

SUR LES GESTES DE LA RECHERCHE EN MATHÉMATIQUES : ÉLÉMENTS DE COMPARAISON ENTRE ÉLÈVES ET CHERCHEURS

Marie-Line GARDES

Laboratoire I3M, équipe DEMa – Université Montpellier II

marie-line.gardes@univ-montp2.fr

Résumé

Dans ce texte, nous présentons un outil méthodologique spécifique, la notion de geste de la recherche, pour étudier et mettre en perspective l'activité de recherche d'un mathématicien et d'élèves de terminale scientifique, engagés dans l'étude d'un problème non résolu en théorie des nombres : la conjecture d'Erdős-Straus.

Mots clés

Geste de la recherche, dimension expérimentale, processus de recherche, problème de recherche, problème non résolu, travail du mathématicien

INTRODUCTION

Depuis près de 30 ans de nombreuses expériences, au collège et au lycée, ont été menées sur la mise en œuvre de problèmes de recherche en classe de mathématiques. Un des enjeux est de mettre l'élève dans une position de chercheur lui permettant, sous certains aspects, la reproduction de l'activité du mathématicien. Dans notre travail, nous étudions les processus de recherche de différents publics (mathématiciens, élèves, étudiants) engagés dans la recherche d'un même problème non résolu en théorie des nombres. Notre objectif est de mettre en perspective les différents processus de recherche afin de développer et enrichir des ingénieries favorisant l'activité de recherche mathématique des élèves et des étudiants dans le cadre de la recherche de problème, en prenant en compte le rôle de la dimension expérimentale dans le processus de recherche.

Nous avons choisi le domaine de la théorie des nombres principalement pour deux raisons. Tout d'abord, c'est un domaine mathématique relativement familier pour les élèves qui contient de nombreuses questions ouvertes. Nous pouvions ainsi trouver un même problème à proposer à des élèves et à des mathématiciens. De plus, la théorie des nombres est un domaine des mathématiques où la dimension expérimentale est importante dans le travail des chercheurs. Le problème que nous avons choisi pour conduire cette étude est la conjecture d'Erdős-Straus (Erdős, 1950). L'énoncé est le suivant : Pour tout entier naturel n , on peut trouver des entiers non nuls x, y, z (non nécessairement distincts) tels que $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$. Ce problème répond aux critères que nous avons retenus puisque c'est un problème non résolu par la recherche mathématique, à portée des élèves et contenant un caractère expérimental, à savoir faire des aller et retours entre des essais pour différentes valeurs de n , des formulations de conjectures et l'élaboration de preuves.

Notre travail s'articule autour de trois grands axes : l'étude mathématique de la conjecture, le suivi du travail d'un mathématicien sur la résolution de ce problème et les expérimentations avec des élèves. L'affiche que nous avons exposée présente les recherches d'un mathématicien et les travaux d'un groupe d'élèves de terminale scientifique sur leur étude respective de la

conjecture d'Erdős-Straus. Elle montre également une mise en perspective de ces deux recherches grâce à un outil méthodologique spécifique : une analyse en termes de gestes de la recherche.

GESTES DE LA RECHERCHE

La notion de *geste* en mathématiques a été étudiée et développée en philosophie des mathématiques pour discuter des problèmes de fondements, des pratiques mathématiques et de leur développement (Cavaillès 1938, Châtelet 1993, Bailly & Longo 2004). En appui sur ces travaux, nous avons adapté et développé la notion de *geste* pour étudier les processus de recherche en mathématiques. La définition que nous retenons est la suivante :

Un geste est un acte de mise en relation d'objets mathématiques dans une intentionnalité. C'est une opération qui s'accomplit en s'incarnant dans une combinaison de signes, soumise aux règles d'emploi de ces signes. Il possède un pouvoir de créer dans sa possibilité d'ouvrir le champ des possibles dans le travail mathématique, en saisissant l'intuition au moyen d'un geste dans l'expérience. (Gardes, 2013, p.155)

La notion de *geste* de la recherche permet de prendre en compte la dimension active d'un sujet qui cherche, le rôle de l'intuition et les aspects dialectiques de l'activité mathématique, en particulier entre l'acquisition des connaissances et le développement d'heuristiques. Pour la recherche de la conjecture d'Erdős-Straus, nous avons identifié sept gestes de la recherche : désigner des objets, réduire le problème aux nombres premiers, introduire un paramètre, construire et questionner des exemples, effectuer des contrôles locaux, transformer l'équation initiale et implémenter un algorithme (Gardes, 2013). Une analyse des processus de recherche en termes de gestes nous a permis de montrer comment un sujet agit pour avancer dans l'étude d'un problème. Nous présentons ci-dessous la recherche d'un mathématicien⁷⁰ et d'un groupe d'élèves de terminale scientifique⁷¹.

Dans la recherche du mathématicien que nous avons suivi, nous avons identifié six gestes de la recherche (tous sauf transformer l'équation initiale). Son processus de recherche est complexe et les avancées dans l'étude du problème sont provoquées par un système de gestes, ces derniers s'appelant les uns les autres dans leur réalisation.

Exemple : Pour obtenir l'identité du résultat principal de ses recherches⁷², le mathématicien a implémenté de nombreux algorithmes, à partir de la construction et du questionnement de nombreux exemples de décomposition de $4/n$ pour des valeurs de n données, et grâce à la désignation des nombres en jeu (par exemple trouver que d est un diviseur de m^2). Les hypothèses du résultat (d divise m^2 et $4m - 1$ divise $n + 4d$) sont obtenues par questionnement de la nature des nombres en jeu, elles permettent d'assurer que x , y et z sont des entiers.

Dans la recherche des élèves de terminale scientifique que nous présentons, nous avons relevé quatre gestes de la recherche (réduire le problème aux nombres premiers, construire et questionner des exemples, effectuer des contrôles locaux, désigner des objets). Ce sont les gestes qui émergent au sein d'une démarche de type expérimental et qui favorisent sa mise en œuvre.

Exemple : A partir de décompositions pour $n = 3$, $n = 6$, $n = 12$, $n = 16$ et $n = 18$ (geste *construire et questionner des exemples*), les élèves ont formulé et testé plusieurs conjectures avant d'établir et démontrer, à l'aide de la nature des nombres en jeu (geste *effectuer des*

70 Nous la présentons ici succinctement. Pour plus de détails, consulter Gardes & Mizony (2011), Gardes (2013) et la page internet de Mizony.

71 Nous la présentons ici succinctement. Pour plus de détails, consulter Gardes & Mizony (2011), Gardes (2010).

72 Soit n un nombre entier. S'il existe m et d deux entiers non nuls tels que d divise m^2 et $4m - 1$ divise $n + 4d$, alors il existe x , y , z des entiers non nuls tels que $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$.

contrôles locaux) le résultat suivant : pour les nombres pairs, l'équation d'Erdős-Straus a des solutions.

CONCLUSION

Nos analyses montrent que cet outil est pertinent pour étudier la question de la transposition du travail du chercheur (Gardes, 2013). Les gestes identifiés dans les recherches des mathématiciens sont également relevés dans les recherches des élèves, quand ces derniers disposent des connaissances mathématiques favorisant leur émergence. Par exemple, nous avons relevé que le geste *implémenter un algorithme* n'émerge pas dans les recherches des élèves. Une hypothèse est que les connaissances mathématiques sous-jacentes (notions algorithmiques, programmation) sont difficilement mobilisables par les élèves, voire absentes de leur milieu objectif⁷³. La notion de geste de la recherche permet de prendre en compte les aspects dialectiques de l'activité de recherche entre la mobilisation, l'acquisition de connaissances mathématiques et le développement d'heuristiques. En effet, l'émergence d'un geste est favorisée, d'une part par la mobilisation des connaissances mathématiques sous-jacentes, et d'autre part par la nature de la démarche de recherche mise en œuvre. En retour, sa réalisation au sein d'un système de gestes provoque des avancées dans la recherche, notamment l'élaboration de résultats partiels, et permet d'approfondir les connaissances mathématiques mobilisées et de développer des heuristiques de recherche. Pour le chercheur en didactique, la prise en compte d'un système de gestes contribue à l'analyse de la complexité des processus de recherche mis en œuvre au cours d'une résolution de problème, ainsi que de celle du travail mathématique effectif produit.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ERDÖS, P. (1950) On a diophantine equation. (Hungarian, Russian, English summaries), *Mat. Lapok 1*, 192-210.
- BAILLY, F. & LONGO, G. (2003). Incomplétude et incertitude en Mathématiques et en Physique. Article consulté sur <http://www.di.ens.fr/users/longo/files/PhilosophyAndCognition/incompl-incert.pdf>
- CAVAILLES, J. (1938). *Méthode axiomatique et Formalisme*. Paris : Hermann.
- CHATELET, G. (1993). *Les enjeux du mobile. Mathématique, physique, philosophie*. Paris : Éditions du Seuil.
- GARDES, M.-L. & MIZONY, M. (2011). La conjecture d'Erdos-Straus : expérimentation en classe et travail du chercheur, *Repères IREM 87*, 79-90.
- GARDES, M.-L. (2010). Démarches d'investigation en arithmétique, entre essais et conjectures : un exemple en terminale scientifique, *Petit x 83*, 51-78.
- GARDES, M.-L. (2013). Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres. *Thèse de doctorat*. Université Lyon 1.
- PAGE INTERNET DE MIZONY : <http://math.univ-lyon1.fr/~mizony/> (document : Sur la conjecture d'Erdős-Straus).

73 L'expérimentation a eu lieu avant l'introduction de l'algorithmique dans les programmes de mathématiques du secondaire.