

UNE INGENIERIE DIDACTIQUE AUTOUR DE L'« ALGORITHME DE DICHOTOMIE » ILLUSTRANT UN ENSEIGNEMENT DE L'ALGORITHMIQUE EN PREMIERE SCIENTIFIQUE COMME OBJET D'APPRENTISSAGE DANS UN CHAMP DES MATHEMATIQUES : L'ANALYSE

Dominique LAVAL

LDAR – Université Diderot – Paris 7

dominique.laval@gmail.com

Résumé

Notre travail de recherche se concentre sur l'étude et les apprentissages d'un algorithme dans un champ particulier des mathématiques : l'analyse. Une ingénierie didactique est alors conçue et expérimentée dans une classe de Première Scientifique d'un lycée français. La conception et la construction d'algorithmes par les élèves sont situées dans un cadre plus général des approches de modélisation en mathématiques.

Mots clés

Algorithmique, Algorithmes, Dichotomie, Espace de Travail Algorithmique, Paradigmes algorithmiques, Modélisation, Outil, Objet.

I. INTRODUCTION : LES QUESTIONS INITIALES

L'analyse des algorithmes est un nouveau domaine d'enseignement des mathématiques introduit dans les lycées français depuis 2009, mais c'est aussi un champ de recherche récent qui a émergé comme une nouvelle discipline scientifique dans les années soixante et a été rapidement reconnu comme l'un des domaines les plus actifs d'étude scientifique, devenant une part importante de la science informatique. La raison de ce soudain intérêt pour l'étude des algorithmes n'est pas difficile à retracer. Elle est due au développement rapide des ordinateurs et de leur usage dans de nombreux domaines de l'activité humaine ayant conduit à la construction d'une grande variété d'algorithmes informatiques.

Selon les nouveaux curricula de mathématiques au lycée, un enseignement algorithmique devrait pouvoir aider à donner un sens à un certain nombre de concepts mathématiques étudiés. Un tel enseignement est présenté comme un domaine transversal des mathématiques. Il favorise l'accès des élèves à la pensée scientifique. Nous pensons ainsi pouvoir observer trois objectifs fondamentaux en lien avec cet enseignement : (1) améliorer la connaissance des fondements de la logique et du raisonnement – (2) illustrer les concepts mathématiques enseignés par l'utilisation d'outils informatiques – (3) développer la créativité et des attitudes à la prise d'initiative chez l'élève à travers l'exploration.

L'enseignement des algorithmes dans les curricula de mathématiques semble essentiellement se limiter à un seul aspect, celui d'*outil* (au sens de Douady, 1986). Nous avons alors le problème de son existence comme *objet* (ibid.) d'apprentissage. En effet, nous pensons que la conception et la construction d'algorithmes impliquent des connaissances spécifiques que nous plaçons dans un champ plus large de processus de modélisation. Les questions sont alors les suivantes : (Q1) Comment un tel enseignement peut aller au-delà de cet objectif afin que

l'algorithme utilisé devienne un objet d'apprentissage ? **(Q2)** Comment le travail sur des algorithmes peut-il être considéré comme une tâche de modélisation ?

II. LES CONNAISSANCES MISES EN JEU

1. Premières définitions

- **Un algorithme** (Bouvier & al., 2006, p. 27)

Un algorithme est une suite finie de règles à appliquer dans un ordre déterminé à un nombre fini de données pour arriver avec certitude (c'est-à-dire sans indétermination ou ambiguïté), en un nombre fini d'étapes, à un certain résultat et cela indépendamment des données.

- **L'algorithme** est la science des algorithmes. Un de ces objectifs est la conception, l'évaluation et l'optimisation des mathématiques et des méthodes de calcul informatique.
- **Un programme** est la transcription d'un algorithme dans un langage qui peut être exécuté par une machine.
- **La programmation** en informatique est l'ensemble des activités permettant l'écriture de programmes exécutables par une machine. « *La programmation représente usuellement le codage*¹ ».

2. L'algorithme, un concept !

- **L'algorithme** comme *objet* : Complexité – Aspect constructiviste – Machine de Turing.
- **L'algorithme** comme *outil* : Au lycée, le travail sur des algorithmes est considéré comme une pratique donnant du sens à d'autres concepts (ex. *l'algorithme d'Euclide*, *l'algorithme de dichotomie*, ...). Un algorithme est alors pris pour sa conception. L'algorithme comme *outil* est situé aux niveaux des paradigmes algorithmiques I et II (cf. le cadre théorique).

III. LE CADRE THEORIQUE

Notre cadre théorique tient compte de cadres généraux issus de la didactique des mathématiques et de la didactique de l'informatique, ainsi que de cadres liés à la modélisation. Il est basé sur la *dialectique outil-objet* (Douady, 1986), les *Espaces de Travail Mathématique* (Kuzniak, 2011). En outre, nous utilisons la description des *niveaux de compétences en modélisation* (Henning et Keune, 2007).

Sous une approche de modélisation, un algorithme peut être considéré, comme un artefact associé à une situation issue du monde du jeu (cf. *L'algorithme de dichotomie* » comme stratégie *rapide* pour la détermination d'un nombre entier secret compris entre 0 et 1000). Dans le cadre d'un *Espace de Travail Mathématique* (ETM) qui, comme en géométrie, peut s'appliquer à un espace de travail spécifique qu'est l'algorithme et que nous notons ETA, nous étudions les interactions entre les objets, les artefacts et les paradigmes lors d'une analyse de tâches, permettant ainsi d'aider à observer les positions respectives des élèves et de l'enseignant, sous l'influence des curricula. Nous proposons de structurer les ETA autour d'un réseau de composants : **(R1)** d'un ensemble d'objets, qui conformément aux corpus du programme, est constitué des instructions élémentaires (affectation, calcul, entrée, sortie) et des notions de boucle et itérateur, ainsi que des instructions conditionnelles ; **(R2)** des

¹ http://fr.wikipedia.org/wiki/Programmation_informatique

artefacts *programmables* que sont la calculatrice, les objets programmables, le langage naturel, le langage pseudo-code, le tableur, les langages algorithmiques et les logiciels de programmation ; **(R3)** un référentiel d'idées théoriques qui aident à créer et à justifier des algorithmes comme objets pour l'exécution par des artefacts programmables.

Les paradigmes algorithmiques, permettant d'interpréter le contenu des composants et de définir leurs fonctions, sont les suivants :

- **Niveau I** : une approche intuitive des algorithmes issue de situations de la vie réelle. A ce niveau, par exemple, l'efficacité de l'algorithme découle naturellement de sa description.
- **Niveau II** : une axiomatique « naturel » des algorithmes. L'efficacité et la complexité de l'algorithme utilisé sont questionnées. L'algorithme peut devenir un objet.
- **Niveau III** : une étude du traitement formel des algorithmes (ex. Machines de Turing).

Aux trois niveaux, comme en géométrie, les représentations des algorithmes impliquent des registres spécifiques (Duval, 2006) avec les conversions et les traitements liés à ces registres.

IV. ELABORATION D'UNE INGENIERIE DIDACTIQUE AUTOUR DE L'« ALGORITHME DE DICHOTOMIE »

Selon les travaux d'Artigue (1992), notre ingénierie didactique va comprendre quatre phases – (1) une première phase constituée d'analyses préalables – (2) une deuxième phase, où le chercheur agit sur un certain nombre de *variables de commande* (de types macro-didactiques ou de types micro-didactiques) du système, non fixées par les contraintes de l'expérimentation – (3) une troisième phase, constituées des expérimentations en classe avec les élèves et leur enseignant afin d'élaborer un recueil de données éclairant l'objet de la recherche en cours – (4) une dernière phase constituée des analyses *a posteriori* et de l'évaluation de l'expérimentation.

Les objectifs pédagogiques	Les objectifs didactiques
<p>Cas discret</p> <ul style="list-style-type: none"> • Décrire un modèle permettant de simuler le jeu : « Deux joueurs A et B jouent au jeu suivant : - Le joueur A choisit « secrètement » et au hasard un nombre entier « secret » compris entre 1 et 1000. - Le joueur B doit deviner ce nombre « secret » en faisant le minimum de propositions. A chaque proposition du joueur B, le joueur A répond par « Le nombre cherché est plus grand », « Le nombre cherché est plus petit » ou « Bravo, tu as gagné » selon la position de la proposition par rapport au nombre « secret » à atteindre. » • Définir une stratégie <i>rapide</i> consistant à minimiser le nombre de coups pour trouver ce nombre entier secret. • Elaborer un algorithme en langage naturel. • Ecrire des algorithmes en langage pseudo-code. • Travailler en binôme. • Envisager la modélisation d'une stratégie <i>rapide</i> en utilisant des simulations. • Définir une conjecture sur une stratégie <i>rapide</i> associée à la dichotomie. <p>Cas continu</p> <p>Les élèves ont à leur disposition plusieurs algorithmes associés soit à des fonctions qui peuvent ne pas être continues en un ou plusieurs points, soit à des</p>	<ul style="list-style-type: none"> • S'approprier un jeu de la part des élèves. • Passer d'un algorithme écrit en langage naturel à l'organigramme. • Travailler dans divers ETA : <i>LARP</i> (organigramme), <i>AlgoBox</i> (les algorithmes écrits dans un langage pseudo-code avec le logiciel <i>AlgoBox</i> nécessitent un codage proche du langage naturel),... • Travailler sur divers ETM spécifiques : <i>ETM_{analyse}</i> et ETA. Ainsi, <i>l'espace de travail mathématique peut être vu comme une mise en réseau des diverses fibres que constituent les ETM_d</i> (Espaces de Travail spécifique associé à un domaine <i>d</i>). <i>La question se pose alors de savoir comment s'organisent la fibration entre ces espaces. Ces interactions entre les domaines sont essentielles pour comprendre le fonctionnement global du travail mathématique et elles forcent en outre la considération des processus de modélisation dans le cadre des ETM, au-delà des seules questions sémiotiques</i> (Kuzniak et Richard, 2014). • Etudier les effets d'une genèse instrumentale sur l'élève et les pratiques enseignantes : artefacts programmables (ex. calculatrice), les objets programmables, le langage naturel, le langage pseudo-code, les langages algorithmiques, les logiciels algorithmiques, ...

fonctions continues sur un intervalle mais dont on ne connaît pas la monotonie sur cet intervalle.	<ul style="list-style-type: none"> • Observer différents registres de représentations sémiotiques possibles. • Etudier les niveaux de compétences de modélisation chez l'élève.
--	---

Dans le cas continu, les élèves travaillent sans avoir la connaissance du Théorème des Valeurs Intermédiaires et de son corollaire.

V. PERSPECTIVE D'UNE ETUDE DIDACTIQUE DES COMPETENCES DE MODELISATION CHEZ LES ELEVES LORS DE L'APPLICATION DE L'« ALGORITHME DE DICHOTOMIE » DANS LE CAS DISCRET

Dans une approche de modélisation, lors du jeu décrit précédemment, l'élève est confronté aux défis suivants :

- décrire les différentes étapes entre l'observation de la réalité et de la construction du modèle mathématique développé ;
- mettre en marche la simulation et écrire, en langage naturel, un (ou plusieurs) algorithme(s) du modèle obtenu, et de la simulation définie ;
- coder le (ou les) algorithme(s) obtenu(s) pour un usage en langage machine ;
- faire une (ou des) interprétation(s) pertinente(s) des résultats obtenus.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ARTIGUE, M. (1992). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9-3, pp. 281-308
- BOUVIER, A., GEORGE M., LE LIONNAIS F. (2009). *Dictionnaire des mathématiques*. Paris : PUF.
- DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n° 7 (2), pp. 5-31.
- DUVAL, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ? *Relime, Numero Especial*, pp. 45-81.
- HENNING, H., KEUNE, M. (2007). Levels of Modelling Competencies. *Modelling and Application in Mathematical Education-The 14th ICMI Study*, pp 225-232. Berlin: Springer
- KUZNIAK, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 16, pp. 9-24.
- KUZNIAK, A. ET P.R. RICHARD (2014) Espace de Travail Mathématiques. Points de vue et perspectives.
- LAVAL, D. (2013). Studying the teaching/learning of algorithms at upper secondary level: first steps. (Poster) - *Actes du Colloque CERME 8 - Antalya Turquie 2013*.
- LAVAL, D. (à paraître) L'algorithmique comme objet d'apprentissage de la démarche de preuve en théorie élémentaire des nombres : l'algorithme de Kaprekar. *Actes du Quatrième symposium international – Espace de Travail Mathématique* (juillet 2014), Madrid, Espagne.

Dictionnaire *Encyclopédie Universalis*, tome 19.