à virgule ou des racines carrées. Alors que maintenant, grâce aux paramètres justement, et avec l'algorithmique, ça a permis de cataloguer et de se dire par exemple « ça, c'est pareil *que ax + b* » et ils y arrivent. D'ailleurs j'ai remarqué que certains élèves passent par *ax + b*, quand le *a* et le *b* sont compliqués, finalement ils cherchent la formule [*pour déterminer la solution de*

l'équation] …
Chercheur : Tu veux dire qu'ils remplacent les valeurs numériques par *a* et *b* ?
Professeur Éric : Oui, quand *a* et *b* sont des racines carrées… Pour quelques élèves, pas tous, j'ai remarqué qu'ils faisaient ça. Ils cherchent la formule générale et ensuite ils remplacent par les valeurs numériques.

L'enseignant évoque ici comment le détour par l'algorithmique a permis la clarification du concept de paramètre, alors que celui-ci reste une notion *paramathématique* (Chevallard & Joshua, 1982). Le témoignage de l'enseignant montre également le fort lien qu'entretiennent l'algèbre et le numérique et comment des élèves, de retour en environnement papier-crayon, sont capables de réinvestir le concept de paramètre en situation. La structure de l'équation aide à comprendre la structure de l'algorithme, et réciproquement. En effet, ce témoignage indique que certains élèves sont maintenant capables de considérer tour à tour l'aspect *structural* et l'aspect *procédural* d'une équation (Sfard, 1991) en remplaçant les valeurs numériques par des lettres, pour en considérer sa structure, puis en résolvant l'équation en utilisant une technique appropriée.

De plus, le fait de programmer les algorithmes et de ne pas en rester au stade de l'algorithme « papier-crayon » ajoute encore à cette différentiation essentielle du rôle des lettres : les paramètres sont des données d'entrée à faire lire à l'ordinateur, alors que l'inconnue est une donnée de sortie du programme à faire afficher à l'écran. La programmation permet l'exploration des objets de l'algèbre, comme s'ils étaient des objets *matériels*. Les coefficients des équations sont considérés un à un, nommés, *manipulés*, entrés au clavier pour être lus par le logiciel. Ils prennent une dimension presque « palpable ». Un nouveau *registre* (Duval, 1995), offrant une nouvelle représentation des objets de l'algèbre, est ainsi créé.

Néanmoins, l'accession à ce registre nécessite une instrumentation relativement poussée. Beaucoup d'élèves ont été arrêtés, au départ, par leur méconnaissance de la structure de base d'un algorithme et d'un programme, ainsi que celle du langage de programmation du logiciel Algobox. On ne peut pas faire l'économie de la nécessaire *genèse instrumentale* (Rabardel, 1995) pour obtenir des résultats probants dans le domaine de l'algèbre. Mais ceci aurait été vrai pour tout autre domaine mathématique que l'on aurait associé à l'algorithmique.

Pour l'hypothèse H4, j'ai pu déterminer quelques invariants et différences dans les praxéologies algébriques des trois enseignants expérimentateurs. En particulier, leurs organisations mathématique et didactique pour les secteurs algébriques du programme institutionnel de seconde sont assez similaires, et comme déjà évoqués pour l'hypothèse H1, ces professeurs chevronnés choisissent d'institutionnaliser ou de réinstitutionnaliser des praxéologies algébriques qui étaient au programme des classes antérieures du collège. De façon quasi-systématique, les enseignants ne se contentent pas de rappeler les techniques de résolution des équations, celles-ci sont la plupart du temps accompagnées d'éléments technologiques les justifiant. Les principales différences observées sont dues à deux points.

Le premier point concerne l'interprétation différente qu'ont les enseignants du programme institutionnel relativement à la place des équations de degré 2 : pour deux enseignants sur les trois ayant participé à l'expérimentation, la résolution des équations de degré 2 étant étudiée de façon exhaustive dans les programmes de première générale (MEN, 2010a-b), elle doit avoir une place minimale en seconde ; ces professeurs ont d'ailleurs refusé d'expérimenter la situation n°3. En revanche, le troisième enseignant lui octroie une place importante. La lecture du programme institutionnel de seconde (MEN, 2009a) est différente selon les enseignants. Le secteur *Équations* du domaine *Fonctions* indique que les élèves doivent être capables de *résoudre une équation se ramenant au premier degré* et d'autre part, dans ce même domaine, il est attendu que soient étudiées *les fonctions polynômes de degré 2*. Ainsi, pour certains professeurs, l'accent doit être mis sur ces équations, alors que d'autres tiennent davantage compte des commentaires qui précisent *qu'il n'est pas attendu de savoir mettre sous forme canonique un polynôme de degré 2.* Ces ambiguïtés induisent des compréhensions différentes

des types de tâches à effectuer et une difficulté pour les enseignants à sérier la place de ces équations.
Le second point de divergence tient à l'expérimentation, lorsque l'algèbre et l'algorithmique apparaissent de façon conjointe, pour la situation n°2 en particulier. J'ai montré précédemment (cf. figure 6) un exemple de différences d'organisations mathématique et didactique des professeurs Alex et Annabelle, et c'est l'organisation d'Annabelle, plus progressive, qui a donné une plus grande réussite dans la recherche des algorithmes. Ces divergences peuvent s'expliquer par la jeunesse de l'introduction de l'algorithmique et de la programmation et d'un manque de repères didactiques des enseignants, qui testent des organisations nouvelles pour eux.

L'algorithmique, un détour en vue d'une reprise nécessaire des concepts d'algèbre élémentaire

Alors que la problématique posait la question des conditions et des contraintes pour une *reprise* de l'algèbre en seconde, l'expérimentation menée a montré que l'introduction de l'algorithmique favorise cette *reprise* (Larguier, 2009) pour le secteur des équations. Cette reprise ne se fait pas à l'identique, ce n'est pas qu'un simple redoublement du temps didactique : elle permet d'aller plus loin dans la considération des objets qui gravitent autour du concept d'équation. Citons en particulier la prise en compte du concept de *paramètre*, dont Chevallard précisait, déjà en 1989, l'importance :

> Ce qui fait la force de l'algèbre, c'est ce que nous nommerions aujourd'hui l'emploi de **paramètres**, soit les variables du système dont les valeurs sont supposées connues. En termes de modélisation, l'introduction des paramètres fait passer d'une modélisation « arithmétique » […] à une modélisation (algébrique) où les énoncés en vernaculaire cèdent la place à des expressions littérales (ou numéro-littérales), sur lesquelles opère le calcul algébrique […]. (p.65)

Pour Chevallard, s'interroger sur les paramètres est une entrée dans la modélisation algébrique, et mes travaux montrent que le détour par l'algorithmique permet d'y accéder, en réalisant une certaine *matérialisation* des objets de l'algèbre, en les « visualisant » et en « les faisant vivre » au sein d'un programme informatique.
Parmi les *contraintes*, nous pouvons citer les difficultés rencontrées par les enseignants expérimentateurs pour intégrer l'algorithmique et la programmation dans leur enseignement. Ces professeurs sont autodidactes, ils n'ont reçu aucune formation dans ces domaines. Si l'institution Éducation Nationale souhaite que l'intégration de l'algorithmique et de la programmation soient viables au sein de la discipline des mathématiques, un *équipement praxéologique* de la profession (Chevallard & Cirade, 2010) serait nécessaire, équipement comportant à la fois des savoirs de référence sur l'algorithmique, la programmation et la logique mais aussi des savoirs pour enseigner ces nouveaux domaines.
Pour conclure, mettant en avant *la diminution de l'offre scolaire d'algèbre* (Bosch & Chevallard, 2012), je voulais finir par un plaidoyer en faveur d'une reprise des curricula algébriques du collège et du lycée, pour qu'un domaine algébrique soit de nouveau mis en place, ou du moins un domaine numérico-algébrique, en considérant le lien fort qu'entretiennent ces deux domaines. Les contenus de ce domaine pourraient prendre en compte de façon plus marquée qu'aujourd'hui les dimensions *objet* et *outil* de l'algèbre, avec une étude spécifique de certains objets considérés aujourd'hui comme *para ou proto-mathématiques* (Chevallard & Joshua, 1982).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARTIGUE M. (1990) Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 9*(3), 281-308.

ARTIGUE M. (1997) Le logiciel Dérive comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathematics, 33(2),* 133-169

ASSUDE T., COPPE S., PRESSIAT A. (2012) Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège. Atomisation et réduction. Dans J.L Dorier, A. Robert, L. Coulange, J.P. Drouhard (dirs.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques*. Grenoble : La pensée Sauvage. H-S, 41-62.

BALACHEFF N. (1994) Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en didactique des mathématiques, 14(1),* 9-42.

BEDNARZ N., DESGAGNE S. (2005) Médiation entre recherche et pratique en éducation : faire de la recherche "avec" plutôt que "sur" les praticiens. *Revue des sciences de l'éducation*. *31*(2), 245-258.

BOSCH M., CHEVALLARD Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs : objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques. 19(1),* 77-123.

BOSCH M., CHEVALLARD Y. (2012) L'algèbre entre effacement et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. Dans J.L Dorier, A. Robert, L. Coulange, J.P. Drouhard (dirs.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques*. Grenoble : La pensée Sauvage. H-S, 9-40.

BRIANT N. (2013) *Étude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français.* (Thèse de doctorat, Université Montpellier 2). https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00920506v1

BRONNER A. (1997) *Étude didactique des nombres réels, indécimalité et racine carrée*. (Thèse de doctorat non publiée, Université J. Fourier, Grenoble).

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1985) *La transposition didactique*. Grenoble : La pensée sauvage.

CHEVALLARD Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 73-112.

CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

CHEVALLARD Y. (2002) Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation. Dans *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques* (p. 41-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y., CIRADE G. (2010) Les ressources manquantes comme problème professionnel. Dans G. Gueudet et L. Trouche (dirs.) *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 41-55). Rennes : PUR et Paris : INRP.

CHEVALLARD Y., JOSHUA MA. (1982) Un exemple d'analyse de la transposition didactique : la notion de distance. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 3*.2, p. 157-239.

DESGAGNE S. (1997) Le concept de recherche collaborative : l'idée d'un rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants. *Revue des sciences de l'éducation*. *23*(2), 371-393.

DOUADY R. (1986) Jeux de cadres et Dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques, 7*(2), 5-31.

DUVAL R. (1995) Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages

intellectuels. Berne : Peter Lang.

GRUGEON B. (1995) *Étude des rapports personnels et des rapports institutionnels à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : B.E.P. et Première G*. (Thèse de doctorat, université Paris 7).

LARGUIER M. (2005) *Les reprises des domaines numérique et algébrique en classe de seconde.* Mémoire de Master de recherche 2. Montpellier : Université Montpellier 2.

LARGUIER M. (2009) *La construction de l'espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde : un problème de la profession.* (Thèse de doctorat, Université Montpellier 2).

MEN (2008a) Ministère de l'Éducation nationale. Programmes du collège. Programmes de l'enseignement de mathématiques. BO spécial n° 6 du 28 août 2008. Paris.

MEN (2009a) Ministère de l'Éducation nationale. Programme de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique. Bulletin officiel n° 30 du 23 juillet 2009.

MEN (2009b) Ministère de l'Éducation nationale. Ressources pour la classe de seconde, *Fonctions ;* Eduscol, DGESCO.

MEN (2010a) Ministère de l'Éducation nationale. Programme de mathématiques de la classe de première de la série scientifique ; Bulletin officiel n° 9 du 30 septembre 2010.

MEN (2010b) Ministère de l'Éducation nationale. Programme de mathématiques de la classe de première de la classe de première des séries ES et L ; Bulletin officiel n° 9 du 30 septembre 2010.

MODESTE S. (2012) *Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?* (Thèse de doctorat, Université de Grenoble).

NGUYEN C-T. (2005) *Étude didactique de l'introduction d'éléments d'algorithmique et de programmation dans l'enseignement mathématique secondaire à l'aide de la calculatrice.* (Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble).

RABARDEL P. (1995) Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains. Paris : Armand Colin.

SFARD A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as dìfferent sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 1-36.

SFARD A., LINCHEVSKI L. (1994) Between arithmetic and algebra: in the search of a missing link. The case of equations and inequalities. *Rendiconti Del Seminario Matematico Universia Torino*. *52*/3, 279-307.

VERGNAUD G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2-3), 133-170.