RÉGULER L'ENSEIGNEMENT EN ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE : UNE APPROCHE MULTIDIMENSIONNELLE

Brigitte **GRUGEON-ALLYS**
Université Paris Est-Créteil - ESPE
Laboratoire de didactique André Revuz
brigitte.grugeon-allys@u-pec.fr

Résumé
Nous interrogeons les projets pluridisciplinaires (Grugeon, 1997 ; Delozanne, Prévit, Grugeon-Allys et Chenevotot-Quentin 2010 ; Grugeon-Allys, Pilet, Chenevotot-Quentin, Delozanne 2012 ; Pilet 2012) portant sur l'évaluation diagnostique *Pépite* et la régulation de l'enseignement et des apprentissages. La recherche menée dans le cadre du projet ANR NéoPraéval[1] nous amène à prendre en compte les champs de recherche en didactique des mathématiques et sur l'évaluation. A partir d'une approche multidimensionnelle croisant ces champs de recherche, nous dégageons les apports des outils conceptuels de la didactique (TAD et TSD) pour étudier la validité de dispositifs d'évaluation, leur conception et leurs usages. En effet, ces outils permettent d'une part, de décrire les praxéologies apprises des élèves, de les catégoriser en perspective de l'enseignement reçu et d'autre part, de dégager des conditions pour réguler l'enseignement, à des niveaux scolaires donnés. Cette approche permet de prendre en compte les besoins d'apprentissages des élèves mis en évidence par l'évaluation diagnostique et les besoins d'apprentissage ignorés dans les programmes pour définir les praxéologies mathématiques et didactiques à développer et la gestion des interactions. Nous l'illustrons dans le domaine algébrique en fin de scolarité élémentaire à partir de l'évaluation diagnostique *Pépite* et des parcours d'enseignement différencié (Pilet 2012). Nous dressons des perspectives de recherche.

Mots clés
Approche multidimensionnelle, évaluation diagnostique, validité d'une évaluation, praxéologie épistémologique de référence, régulation de l'enseignement.

INTRODUCTION

Depuis les années 1990, nous avons développé des projets pluridisciplinaires *Pépite – PépiMep* (Delozanne et al. 2010 ; Grugeon-Allys et al. 2012). Quels sont les objectifs de ces projets ? Leur objectif principal est d'outiller les enseignants à gérer l'hétérogénéité des apprentissages des élèves et à réguler leur enseignement dans le domaine de l'algèbre élémentaire dans l'enseignement secondaire en France. Ces projets visent aussi à concevoir des ressources, numériques ou non, et à analyser leurs usages dans des classes « ordinaires ». Ils ont été menés par des chercheurs travaillant dans différents champs de recherche - didactique des

[1] NéoPraéval : *Nouveaux Outils pour de nouvelles PRAtiques d'évaluation et d'enseignement des mathématiques*, convention ANR-13-APPR-002-01. http://www.ldar.univ-paris-diderot.fr/page/praeval

mathématiques, informatique, ergonomie cognitive, sciences de l'éducation -, des enseignants et des formateurs. Ils ont permis de développer un travail collaboratif avec des enseignants des groupes IREM. Des ressources d'évaluation - l'évaluation diagnostique automatique *Pépite* (Grugeon 1997 ; Grugeon-Allys et al. 2012) -, de régulation - les Parcours d'Enseignement Différencié (PED) automatisés (Pilet 2012) - ont été conçues et implémentées sur une base d'exercices en ligne *LaboMep*[2] et sont utilisées par des enseignants du secondaire. Ces travaux se poursuivent en ce moment dans le cadre du projet ANR *NéoPraéval* et le *Léa*[3].
Depuis 2014, l'engagement dans le projet ANR permet de revisiter les problématiques développées dans les projets précédents en croisant les champs de recherche pris en compte initialement et le champ de l'évaluation. C'est un changement de point de vue qui vise davantage à considérer l'évaluation comme un objet d'étude. Dans ce contexte didactique, nous interrogeons les choix théorique et méthodologique fondant les projets *Pépite* (Delozanne et al., 2010), PépiMep (Grugeon-Allys et al. 2012) au filtre de notions développées dans le champ de l'évaluation, plus particulièrement, celle de la validité didactique d'une évaluation (Grugeon-Allys et Grapin intra 2015 ; Vantourout et Goasdoué 2014). Nous étendons notre regard sur différents types d'évaluation et cherchons à définir des conditions pour développer l'évaluation au service des apprentissages des élèves dans le système éducatif et une meilleure articulation entre problématiques évaluative et didactique.
Dans ses travaux, Bodin (1997) questionnait déjà la distinction des problématiques didactique et évaluative relatives aux différentes étapes de toute action didactique, développées le plus souvent indépendamment l'une de l'autre. Il défendait une plus grande intégration pour favoriser des pratiques d'évaluation au service des apprentissages des élèves alors que ces pratiques rencontrent de nombreuses difficultés. Il interrogeait

> *« l'évaluation (qui) intervient (…) tantôt avec le propos de juger, de classer ou de certifier, tantôt avec celui de comprendre les processus et d'aider les élèves » à travers ses fonctions, sommative, formative, diagnostique et que « l'évaluation oscille toujours entre le désir de mesurer à tout prix et la volonté d'expliquer, de donner du sens aux observations qu'elle permet de faire » (Bodin, 1997, p 60).*

Deux phénomènes l'illustrent encore :

- la prégnance de la « note assignée par le correcteur (qui) n'est pas une mesure » déjà dénoncée par Chevallard et Feldmann (1986) et de l'évaluation sommative (Rey et Feyfant 2014) ;
- le poids accordé aux évaluations standardisées[4] à grande échelle, à l'international ou en France, évaluations fondées essentiellement sur une approche psychométrique[5]. Or, dans la plupart des pays de l'OCDE, l'étude des effets des évaluations standardisées sur les performances des élèves en termes d'efficacité ou d'inégalité scolaire reste faible (Mons 2009). Ainsi l'approche didactique permettrait d'interroger à différents niveaux de granularité la

[2] *LaboMep* : plateforme en ligne de l'association des professeurs de mathématiques Sésamath : http://www.labomep.net/
[3] *Léa* : Les LéA, Lieux d'éducation associés, ont été définis dans le programme scientifique de l'IFÉ. http://ife.ens-lyon.fr/lea
[4] Les évaluations externes standardisées visent soit, à dresser le bilan des acquis des élèves à la fin d'un enseignement (en France, évaluations bilan comme CEDRE en fin de CM2 ou en fin de 3e), soit à piloter et évaluer le système éducatif, soit à faire évoluer le processus d'apprentissage des élèves en repérant les besoins d'apprentissage pour adapter l'enseignement (évaluations diagnostiques) (Rapport Eurydice 2009)
[5] Dans une approche psychométrique, la conception des items, l'analyse des réponses et des résultats sont menées par des experts du domaine (enseignants et inspecteurs) en dehors de la didactique et par des statisticiens qui calculent différents indicateurs psychométriques et sélectionnent les items retenus. Le modèle statistique utilisé dans ces évaluations est celui du modèle de réponse à l'item (Lescure & Pastor 2012 ; Rocher 2015). La validité de CEDRE repose de ce fait majoritairement sur une approche psychométrique.

conception des évaluations et les relations entre évaluations externes, standardisées ou non, et internes au sein des classes et, plus généralement, leurs effets sur les apprentissages. Nous reprenons la définition de l'évaluation proposée par Bodin, définition recentrée sur « *la valeur* » de « *l'objet* » évalué :

> *« évaluer suppose d'organiser et d'étudier des situations permettant de recueillir des informations qui, après traitement, soient susceptibles de révéler quelque chose de fiable et de substantiel sur la « valeur » d'un « objet »* (Bodin 1997 p.60).

Nous nous demandons si leur conception s'appuie sur une représentativité des tâches au regard du programme évalué pour étudier les acquis des élèves ? Quelles sont les conditions à mettre en place pour concevoir et mettre en œuvre des évaluations externes ou internes valides du point de vue didactique (Vantourout et Goasdoué 2015 ; Grugeon-Allys et Grapin intra 2015) En retour, l'étude des résultats d'évaluations externes permettrait d'interroger le processus d'enseignement et d'apprentissage et de poser la question de la mise en relation entre évaluations externes et internes. En particulier, comment articuler les différents types d'évaluation au cours de l'enseignement d'une notion sur le long terme, dans les différentes étapes de l'action didactique ? Quelles sont les conditions à développer pour permettre aux enseignants de réguler leur enseignement au service des apprentissages des élèves ?

Nous présentons d'abord une approche multidimensionnelle articulant différents champs de recherche autour de l'évaluation et de la didactique des mathématiques, pour concevoir, étudier et mettre en relation les différents types d'évaluations, externe et interne, et les processus d'apprentissage et d'enseignement. En particulier, nous dégageons les apports des outils de la didactique en TAD (Chevallard, 1999) et en TSD (Brousseau, 1986) pour étudier la validité de dispositifs d'évaluation, pour définir une méthodologie de conception et étudier leurs usages. Nous l'illustrons en mettant en évidence les principaux choix théoriques fondant le logiciel d'évaluation diagnostique *Pépite* (Grugeon-Allys et al. 2012) et des PED (Pilet 2012) dans le domaine de l'algèbre élémentaire et leur exploitation en fin de la scolarité obligatoire pour réguler l'enseignement. Pour terminer, nous dégageons des perspectives tant au niveau de la conception des évaluations que de l'intégration entre évaluation et didactique.

UNE APPROCHE MULTIDIMENSIONNELLE POUR CONCEVOIR L'ÉVALUATION AU SERVICES DES APPRENTISSAGES

Les phénomènes d'évaluation sont multiples et complexes liés à la variété des objets possibles de l'évaluation – par exemple, les acquis des élèves en fin d'un processus d'enseignement / apprentissage au regard des programmes scolaires de l'année scolaire[6], les processus d'apprentissage des élèves, les systèmes d'enseignement, … - et des valeurs qui peuvent être de nature épistémologique, normative, critériée. Pour favoriser l'étude de phénomènes didactiques complexes, ici ceux de l'évaluation au service des apprentissages des élèves, nous mobilisons et mettons en relation des théories bien identifiées, du champ de la didactique des mathématiques et de l'évaluation, qui utilisent chacune un filtre conceptuel particulier pour découper la réalité et mobiliser leurs objets d'étude en fonction de différentes entrées (Grugeon-Allys, à paraître). Nous prenons en compte les différentes entrées du triangle didactique pour organiser l'étude.

Un problème posé sur l'axe élève / savoir : une approche cognitive et

[6] Dans le cadre d'évaluations standardisées externes, évaluations nationales (CEDRE) et internationales (TIMSS).

épistémologique

Nous nous centrons ici sur l'élève pris comme sujet cognitif. Evaluer les processus d'apprentissage des élèves en privilégiant un point de vue épistémologique, nécessite de sélectionner et d'étudier des situations pour recueillir des informations qui, après analyse des réponses des élèves permettent de déterminer les connaissances et procédures mobilisées. Sur quel ensemble de situations opérer ce repérage ? Nous reprenons le point de vue développé par Vergnaud (1986) :

> *« (…) il est nécessaire, pour comprendre le développement et l'appropriation des connaissances, d'étudier des ensembles assez vastes de situations et de concepts, c'est-à-dire des champs conceptuels. Etudier l'apprentissage d'un concept isolé, ou d'une technique isolée, n'a pratiquement pas de sens » (Vergnaud 1986, p 28).*

Vergnaud introduit une hypothèse forte, la dialectique entre la genèse de la connaissance d'un élève et la structure du savoir mathématique. Pour qu'une évaluation soit au service de l'apprentissage des élèves et de la régulation de l'enseignement, nous pensons qu'elle doit viser l'étude du développement des connaissances des élèves à travers leurs cohérences de fonctionnement dans des domaines mathématiques assez grands. L'évaluation peut ainsi mettre en évidence les conceptions personnelles des élèves.
Nous conservons cette hypothèse dans des contextes d'enseignement en classe ou de régulation des systèmes d'enseignement.

Un problème posé sur l'axe savoir / enseignant : une approche institutionnelle

La prise en compte du cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique

L'étude des conceptions ne prend pas en compte, ni les impacts du contexte institutionnel dans lequel les élèves apprennent, ni ce qui se noue entre l'élève et le savoir dans la relation didactique, rapport personnel de l'élève au savoir confronté au rapport institutionnel (Maury et Caillot, 2003). En effet, les élèves apprennent dans une institution donnée dans laquelle les enseignants enseignent les savoirs et savoir-faire des programmes, à un niveau scolaire donné, à une époque donnée, les programmes variant au cours du processus de transposition didactique (Chevallard 1985). Cette dimension institutionnelle est incontournable pour caractériser l'activité mathématique des élèves, activité organisée autour de la résolution de tâches qui dépendent fortement de l'environnement institutionnel et culturel de chaque pays. Nous nous situons dans le cadre de la TAD pour interroger la conception d'une évaluation externe ou interne ou pour analyser la validité didactique d'une évaluation. Nous faisons l'hypothèse que les approches didactique et psychométrique sont complémentaires pour une telle étude (Grugeon-Allys et Grapin, intra 2015). Nous utilisons la modélisation de l'activité mathématique en termes de praxéologie mathématique, c'est-à-dire, de types de tâches et de techniques les résolvant (savoir-faire), une technique étant justifiée par un discours technologique, lui-même étant justifié par une théorie (savoir) (Chevallard 1999). Evaluer les acquis des élèves et les processus d'apprentissage revient à évaluer les rapports personnels des élèves au savoir, c'est-à-dire les praxéologies apprises. La conception d'une telle évaluation, nécessite pour des raisons pratiques, de déterminer un échantillon de types de tâches représentatifs des praxéologies visées, pour un programme donné, associées aux domaines mathématiques en jeu (Chevallard 2007). Comment caractériser les types de tâches constitutifs d'une évaluation ?

Evaluation, transposition didactique et praxéologie épistémologique de référence

Nous prenons en compte le processus de transposition didactique sur le temps long de plusieurs années d'enseignement pour étudier les rapports personnels des élèves aux objets mathématiques étudiés. Une praxéologie épistémologique de référence relative à un domaine mathématique donné (Bosch et Gascon 2005) permet de mettre en relation les praxéologies développées à différents niveaux du processus de transposition didactique, praxéologies à enseigner (programmes), praxéologies enseignées par les enseignants, praxéologies apprises des élèves. Pour chaque domaine mathématique des programmes, nous pensons qu'une des conditions nécessaires pour concevoir une évaluation valide du point de vue de la représentativité des items et de la couverture du domaine (aspect épistémo-didactique) (Grugeon-Allys et Grapin, intra 2015), est de fonder un échantillon de types de tâches constitutifs des praxéologies visées constituant l'évaluation sur une praxéologie épistémologique de référence relative à chaque domaine mathématique.

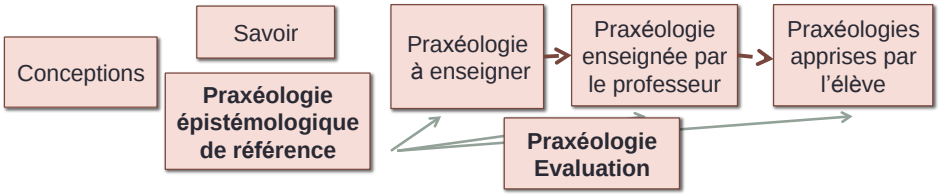


Figure 1 : Evaluation et praxéologie épistémologique de référence (Bosch et Gascon, 2005)

De même, l'étude des évaluations externes ou internes au filtre des praxéologies épistémologiques de référence associées aux différents domaines mathématiques en jeu permet d'étudier la validité didactique. C'est l'étude que nous menons pour l'évaluation CEDRE en CM2 et en 3e, respectivement, dans les domaines mathématiques concernés, le domaine arithmétique au cycle 3 ou le domaine algébrique en fin de scolarité obligatoire. (Grugeon-Allys et Grapin, intra 2015).

En retour, l'analyse des résultats des élèves à ces évaluations peut renseigner sur l'organisation mathématique des savoirs aux différentes étapes de la transposition didactique. En effet, l'analyse statistique des réponses des élèves et leur analyse didactique en appui sur une analyse praxéologique *a priori* des tâches peut rendre compte d'une part, des acquis des élèves et des techniques et technologies mises en œuvre pour résoudre des types de tâches et d'autre part, interroger les praxéologies à enseigner ou enseignées. Cette approche épistémologique permet ainsi d'identifier et de mettre en relation les technologies évanescentes et implicites (Assude et al. 2012)[7] développées dans les praxéologies à enseigner ou enseignées qui peuvent laisser vivre des technologies non idoines dans les praxéologies apprises des élèves, repérables à partir de leurs techniques et erreurs. Nous menons une telle étude dans le cadre du projet ANR en ce qui concerne l'évaluation externe CEDRE en CM2 et en 3e. Cette approche permet aussi de caractériser des besoins d'apprentissages ignorés par l'institution, souvent cruciaux pour l'appropriation des savoirs visés (Castela 2008), et des pistes d'enseignement prenant en compte ces décalages. Localement, elle permet aussi de pointer des éléments de discours, de comparer des techniques et les technologies associées, pour gérer des interactions en classe au service du développement d'une attitude réflexive des élèves. Ce peut être en développant l'étude des raisons d'être mobilisées pour motiver l'enseignement d'un savoir nouveau ou organiser la reprise d'un savoir ancien, en complétant les praxéologies, en poursuivant l'élaboration des éléments technologiques et théoriques dans la construction des savoirs ou en

[7] Pour le domaine algébrique dans l'enseignement secondaire, Pressiat explicite les technologies évanescentes et implicites (Pressiat et al. 2012) développées dans les praxéologies à enseigner ou enseignées, les technologies modélisation, preuve ou calcul algébrique, qui laissent vivre des technologies non idoines, telles que des technologies arithmétique ou formelle dans les pratiques des élèves (Pressiat et al. 2012).

les prenant en compte dans les processus de validation et d'institutionnalisation.
Pour un domaine mathématique des programmes, l'appui sur une praxéologie épistémologique de référence associée permet ainsi de mettre en relation les différents types d'évaluation, externe et interne.

Un problème posé sur l'axe élève / enseignant : évaluation interne et régulation de l'enseignement

Nous recentrons notre étude sur les évaluations internes, tout en gardant notre objectif initial. Dans le champ de la didactique des mathématiques, la problématique de l'évaluation apparaît comme un point aveugle (Chevallard et Feldmann 1986 ; Bodin 1997) en ce qui concerne l'évaluation interne à la classe. Chevallard et Feldmann mentionnent l'importance des phénomènes d'évaluation :

> *« Lorsque […] le didacticien tente de pénétrer dans l'histoire d'une classe, il doit se rendre à l'évidence : les faits d'évaluation qu'il peut alors y observer ne sont pas simplement un existant contingent, un mal nécessaire que l'on pourrait ignorer, mais bien l'un des aspects déterminants du processus didactique – qui règle et régule tout à la fois les comportements de l'enseignant comme l'apprentissage des élèves. Bref, quiconque pénètre un peu longuement dans la vie d'une classe ne peut longtemps ignorer la "tyrannie" du processus d'évaluation. »* (Chevallard et Feldmann 1986, p.32).

Joshua (1996) considère la question de l'évaluation comme une composante clef du contrat didactique.

> *« L'évaluation ne peut en aucun cas être considérée comme un élément séparé du reste de la réflexion didactique, mais, surtout, il est montré qu'on peut subsumer la question de l'évaluation sous celle plus globale de contrat didactique, ce qui marque une extension considérable de la portée de ce concept. »* (Johsua 1996).

Brousseau (2011) aborde la question de l'évaluation dans le cas Gaël en le formulant explicitement une seule fois :

> *« […] ce contrat (didactique) régit les rapports du maître et de l'élève au sujet des projets, des objectifs, des décisions, des actions et des évaluations didactiques »* (Brousseau 2011, p.33).

Nous étudions maintenant les articulations possibles entre évaluation et didactique en lien avec les théories didactiques.

Evaluation et moments didactiques

Comment articuler évaluation et didactique pour penser la dynamique du processus d'enseignement / apprentissage ? D'abord, pour prévoir la dynamique entre évaluation et régulation de l'enseignement à une échelle globale, sur la totalité d'une séquence d'enseignement. Nous prenons ici régulation de l'enseignement dans une acception proche de celle de Hadji (1989) qui envisage en termes de temporalité, les différents types d'évaluation et leurs fonctions pour planifier l'enseignement : avant la séquence d'enseignement l'évaluation diagnostique pour orienter et adapter, pendant l'évaluation formative pour réguler, après la séquence l'évaluation sommative pour vérifier. La Théorie Anthropologique du Didactique fournit un cadre pour prévoir et analyser l'organisation mathématique et didactique des savoirs. Chevallard prend en compte l'évaluation dans le modèle des moments didactiques d'une praxéologie [T/τ/θ/Θ], organisés souvent en plusieurs épisodes éclatés, pour décrire des gestes d'étude incontournables d'un processus d'enseignement (Chevallard 1998, 1999). Chevallard distingue six moments didactiques : les moments de première rencontre avec le type de tâche T, d'exploration de T et d'émergence de la technique τ, de la construction des éléments technologico-théoriques [θ/Θ], le moment de l'institutionnalisation, le moment du travail de l'organisation mathématique (entraînement, réinvestissement), le moment de l'évaluation.

L'évaluation apparaît explicitement lors du moment de l'évaluation articulé souvent chronologiquement après l'institutionnalisation[8]. Chevallard distingue deux objectifs pour ce moment. Ce moment vise d'abord à « examiner ce que vaut ce qui a été appris », à travers l'évaluation des rapports personnels construits au savoir visé, et de la maîtrise de telle technique ou des éléments technologico-théoriques associés : c'est la fonction sommative de l'évaluation qui est visé. C'est un moment de véridiction (Chevallard 1989a). En second lieu, ce moment permet aussi d'interroger les praxéologies développées en termes de puissance, robustesse de technique (Chevallard 1998). Dans une conférence de 2004, Chevallard remet en question les pratiques dominantes de correction de l'enseignement français qui visent essentiellement à corriger des « mauvaises manières de faire » et à rentrer dans des logiques de remédiation (Chevallard 2004). Au contraire, l'évaluation doit être associée à l'analyse des réponses à des types de tâches, évaluation des techniques et technologies associées. Chevallard donne ainsi un autre rôle à l'erreur :

> « *On regardera l'erreur d'abord comme un symptôme de l'effort pour créer une technique (ou la technologie qui doit l'accompagner), mais d'un effort qui, jusqu'ici, n'a pas abouti, chemin d'errance qui n'a, jusqu'à présent, conduit nulle part. Que faire de l'erreur, de l'errance ? Il faut là suspendre son jugement, et revenir au labeur d'observation, d'analyse, de développement ! Dans le cadre du projet collectif où s'inscrivent les « œuvres » des élèves, on se demandera ainsi comment la tentative inaboutie aurait pu aboutir (ce qui exigera souvent de se demander pourquoi elle n'a pas abouti, sur quoi elle a buté).* » (Chevallard 2004, p.6).

Il s'agit d'amener les élèves à analyser les techniques, à les évaluer pour mettre en évidence les conditions et les limites de l'application d'une technique relativement aux tâches de type *T*. N'est-ce pas un temps pour la fonction formative de l'évaluation donnant toute sa place au savoir mathématique ?

Même si ce modèle semble actuellement difficile à appliquer pour prendre en compte les dynamiques évaluation / régulation ou évaluation / institutionnalisation (Coppé et Grugeon-Allys, 2015), nous pensons qu'un moyen d'intégrer les problématiques évaluative et didactique au service des apprentissages est de spécifier davantage les différentes fonctions de l'évaluation en lien avec la temporalité des processus d'enseignement / apprentissage et les moments didactiques. Dans les moments de première rencontre d'un nouveau savoir ou de reprise de savoir ancien, en début de séquence, le professeur peut organiser une évaluation diagnostique des praxéologies apprises. L'analyse des réponses en termes praxéologique donne des informations essentielles sur la construction du bloc technologico-théorique et l'hétérogénéité des praxéologies apprises des élèves au sein d'une classe. Préalablement à l'organisation d'une évaluation sommative, souvent bien trop précoce, le professeur peut organiser l'analyse des techniques et technologies en cours de construction mobilisées pour résoudre des types de tâches avec les élèves, lors d'épisodes de travail de la technique des praxéologies mathématiques enseignées, pour favoriser le développement d'une posture réflexive des élèves. C'est la fonction formative de l'évaluation qui trouve ainsi sa place dans des moments du travail de la technique ou de début de séance. La fonction sommative de l'évaluation reste dévolue à une ou deux étapes de la séquence, plutôt en fin de séquence, pour vérifier les praxéologies apprises. Les critères pour définir les différentes évaluations prennent en compte des praxéologies épistémologiques de référence associées aux domaines mathématiques des programmes.

[8] « Le *sixième moment* est celui de l'évaluation, qui s'articule au moment de l'institutionnalisation (dont il est à certains égards un sous-moment) : la supposition de rapports institutionnels transcendants aux personnes, en effet, fonde en raison le projet d'évaluer les rapports *personnels* en les référant à la *norme* que le moment de l'institutionnalisation aura ainsi hypostasiée. » (Chevallard 1998)

Evaluation et dialectique de validation (local)

Comment articuler évaluation et didactique pour penser la dynamique du processus d'enseignement / apprentissage au niveau local en lien avec la gestion didactique en classe ?
Bodin parle de *« la part de l'évaluation qui est intégrée aux situations d'apprentissage, qui joue un rôle positif dans les apprentissages, se trouve totalement intégrée au contrat didactique et ne peut plus être pensée de façon indépendante de la didactique »* (Bodin 1997 p.62-63).
La prise en compte des processus d'évaluation interroge dans le cadre de la TSD (Brousseau 1986) le partage des responsabilités entre professeur et élèves au cours de la formulation puis la validation des procédures, en particulier dans les phases d'action (recherche) et dans les phases de travail en groupe puis de mise en commun.
Nous reprenons le point de vue développé par Bodin :

> *Toujours en mathématiques, une partie au moins de l'évaluation (telle que nous l'avons définie) est strictement interne. La nécessité de vérifier les résultats obtenus et celle de se prononcer sur la valeur des procédures utilisées, font partie de l'activité normale du mathématicien comme de l'utilisateur des mathématiques. Ces nécessités doivent donc s'inscrire dans la définition des compétences du domaine mathématique et donc dans les tâches proposées aux élèves. Cet aspect de la question a été largement développé et utilisé par Guy Brousseau (1986) sous le nom de dialectique de la validation, et a été repris de façon particulièrement éclairante par Margolinas (1993).* (Bodin, 1997 p.63)

La question de la vérification des résultats, de la prise de décision sur les valeurs des procédures est au cœur de l'évaluation formative, définie comme le développement de processus formels et informels de prise d'informations que les enseignants (resp. les élèves) utilisent pendant un processus d'enseignement pour prendre des décisions, à différents moments de l'étude, permettant d'adapter leur enseignement (resp. leurs stratégies) dans le but d'améliorer l'apprentissage (Black et William 1998 ; Shavelson 2008). Ici, la prise d'informations doit concerner des processus mathématiques, les techniques et technologies mises en jeu. Le professeur joue un rôle essentiel dans la mise en place d'un milieu de validation et d'interactions pour amener les élèves construire un rapport à la rationalité mathématique idoine, pour développer une dynamique évaluation – prise d'informations / régulation - gestion d'interaction appuyés sur des éléments mathématiques.
Nous faisons l'hypothèse que ces conditions permettent de développer un contrat didactique au service des apprentissages, de l'évolution des techniques, des éléments technologiques et théoriques (discours et raisonnements).

LE DIAGNOSTIC AUTOMATISÉ *PÉPITE* EN ALGEBRE ÉLÉMENTAIRE, FIN DE LA SCOLARITÉ OBLIGATOIRE

Nous illustrons les éléments théoriques développés dans les paragraphes précédents pour étudier les fondements théoriques de l'évaluation diagnostique automatisée *Pépite* développée sur le domaine algébrique pour l'enseignement secondaire en France, étudier sa validité et ses usages en lien avec les autres fonctions de l'évaluation au cours du processus d'enseignement du calcul littéral en fin de scolarité obligatoire.

Praxéologie épistémologique de référence du domaine algébrique

A l'entrée en 3^{e} ou en 2nde, les élèves ont travaillé et appris des savoirs numériques et algébriques à différents niveaux scolaires, de l'école élémentaire au collège, en particulier en classes de 5^{e} et de 4^{e}, voire 3^{e}. Les organisations mathématiques apprises des élèves, sur le numérique et l'algébrique, sont assujetties aux différentes étapes du processus de transposition

didactique, en particulier aux programmes et aux enseignements reçus dans ces classes. Nous fondons le processus d'évaluation en articulation avec celui de l'enseignement du calcul algébrique sur une organisation mathématique épistémologique de référence du domaine algébrique (Pilet, 2012 pour une organisation mathématique de référence relative aux expressions algébriques). Cette approche permet de définir un échantillon d'un ensemble de types de tâches constitutifs du domaine algébrique, évalués à chaque niveau scolaire. Nous étudions avec quelle technique, avec quels savoirs algébriques et quel discours justificatif, un élève résout une tâche d'un des types de tâches visés. Nous proposons une praxéologie épistémologique de référence du domaine algébrique à partir d'une synthèse des travaux en didactique de l'algèbre (Chevallard 1985, 1989 ; Kieran 2007, Pressiat et al. 2012). Elle est structurée à partir des praxéologies de *calcul* relatives aux expressions algébriques et aux formules (*calculer*, *substituer*, *reconnaître, développer*, *factoriser*) et aux équations (*reconnaître, résoudre une équation*) et des praxéologies d'*usage de l'outil algébrique,* praxéologies pour *généraliser*, *modéliser*, *mettre en équation*, *traduire*, *prouver*. La praxéologie de référence caractérise les propriétés idoines pour un calcul « intelligent et contrôlé » s'appuyant sur la prise en compte des aspects procédural et structural des objets algébriques, de l'équivalence des expressions algébriques, des équations, de la dialectique numérique / algébrique, les discours et modes de raisonnement associés ainsi que les modes de représentation dans les registres de représentation sémiotique du domaine et leur mise en relation. Ci-dessous (Tableau 1), nous présentons les principales praxéologies ponctuelles travaillées selon les niveaux scolaires et les éléments technologico-théoriques visés en tenant compte de la praxéologie épistémologique de référence.

	5e	4e	3e
Du côté *objet*			
T calculer *Θpo*[9]	D(+,-, ×, div), Q^+ (+,-) Egalité : équivalence, écriture en ligne et priorité opératoire Distributivité simple	Q (+,-, ×, div) Egalité : équivalence, écriture en ligne et priorité opératoire Distributivité double	Q (+,-, ×, div) Egalité : équivalence, écriture en ligne et priorité opératoire Identités Remarquables
T substituer *Θda/n* T tester une égalité	Dialectique alg. /numérique		
T développer T factoriser *Θdis, Θps*	Distributivité simple Equivalence des expressions, Procédural, structural	Distributivité simple, double Equivalence des expressions, Procédural, structural	Distributivité double, identités remarquables, équivalence des expressions, Procédural, structural
T résoudre *Θeq,*		Equation type $ax+b = cx+d$, a, c non nuls Conservation de l'égalité	Equation type $ax+b = cx+d$ Conservation de l'égalité Equation-produit, propriété d'un produit nul
Du côté *outil*			
T généraliser	Variable, expression algébrique	Variable, expression algébrique, Plus complexe produit	Variable, expression algébrique, Plus complexe, id. rem.
Tmodéliser *Θm*			
T Produire T traduire R1/ R2 *ΘtR1R2*	Variable, formule	Variable, formule Plus complexe Expressions non congruentes	Variable, formule Plus complexe Expressions non congruentes
T Mettre en équation		Inconnue, équation 1er degré	Inéquation1er degré, Equation-produit
T prouver *Θp*	Contre-exemple	Contre-exemple Preuve algébrique Agrégation avec T du côté *outil* et *objet*	Contre-exemple Preuve algébrique Agrégation avec T du côté *outil* et *objet*

Tableau 1 : Praxéologie épistémologique de référence du domaine algébrique

Les éléments technologico-théoriques relatifs aux praxéologies locales de *calcul algébrique* et d'*usage de l'outil algébrique*, les agrégations des praxéologies ponctuelles en ces praxéologies locales vont être progressivement construits lors de la résolution des tâches des différents types, au cours des différentes étapes de l'enseignement au collège. Les études en didactique de l'algèbre ont mis en évidence des ruptures d'ordre épistémologique potentielles entre l'arithmétique et l'algébrique (Vergnaud, Cortès et Favre-Artigue, 1987) et des praxéologies apprises non idoines laissant vivre des technologies anciennes (Abou Raad et Mercier 2009) qui peuvent être renforcées par des aspects épistémologiques implicites ou absents dans des praxéologies à enseigner en particulier, la dialectique entre le numérique et l'algébrique pour développer les praxéologies de généralisation, de modélisation et de preuve, en particulier le contre-exemple pour invalider la production d'expressions ou des transformations erronées ; l'aspect structural d'une expression pour sélectionner les propriétés pour développer ou

[9] *Θpo :* Ecriture en ligne (aspect structural du calcul numérique, priorité opératoire, = équivalence) ; Θpc : Propriétés relatives à l'anneau des polynômes, en particulier, propriété de distributivité (simple ou double) de la multiplication par rapport à l'addition, identités remarquables *; Θda/n :* Dialectique algébrique / numérique ; *Θeq* : Propriétés relatives aux équations *; Θps :* Pise en compte des aspects procédural / structural des objets *; Θm :* modélisation ; *ΘtR1R2* : Propriétés relatives aux règles de conversion entre deux registres de représentation sémiotique mis en jeu dans le domaine algébrique, les règles de formation et de transformation *; Θp :* Eléments théoriques et théoriques fondant la preuve algébrique.

transformer des expressions, l'équivalence des expressions.

Evaluation diagnostique Pépite

Le modèle didactique

Pour caractériser les praxéologies apprises des élèves en algèbre, à l'entrée en 5e, 4e, 3e ou 2nde, nous avons défini une évaluation diagnostique *Pépite*. La praxéologie épistémologique de référence du domaine algébrique fonde la conception du dispositif d'évaluation diagnostique *Pépite* tant en ce qui concerne la représentativité de l'échantillon des types de tâches constitutifs du test, l'analyse et le codage des réponses que l'interprétation des résultats et leur exploitation dans l'organisation didactique de l'enseignement.
Nous présentons d'abord le test diagnostique puis les choix pour l'analyse des réponses, l'interprétation des résultats de l'évaluation. Nous illustrerons sur des exemples, l'exploitation des résultats de l'évaluation et mettrons en relation les processus didactiques à différents niveaux d'échelle et les fonctions de l'évaluation.

- *La conception du test diagnostique*

Les dix tâches diagnostiques[10] du test *Pépite* en 3e recouvrent le domaine algébrique et se répartissent selon quatre types de tâches : (1) les tâches de calcul (*développer* et *factoriser* des expressions algébriques, *résoudre* des équations), (2) les tâches de *production* (d'expressions, de formules, d'équations), (3) les tâches de *traduction* ou de *reconnaissance* (de relations mathématiques), (4) les tâches de résolution de problèmes pour généraliser, pour *prouver* des propriétés, pour *modéliser* ou pour *mettre en équation*. Les items sont soit des QCM, soit des questions ouvertes à réponse courte ou longue. Des exemples de tâches sont présentés en annexe 1 (Figures 1, 2, 3.1, 3.2, 3.3 et 4). Ces tâches sont représentatives du domaine algébrique et l'ensemble des tâches recouvre ce domaine, conditions pour une évaluation valide d'un point de vue épistémologique. Chaque tâche diagnostique est caractérisée par les variables didactiques suivantes - type de tâche, caractéristiques des objets algébriques, cadres et registres de représentation en jeu, niveau de mise en fonctionnement des connaissances – Ce modèle didactique des tâches diagnostiques permet d'adapter le test aux niveaux scolaires de la 5e à la 2nde (Chenevotot-Quentin, Grugeon-Allys, Pilet et Delozanne, accepté). L'analyse praxéologique *a priori* des exercices permet de caractériser les valeurs des variables didactiques et leur pertinence pour déterminer des tâches représentatives des types de tâches du domaine algébrique, à un niveau scolaire donné, et les niveaux technologiques et théoriques visés par les techniques. Il en est de même pour les distracteurs des QCM qui sont sélectionnés pour recueillir des techniques et des erreurs envisageables. Le logiciel PépiGen (Prévit 2008) génère automatiquement les tâches, les réponses anticipées et leur codage.

- *L'analyse des réponses*

L'étude épistémologique a permis de déterminer les éléments technologico-théoriques visés pour les praxéologies de *modélisation*, de *preuve*, de *traduction* et de *calcul* (cf. Tableau 1). L'étude des erreurs récurrentes permet de déterminer des technologies mobilisées non idoines qui laissent vivre des techniques en dehors de leur domaine de validité. Pour les praxéologies de *calcul*, comme *développer*, les erreurs de concaténation de type $a+b \rightarrow ab$ mobilisent les techniques basées sur l'évaluation de calculs, mobilisées en arithmétique sur des nombres, invalides dans le domaine algébrique.
Le test automatisé *Pépite* comprend trois niveaux pour l'analyse des réponses des élèves :
- Le diagnostic local analyse la réponse de l'élève pour chaque item. Le codage des réponses

[10] Une tâche peut être subdivisée en items.

envisageables, c'est-à-dire, des techniques et/ou erreurs selon la technologie mobilisée, s'appuie sur l'étude épistémologique et porte sur la validité (V) - correcte ou non -, et sur les technologies mises en jeu dans les praxéologies de *calcul* (EN, EA), les praxéologies de *preuve* (J), les praxéologies de *modélisation* et *traduction* (T) (Grugeon, 1997). Les codes EA1, EA2, EA3, EA4 représentent des technologies différentes, respectivement, la technologie algébrique idoine fondée sur un calcul intelligent et contrôlé (équivalence des expressions, aspect structural et procédural des expressions, dialectique numérique / algébrique, justification par les propriétés algébriques) (EA1), une technologie idoine « moins efficace » (EA2), une technologie algébrique faible sans appui sur les aspects sémantiques (EA3), la technologie arithmétique (EA4).

- Le diagnostic global individuel permet le calcul du profil de l'élève à partir d'une étude transversale des codes issus de l'analyse des réponses aux différentes tâches diagnostiques.
- Le diagnostic global collectif positionne l'élève par rapport à des groupes d'élèves qui ont des profils praxéologiques proches ; le système de diagnostic affecte automatiquement l'élève dans un groupe dont il précise les caractéristiques sur trois composantes : *usage de l'algèbre* pour résoudre les problèmes du domaine et *niveau de rationalité, habileté et intelligence technique* en calcul algébrique, *flexibilité dans la traduction entre différents registres sémiotiques* (Annexe 2 – Figure 6). Une échelle avec différents niveaux définis à partir de critères qualitatifs pour chaque niveau, permet de situer l'élève sur chaque composante (Delozanne et al. 2010).

- *L'analyse a priori des tâches*

Nous illustrons l'analyse *a priori* pour la tâche diagnostique *preuve et programme de calcul*, correspondant à une praxéologie de généralisation et de preuve. L'énoncé de la tâche est formulé ainsi : *Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit à un joueur : « Tu prends un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplies le résultat par 3, tu ajoutes ton nombre, tu divises le résultat par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre. Tu trouves 7. »*
Indique si cette affirmation est vraie ou fausse. Justifie ta réponse.
Deux techniques sont envisageables en lien avec la convocation des praxéologies de *généralisation* et de *preuve* : une technique arithmétique fondée sur la technologie arithmétique (preuve par l'exemple – J2), une technique algébrique fondée sur la technologie algébrique (preuve algébrique – J1), une technique algébrique non idoine (J3).
Dans les deux cas, la convocation ou non de la praxéologie de traduction peut provoquer des écritures erronées qui mobilisent des techniques en dehors de leur domaine de validité (EN3, T451 ou EA42, T422), ou des techniques relevant de la technologie arithmétique (aspect procédural privilégié (EN2 ou EA2, égalité comme annonce de résultat (E2), ou des techniques erronées relevant de la technologie pré algébrique (aspect structural privilégié pour le résultat, mais règles incorrectes (EN3, T351 ou EA3, T322), ou bien une écriture en ligne parenthésée pour décrire les priorités opératoires et du calcul littéral corrects (EA1, T122).

Solutions	**Types d'écriture**	**Technologie**	**Codage**
pour le nombre 1, (1+8)3 = 27-4 = 23+1= 24/4 = 6+ 2 = 8-1= 7	Écriture pas à pas enchaînée en succession d'opérations incorrecte vis à vis de l'égalité	Arithmétique	V3, EN3, J2, T451, E3
pour le nombre 1, 1+8 = 9 ; 9×3 = 27 ; 27-4 = 23 ; 23+1 = 24 ; 24/4 = 6 ; 6+2 = 8 ; 8-1 = 7.	Écriture pas à pas séparée en succession d'opérations	Arithmétique	V3, EN2, J2, T251, E2
Pour le nombre 36 *36* + 8 × 3 - 4 + *36* / 4 + 2 - 36 = 7	Écriture linéaire globale non parenthésée avec mémoire[11]	Arithmétique	V3, EN3, J2, T351, Ex
Pour le nombre 3, 3 + 8 × 3 - 4 + 3 / 4 + 2 - 3 = 22,75	Écriture linéaire globale non parenthésée sans mémoire	Arithmétique	V3, EN3, J2, T351, E2
Pour le nombre 3 ((3 + 8)× 3 - 4 + 3)/ 4 + 2 - 3 =7	Écriture linéaire globale parenthésée	Arithmétique Pré algébrique	V3, EN1, J2, T151, E1

Tableau 2 : Analyse a priori – démarche arithmétique

Solutions	**Types d'écriture**	**Technologie**	**Codage**
B= nombre pensé, S somme 1ère, S' somme 2nde, etc.(B + 8) × 3 = S - 4 = S' + B = S² /4 = S^3 + 2 = S^4-B = 7 tous les *S* / S^1 / S^2 / S^3 / S^4 représentent les sommes trouvées après chaque opération.	Écriture pas à pas enchaînée en succession d'opérations incorrecte vis à vis de l'égalité	Arithmétique Preuve	V3, EA1, J3, T422, E3
(*x*+8)3 = 3*x*+24 = 27*x* ; 27*x*-4 = 23*x* ; 23*x*+*x* = 24*x* ; 24*x*/4 = 6*x* ; 6*x*+2=8*x* ; 8*x*-*x*=7. Son traitement formel s'appuie sur *des règles de transformation incorrectes* qui s'avéreront résistantes	Écriture pas à pas séparée en succession d'opérations - système sans parenthèse - règle d'assemblage {a+b ---> *ab*} - règle de désassemblage avec l'addition {*ab* ---> *a*+*b*}	Arithmétique	V3, EA42, J3, T422, E3
x nombre quelconque (*x*+8)3 = 3*x*+24 ; 3*x*+24 -4 = 3*x*+20 ; 3*x*+20+*x* = 4*x* + 20 ; (4*x* + 20)/4 = *x*+5 ; *x*+5+2=*x* + 7 ; *x* + 7-*x*=7	Écriture pas à pas séparée en succession d'opérations	Preuve Aspect procédural Calcul	V2, EA2, J1, T122, E2
sans mémoire : *x* + 8 × 3 - 4 + *x* / 4 + 2 - *x* = 7*x* + *x* - *x* = 8 × 3 - 4 / 4 + 2 2*x* - *x* = 24 - 1 + 2 *x*= 25	Écriture linéaire globale non parenthésée sans mémoire et résolution d'équation	Arithmétique	V3, EA31, J3, T322, E3
((*x* + 8) × 3 - 4 + *x)* / 4 + 2 – *x* *(*3*x* +24 – 4 + *x)* / 4 + 2 – *x* 4 (*x*+5)/4 +2 – *x* *x*+5 + 2 – *x* = 7	Écriture linéaire globale parenthésée	Algébrique	V1, EA1, J1, T122, E1

Tableau 2 : Analyse a priori – démarche algébrique

- *Des cohérences de fonctionnement – des blocs technologico-théoriques dominants*

Comment exploiter l'analyse praxéologique sur l'ensemble des tâches du test diagnostique pour une description des cohérences de fonctionnement des élèves exploitable par l'enseignant pour réguler son enseignement ? Les catégories utilisées par les enseignants « les bons, les moyens, les mauvais » sont peu exploitables. La définition de codages fondés sur les blocs technologico-théoriques permet une analyse transversale sur l'ensemble des tâches de l'évaluation. Ce choix

[11]L'élève garde en mémoire le sens de l'enchaînement opératoire et l'effectue correctement à l'aide d'un calcul mental.

permet de repérer des technologies dominantes mobilisées par les élèves et de les grouper par technologie proche. Nous avons fait le choix de présenter le bilan personnel de l'élève sur trois composantes, *calcul algébrique*, *outil algébrique*, *traduction algébrique*, ces deux dernières pouvant être regroupés. Chaque niveau correspond à une technologie dominante pour le bloc technologico-théorique. Nous avons pris garde de ne pas utiliser un vocabulaire trop complexe, ni un niveau de description trop fin.
Nous utilisons ces termes sur la plateforme en ligne *LaboMep*, ces termes étant en cohérence avec le contexte institutionnel (terminologie utilisée dans les programmes et le socle commun de compétences). Ils ont été discutés avec les enseignants, les chercheurs, les membres de Sésamath. Plusieurs niveaux de description sont donc proposés : bilan de l'élève, bilan de la classe par groupes, analyse des réponses des élèves avec un accès aux réponses de l'élève dans un tableur (Grugeon-Allys, Chenevotot et Delozanne, 2013 ; Pilet 2012).
En bilan, ces choix théorique et méthodologique fondent la validité épistémo-didactique de *Pépite*. En revanche, les critères de niveau de langue, de formulation ont été pris en compte, mais certainement pas suffisamment travaillés pour avoir un gage total de validité psycho-didactique.

Le modèle informatique

Le modèle didactique permet la génération des tâches diagnostiques génériques, adaptables selon le niveau scolaire. Le logiciel *Pépidiag* (Delozanne et al. 2010) permet de générer automatiquement des clones de chaque tâche et leur grille d'analyse. Le logiciel *Pépinière* (Prévit 2008) permet de générer les réponses anticipées, d'analyser automatiquement les réponses des élèves à partir du calculateur algébrique, et de fiabiliser l'analyse des réponses aux questions ouvertes, y compris sur certains raisonnements algébriques.
Le logiciel *Pépidiag*, à partir du modèle de profil de l'élève, produit le bilan personnel de l'élève en situant l'activité algébrique de l'élève sur chaque composante et le bilan de la classe en groupes de bilans personnels proches (Grugeon-Allys et Chenevotot 2013 ; Pilet 2012). Tout enseignant de 3^{e} ou de 2nde, travaillant sur *LaboMep*, peut donc faire passer le test diagnostique *Pépite* aux élèves de sa classe, obtenir après l'analyse des réponses des élèves aux items, les bilans personnels des élèves et le bilan de sa classe. Nous l'illustrons pour la classe de Garance[12] avec le bilan personnel d'un des élèves de la classe et la répartition des élèves en deux groupes B et C, les élèves du groupe C ayant une activité relevant principalement de la technologie arithmétique, tant pour le *calcul* que pour son usage pour résoudre des problèmes (Annexe 2, figures 5 et 6).

Evaluation diagnostique dans d'autres domaines mathématiques

Cette méthodologie de conception est mobilisée dans deux autres contextes institutionnels. Grapin[13] définit une praxéologie épistémologique de référence dans le champ de l'arithmétique des entiers pour le cycle 3 de l'école primaire. En premier lieu, elle mobilise cette référence pour analyser la validité didactique de l'évaluation CEDRE CM2, pour le domaine calcul numérique. Deuxièmement, elle interprète les résultats de l'évaluation au filtre de la praxéologie de référence associée à l'arithmétique des entiers pour mettre en évidence des praxéologies implicites ou des besoins d'apprentissage ignorés dans les programmes ou des pratiques enseignantes autour de la numération et du calcul réfléchi non idoines, afin de proposer des pistes pour réguler l'enseignement, tant au niveau des praxéologies à enseigner qu'enseignées.

[12] Garance est une enseignante du groupe IREM qui a travaillé avec les chercheurs pendant deux années.
[13] Grapin soutient sa thèse en décembre 2015.

Le deuxième contexte concerne la formation des futurs professeurs des écoles en M1 du master MEEF premier degré, à l'ESPE de Créteil, dans le cadre du projet ORPPELA[14], depuis la rentrée universitaire 2013. Ce projet vise à gérer la très grande hétérogénéité des rapports personnels des étudiants aux mathématiques, c'est-à-dire, des praxéologies apprises pour différents domaines mathématiques (numérique, algébrique, géométrie, fonctionnel) en fin de scolarité obligatoire. L'enjeu est de permettre à des publics changeant d'orientation (titulaires de licences professionnelles, autres cursus non universitaires, emploi d'avenir professeur, etc.) de réussir leur formation en M1et de faire évoluer leur rapport aux mathématiques.
Nous avons conçu et mis en place un dispositif de formation s'appuyant sur une évaluation diagnostique automatisée (Grugeon 1997) à l'entrée en M1 dans les quatre domaines mathématiques cités, et des stratégies de formation adaptées aux besoins d'apprentissage repérés des étudiants. La démarche reprend dans les grandes lignes la méthodologie présentée plus haut. Le travail théorique est en cours. Les résultats de ce projet sont présentés dans (Grugeon-Allys et Pilet, à paraître).

REGULATION DE L'ENSEIGNEMENT

Réguler par des parcours d'enseignement (global)

Nous faisons l'hypothèse qu'un moyen d'accompagner un enseignant à réguler son enseignement est d'abord de dégager des enjeux didactiques « prioritaires » à partir d'une étude épistémologique du savoir à enseigner pour lui permettre d'organiser la reprise de savoirs anciens pour un domaine mathématique, à un niveau scolaire donné. En deuxième lieu, il s'agit de proposer des ressources permettant à un enseignant de réguler son enseignement en mettant en relation, d'une part, les résultats de l'évaluation diagnostique et les besoins d'apprentissage des groupes d'élèves de sa classe, et d'autre part, les besoins d'apprentissage ignorés dans les programmes, les praxéologies mathématiques peu présentes dans son enseignement ou ne favorisant pas le travail de certaines techniques et technologies.

Les Parcours d'Enseignements Différenciés (Pilet 2012)

Pilet (2012) a défini des parcours d'enseignement différencié (PED) relativement aux expressions algébriques pour gérer l'hétérogénéité des praxéologies apprises des élèves. Pilet a dégagé des aspects épistémologiques des objets anciens de l'algèbre élémentaire, ici les expressions algébriques, à faire travailler aux élèves pour permettre la construction de raisons d'être et poursuivre la construction du bloc technologico-théorique : la signification des expressions, en lien avec les praxéologies de généralisation, de preuve, la dialectique numérique / algébrique, l'équivalence des expressions algébriques, les aspects procédural et structural des expressions, l'interprétation des écritures algébriques en lien avec d'autres représentations sémiotiques mobilisés dans le cadre algébrique.
Pilet (2012) a ainsi construit des ressources de régulation dans le domaine algébrique, dans le but de permettre aux enseignants d'organiser la reprise de savoirs anciens, les expressions algébriques, au sein de leur progression habituelle. Pour un enjeu didactique donné commun à la classe, les situations ou exercices différenciés proposés, adaptés aux besoins d'apprentissage

[14] Réalisé dans le cadre des Initiatives d'Excellence en Formations innovantes (IDEFI) du Programme Investissements d'Avenir, Université Paris-Est met en œuvre le dispositif IDEA. http://espe.u-pec.fr/l-espe/innovation-pedagogique/projet-orppela-organiser-une-progressivite-des-parcours-de-formation-des-etudiants-en-master-metiers-de-l-education-et-de-la-formation-et-leur-accompagnement-682061.kjsp?RH=1412862302533

des différents groupes, visent soit, à développer des raisons d'être d'un objet, soit à remettre en question des conceptions erronées, soit à poursuivre la construction du bloc technologico-théorique, soit à organiser l'agrégation de praxéologies ponctuelles via la résolution de tâches assez complexes montrant la nécessité de convoquer des types de tâches implicites pour leur résolution. Un ensemble de variables didactiques permettent d'adapter les situations aux différents groupes de la classe : le type de tâche, la nature et complexité des expressions algébriques, les registres de représentation sémiotique mis en jeu, le découpage de l'énoncé à travers le nombre de types de tâches à convoquer, les aides en fonction des besoins d'apprentissage des élèves.

Exemple de parcours (Pilet 2012)

Nous illustrons la démarche réalisée dans la classe de troisième (21 élèves) de Garance en 2011-2012, enseignante du groupe IREM « Différenciation des pratiques d'enseignement en calcul littéral ». Garance organise l'évaluation diagnostique *Pépite* en début de progression pour réaliser le bilan de sa classe en algèbre. Quinze élèves convoquent une technologie arithmétique dans la praxéologie locale de *calcul* et les praxéologies *d'usage de l'outil algébrique*. Six élèves convoquent de façon dominante une technologie algébrique faible pour la praxéologie locale de *calcul*, mais ne convoquent pas l'outil algébrique pour résoudre les problèmes du domaine algébrique.
Elle introduit trois parcours enseignement différenciés dans des moments de reprise pour :

- Amener les élèves à donner des raisons d'être aux expressions algébriques en lien les praxéologies de *généralisation*, de *preuve* (produire des programmes de calcul pour dénombrer et déterminer leur équivalence – PED1) afin de poursuivre la construction du bloc technologico-théorique autour de la propriété de distributivité et du contre-exemple ; l'activité visée doit favoriser l'agrégation des praxéologies de *production*, de *preuve* et de *substitution* ;
- Amener les élèves à reconnaître si des expressions sont équivalentes (PED2 et PED3) afin de reconnaître leur structure, de développer la dialectique algébrique / numérique et de prouver leur équivalence ou non en convoquant les praxéologies de *calcul* (*développer*, *factoriser*) ou la praxéologie de *substitution*.

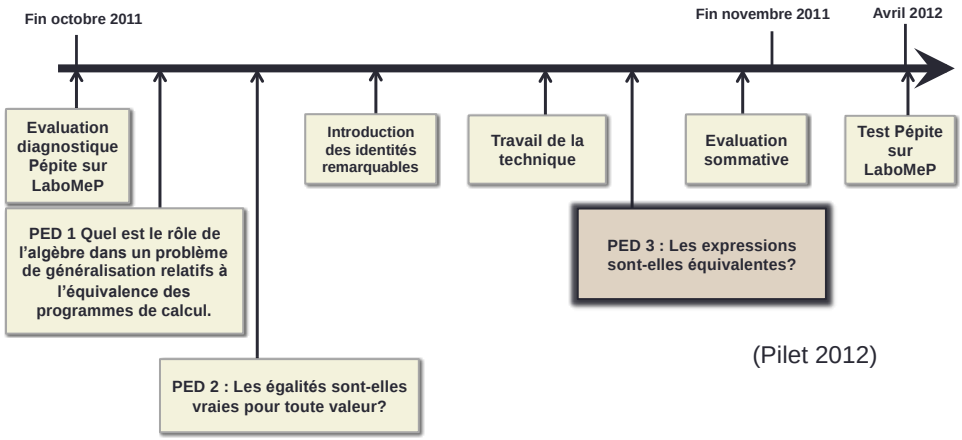


Figure 7 : Processus d'enseignement de Garance en calcul algébrique

Les élèves résolvent des situations différentes en fonction des valeurs attribuées aux variables didactiques les caractérisant (cf. .1.1). Par exemple, pour le PED1, les situations diffèrent par les patterns en jeu (Figure 8) dont ils doivent dénombrer les carrés unités. Le calcul conduit soit à des expressions du premier degré, soit à des expressions du second degré (Pilet 2012) pour

trouver le résultat des programmes de calcul.

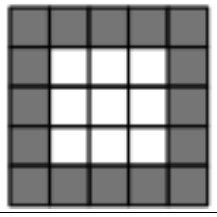
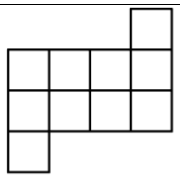
Pattern 1		Pattern 2	
	$4x + 4$ $4(x+1)$ $2x + 2(x+2)$ $4(x+2) - 4$		$(a+2)^2 - 2(a+1)$ $a^2 + 2(a + 1)$ $a(a+2) + 2$ $a^2 + 2a + 2$

Figure 8 : les patterns selon les deux groupes d'élèves

Gestion didactique et évaluation

Une étude didactique de ce PED permet de définir et de mettre en place des conditions pour engager le processus de dévolution chez les élèves, proposer des aides constructives pour développer les processus de formulation des programmes de calcul en fonction de schémas puis leur traduction d'abord en expressions numériques puis algébriques. L'enjeu est aussi de faciliter la production d'un milieu de validation puis de preuve pour évaluer les expressions algébriques produites dans le cadre algébrique, en mobilisant la technologie substitution pour invalider via un contre-exemple ou la technologie *distributivité* pour prouver l'équivalence de deux expressions. L'enjeu est de développer un contrat didactique au service des apprentissages, de l'évolution des techniques, des éléments technologiques et théoriques (discours et raisonnements), laissant une place à l'évaluation formative.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Nous avons montré certaines pistes pour développer l'articulation entre les problématiques évaluative et didactique.

Le champ de la recherche en didactique des mathématiques apporte d'abord les outils de l'analyse *a priori* didactique et praxéologique pour concevoir des évaluations valides dans ses aspects épistémo-didactique et psycho-didactique. En complémentarité, l'approche psychométrique interne au champ de l'évaluation met à disposition les outils statistiques pour étudier la validité psychométrique et la fidélité d'une évaluation. En retour, la didactique permet d'interroger les résultats de dispositifs d'évaluation au regard des programmes d'enseignement et des pratiques d'enseignement. Au cœur de l'approche didactique, la caractérisation d'organisations praxéologiques de référence associées aux domaines mathématiques impliqués joue un rôle majeur (Grugeon-Allys et Grapin, intra 2015).

Les phénomènes d'évaluation ont longtemps été un point aveugle de la didactique (Chevallard et Feldmann 1986 ; Bodin 1997). Nous avons montré qu'il est possible de faire des liens entre les concepts développés dans le champ de l'évaluation et les théories didactiques pour aborder la dynamique évaluation / régulation. Dans le cadre de la TAD, à un niveau global, l'articulation entre moments didactiques (plus particulièrement des épisodes) et rôles de l'évaluation permet à l'enseignant de gérer l'avancée du temps didactique en s'appuyant sur des informations obtenues au cours d'évaluations soit diagnostique (moment de reprise) pour repérer les praxéologies apprises et les praxéologies à travailler au regard des programmes, soit formative (épisodes de travail de la technique et de la technologie), soit sommative (après plusieurs moments d'institutionnalisation pour évaluer ce que les élèves ont appris au regard des praxéologies visées). Dans le cadre de la TSD, la prise en compte des processus d'évaluation formative donne une place accrue aux enseignants pour planifier la régulation de sa progression,

en fonction des informations collectées sur les techniques et technologies développées dans la résolution des tâches par les élèves, et pour gérer les interactions dans les phases d'action, de formulation, validation et d'institutionnalisation (niveau de discours justificatif). Les fonctions de l'évaluation mobilisées donnent à voir le contrat didactique à l'œuvre dans la classe à travers la répartition des responsabilités entre élèves et professeur et le savoir mathématique enseigné. Il s'agit de poursuivre les recherches pour préciser les liens entre évaluation et processus didactique.
De nombreuses perspectives de recherche à la rencontre des cadres théoriques de la DDM et de l'évaluation sont déjà ouvertes et poursuivies dans le cadre du projet ANR Néopraéval : méthodologie de conception d'évaluations externes et internes, étude sur les pratiques d'évaluation des enseignants (Horoks et Pilet, intra 2015).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ABOU RAAD, N., MERCIER, A. (2009) Mercier Étude comparée de l'enseignement de la factorisation par un facteur commun binôme, en France et au Liban, *Recherches en didactique des mathématiques* 29 (2)

ASSUDE T., COPPE S., PRESSIAT A. (2012) Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège : atomisation et réduction. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. & Robert A. (Eds.), *Recherche en Didactique des Mathématiques* Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et perspectives Hors-série. Grenoble : La pensée sauvage.

BLACK P., D. WILIAM (1998), *Inside the Black Box: Raising standards through classroom assessment*. London: King's college.

BODIN A. (1997) L'évaluation du savoir mathématique. *Recherches en didactique des mathématiques* 17(1) 49– 96.

BODIN A. (2006). Les mathématiques face aux évaluations nationales et internationales. *Repères IREM*, 65, 55-89.

BOSCH M., GASCON J. (2005) La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. Dans Mercier A. & Margolinas C. (Dir) Balises pour la didactique des mathématiques (197 – 122). Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G. (2011) *Le cas de Gaël revisité* (1999-2009). https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00582620/fr/

BROUSSEAU G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 33-116.

CASTELA, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'apprentissage. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 28(2) 135–182.

CHENEVOTOT-QUENTIN F., GRUGEON B., PILET J., DELOZANNE E. (accepté). Transfert du diagnostic *pépite* à différents niveaux scolaires : tests diagnostiques pour les élèves et leurs usages par les enseignants. *Espace Mathématique Francophone EMF2015,*

CHEVALLARD Y. (1985) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie. L'évolution de la transposition didactique *Petit x* 5 51–94.

CHEVALLARD Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de

modélisation. *Petit x* 19, 43–75.

Chevallard Y. (1989a). Evaluation, véridiction, objectivation. In J. Colomb & J. Marsenach (Eds.), *L'évaluation en révolution. Actes des Rencontres internationales sur l'évaluation en éducation, Asssociation pour le développement des méthodologies en Éducation-Europe, Paris, 27-29 septembre 1989* (p. 13-36). Paris : Institut national de recherche pédagogique.

CHEVALLARD Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques : L'approche Anthropologique. La notion d'organisation praxéologique. *Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques*. Actes de l'Université d'été de didactique de La Rochelle, 119-140.

CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* 19(2) 221 – 266.

CHEVALLARD Y. & FELDMANN, S. (1986). *Pour une analyse didactique de l'évaluation*. Marseille : IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD Y. (2004) Le moment de l'évaluation, ses objets, ses fonctions : déplacements, ruptures, refondation. Conférence du 16 mars 2004. Formation de formateurs. IUFM d'Aix-Marseille. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=44

CHEVALLARD Y. (2007) Une épreuve expérimentale de mathématiques ? http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Une_epreuve_experimentale_de_mathematiques.pdf

DELOZANNE E., PREVIT D., GRUGEON-ALLYS B., CHENEVOTOT-QUENTIN F. (2010) Vers un modèle de diagnostic de compétence, Revue Techniques et Sciences Informatiques, 29, n°8-9 / 2010, Hermès-Lavoisier, Paris, pp. 899-938DUVAL R. (1996) Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherches en didactique des mathématiques* 16(3) 349–380.

GREGOIRE J., LAVEAULT D. (2014) *Introduction aux théories des tests en sciences humaines*. De Boeck : Bruxelles.

GRUGEON B. (1997) Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques* 17 (2) 167–210.

GRUGEON-ALLYS B., GRAPIN N. (2015) Validité d'une évaluation externe. Complémentarité des approches didactique et psychométrique. Dans A-C. Mathé et E. Mounier (Eds.) *Actes du séminaire national de Didactique des mathématiques 2015*. Paris, France : IREM Paris 7.

GRUGEON-ALLYS B., CHENEVOTOT-QUENTIN F., DELOZANNE E. (2013). De la conception aux usages de ressources dédiées à l'enseignement différencié en algèbre élémentaire. In Coppé S., Haspekian M. (Eds) *Actes du séminaire national de Didactique des mathématiques*. Année 2013. 103-133. https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00972656/document

GRUGEON-ALLYS B., PILET J., CHENEVOTOT-QUENTIN F., DELOZANNE E. (2012) Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. & Robert A. (Eds.), *Recherche en Didactique des Mathématiques* Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et perspectives Hors-série 137–162. Grenoble : La pensée sauvage.

HADJI C. (1989) *L'Evaluation, règles du jeu. Des intentions aux outils*. Paris : ESF, 1989. *191*p.

JOSHUA S. (1996), Qu'est-ce qu'un résultat en didactique des mathématiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(2). La pensée sauvage, Grenoble.

KIERAN C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In Frank K. Lester (Eds.) Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and

Learning, Chapter 16, pp. 707-762.

LESCURE S., PASTOR J-M. (2012) *Mathématiques en fin d'école primaire. Le bilan des compétences.* Paris : Scéren.

PILET J. (2012) *Parcours d'enseignement différencié en algèbre élémentaire*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot-Paris 7.

PREVIT D. (2008) *Génération d'exercices et analyse multicritère automatique de réponses ouvertes*. Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie – Paris 6

RAPPORT EURYDICE 2009 : *Les évaluations standardisées des élèves en Europe : objectifs, organisation et utilisation des résultats.* ISBN 978-92-9201-037-9. http://eacea.ec.europa.eu/education/Eurydice/documents/thematic_reports/109FR.pdf

REY O., FEYFANT A. (2014) Évaluer pour (mieux) faire apprendre. Dossier de veille de l'Ifé, 94.

ROCHER T. (2015) Mesure des compétences. Méthodes psychométriques utilisées dans le cadre des évaluations des élèves. *Éducation et Formations* 86/87 37–60.

SHAVELSON, R., YOUNG, D., AYALA, C., BRANDON, P., FURTAK, E. & RUIZ PRIMO, M. (2008). On the Impact of Curriculum-Embedded Formative Assessment on Learning: A Collaboration between Curriculum and Assessment Developers. *Applied Measurement in Education,* 21(4), 295-314. **http://www.tandfonline.com/toc/hame20/21/4#.VPBU9WaS2ll**

VANTOUROUT M., GOASDOUE R. (2014) Approches et validités psycho-didactique des évaluations. Éducation et Formation N°e-302. http://ute3.umh.ac.be/revues/

VERGNAUD G. (1986) : Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques. Un exemple : les structures additives. *Petit x,* 22, 51-69.

VERGNAUD G., Cortès A., Favre-Artigue P. (1987) : Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques in Actes du colloque de Sèvres : Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, pp. 259-288, Editions La Pensée Sauvage.

ANNEXE 1

- Des tâches de calcul algébrique : développer ou factoriser des expressions algébriques, résoudre des équations du premier degré ou se ramenant au premier degré

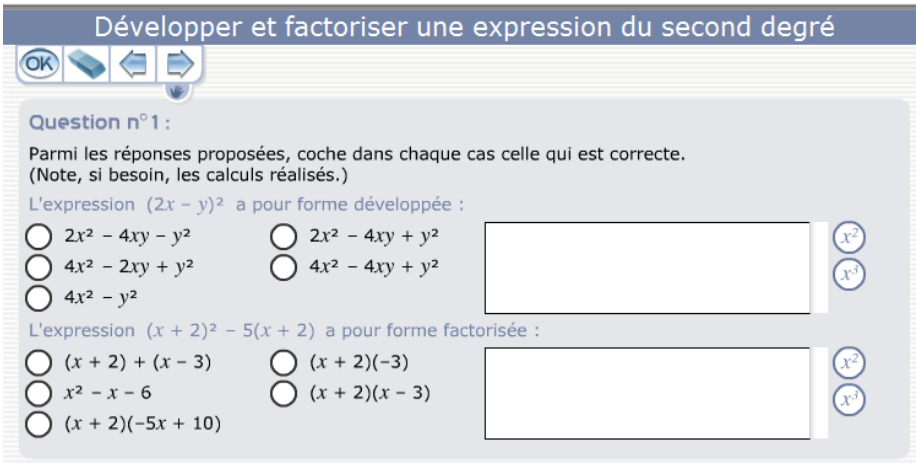


Figure 1 : « développer et factoriser une expression du second degré »

- Des tâches de production d'expression, de formule

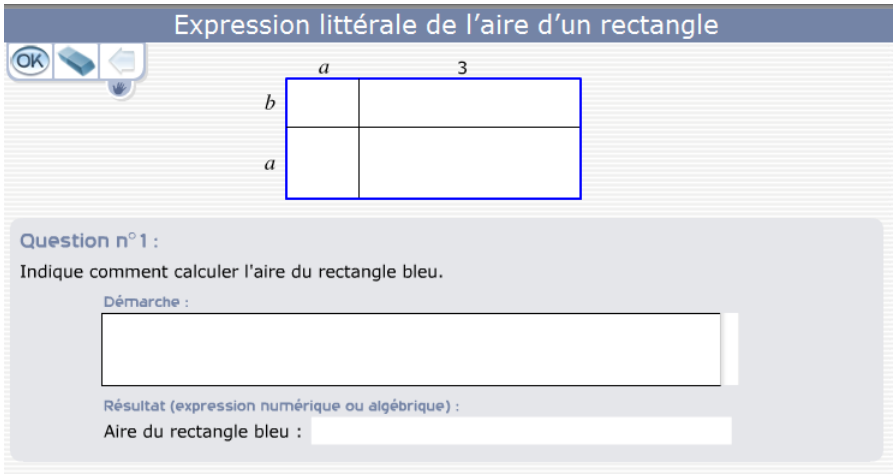


Figure 2 : « expression littérale de l'aire d'un rectangle »

- Des tâches de reconnaissance de la structure d'une expression
  Ces tâches permettent de repérer la signification attribuée à des expressions (équivalence) et le niveau de raisonnement engagé par les élèves.

Figure 3.1 : « déterminer si une égalité est toujours vérifiée »

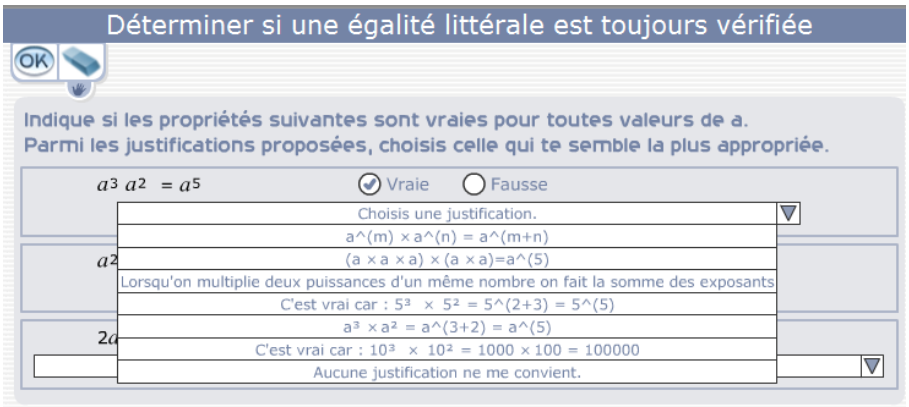


Figure 3.2 : Justifications proposées dans le cas où l'élève a choisi « Vraie »

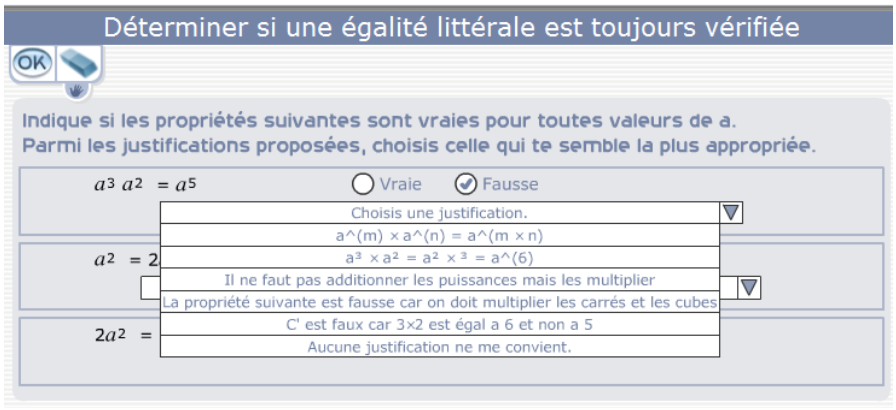


Figure 3.3 : Justifications proposées dans le cas où l'élève a choisi « fausse »

- Des tâches pour résoudre des problèmes dans différents cadres (numérique, algébrique, géométrique, fonctionnel) en mobilisant l'outil algébrique pour prouver des propriétés

Les tâches de preuve permettent de tester la capacité des élèves à mobiliser l'outil algébrique pour produire des expressions algébriques puis prouver une propriété

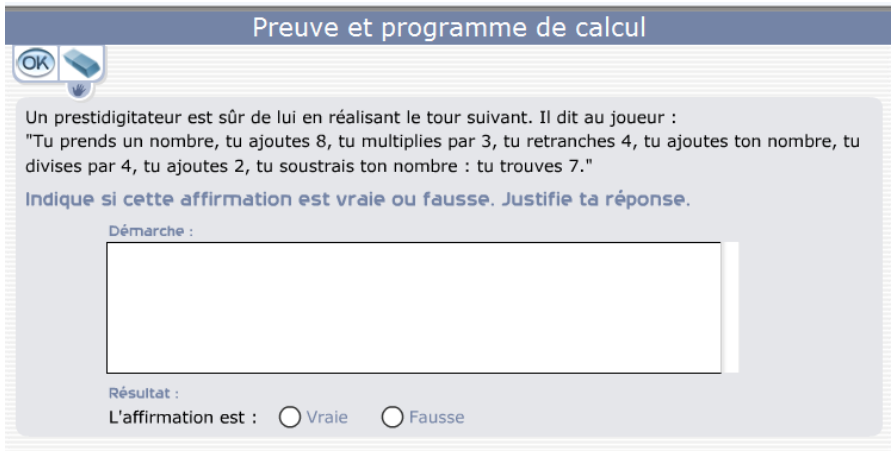


Figure 4 : « Preuve et programme de calcul »

ANNEXE 2

Composante	Notation	Objectif	Niveaux de compétence
Calcul algébrique	CA	Etudier la capacité à calculer algébriquement.	*Niveau 1* : Calcul intelligent et contrôlé
			Niveau 2 : Calcul technique basé sur des règles syntaxiques souvent à l'aveugle
			Niveau 3 : Calcul sans signification et sans priorité opératoire (arithmétique)
Usage de l'algèbre	UA	Etudier la disponibilité de l'outil algébrique et la capacité à le mobiliser dans des situations de modélisation (production de formules ou mise en équation) et de preuve.	*Niveau 1* : Disponible et mobilisation adaptée.
			Niveau 2 : Adapté dans certains types de problèmes.
			Niveau 3 : Non motivé et non compris.
			Niveau 4 : Non – Arithmétique
Traduction d'une représentation à une autre	T	Etudier la capacité à traduire une expression d'un registre à un autre et la flexibilité à interpréter une représentation d'un registre à un autre.	*Niveau 1* : Traduction correcte.
			Niveau 2 : Traduction sans appui sur la reformulation.
			Niveau 3 : Traduction pour schématiser.

Tableau 3 : Caractéristiques du bilan personnel de l'élève

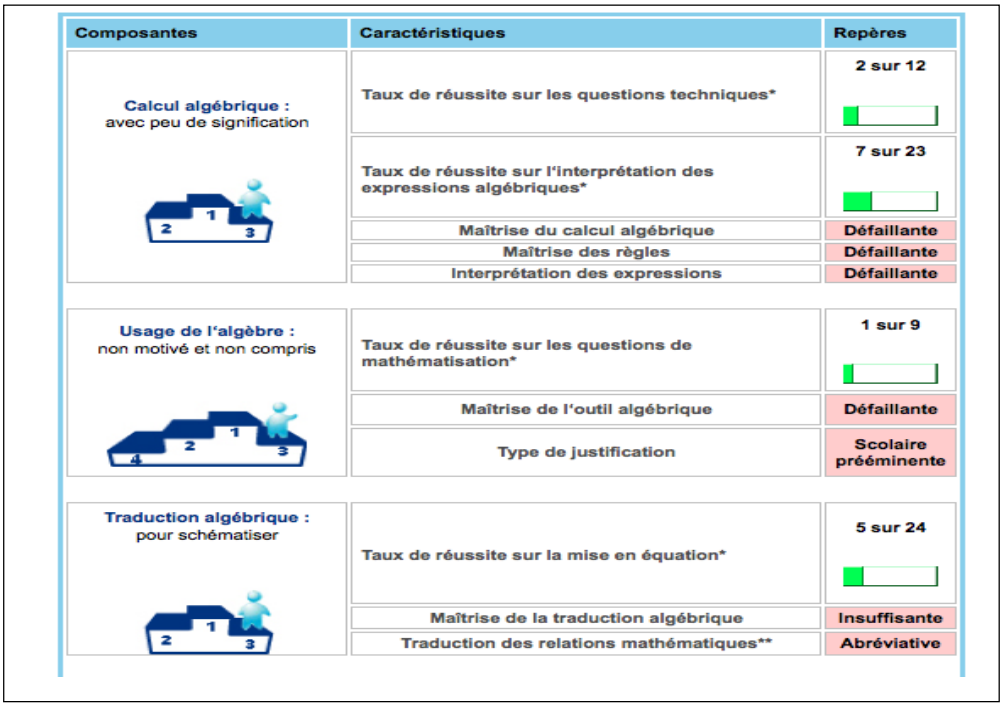


Figure 5 : bilan personnel d'un élève en algèbre élémentaire

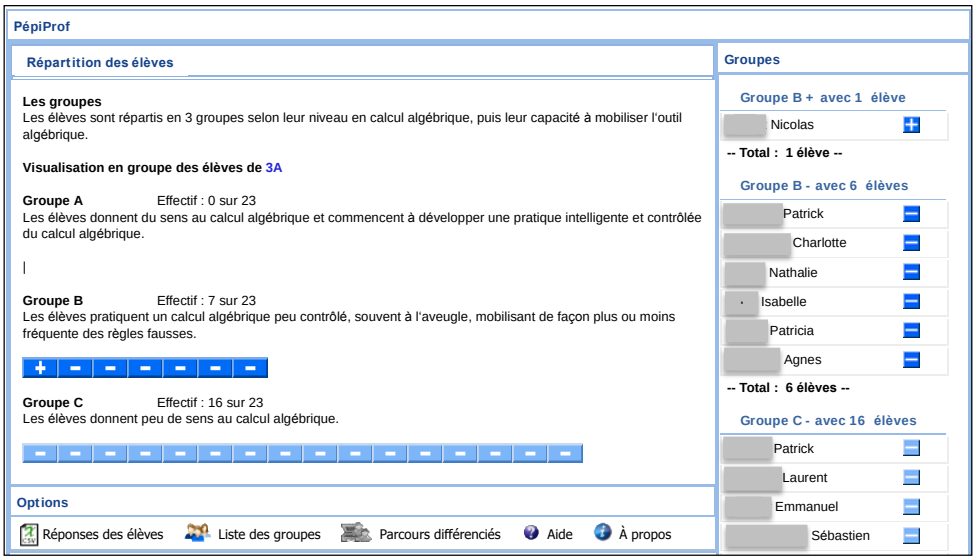


Figure 6 : bilan d'une classe en algèbre élémentaire