ETUDE DE PROCESSUS DE RECHERCHE DE CHERCHEURS, ELEVES ET ETUDIANTS, ENGAGES DANS LA RECHERCHE D'UN PROBLEME NON RESOLU EN THEORIE DES NOMBRES

Marie-Line **GARDES**

Université Lyon 1

marie-line.gardes@univ-lyon1.fr

Résumé

Nos recherches visent à étudier la question de la transposition du travail du mathématicien, via l'analyse de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants sur la recherche d'un même problème non résolu : la conjecture d'Erdös-Straus. Ce travail didactique s'appuie sur des analyses mathématiques et épistémologiques qui nous ont permis d'identifier différents aspects du travail du mathématicien et des éléments moteurs dans l'avancée de ses recherches. Cela nous a conduite à développer la notion de « geste » de la recherche pour décrire, analyser et mettre en perspective les processus de recherche des trois publics. Ces analyses ont mis en évidence les potentialités du problème pour créer une situation de recherche de problèmes pour la classe, plaçant les élèves dans une position proche de celle du mathématicien. Les analyses didactiques se sont appuyées sur la construction d'une telle situation puis sur sa mise à l'épreuve dans un contexte de laboratoire avec des élèves de terminale scientifique. Dans cet article, nous mettons en évidence la méthodologie générale de la recherche, structurée selon les différents modèles de milieux (Bloch, 2002), et en particulier la construction d'un milieu favorisant l'émergence de gestes de la recherche.

Mots clés

Dimension expérimentale des mathématiques, problème de recherche, processus de recherche, théorie des nombres, conjecture d'Erdös-Straus.

INTRODUCTION

De nombreuses recherches en didactique des mathématiques se sont intéressées, depuis près de trente ans, à la construction, la mise en œuvre et l'analyse de dispositifs didactiques permettant aux élèves de pratiquer des activités de recherche mathématique (Schoenfeld, 1985 ; Arsac, Germain, & Mante, 1988 ; Duchet, 1996 ; Grenier & Payan, 2003 ; Dias, 2008 ; Giroud, 2011). Ils mettent en évidence l'intérêt des enseignants et des élèves pour ces pratiques de classe (Arsac & Mante, 2007) mais également les difficultés de mise en œuvre et les freins au développement des problèmes de recherche en classe (Aldon et al., 2010). Nos recherches s'inscrivent dans la continuité de ces travaux, en partageant notamment l'hypothèse suivante :

> Il est possible de reproduire chez l'élève certains aspects du travail du chercheur en le mettant dans des situations appropriées. (Tisseron, 1998)

De cette hypothèse, sont nées les questions centrales de notre travail : que veut dire concrètement mettre les élèves en position de chercheur ? Que peut-on transposer de l'activité de recherche d'un mathématicien ? Comment construire un milieu riche favorisant l'activité de résolution de problèmes de recherche en classe ? Pour étudier ces questions autour de la transposition du travail du mathématicien, notre recherche s'est centrée sur l'analyse de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants sur la recherche d'un même problème non résolu :

la conjecture d'Erdös-Straus[1]. Notre hypothèse est qu'une mise en perspective des différents processus de recherche permettrait de dégager des éléments pour développer, dans l'enseignement, des pratiques mathématiques s'appuyant de manière effective sur la résolution de problème de recherche. De cette hypothèse, est né un questionnement de nature épistémologique et didactique. Nous nous sommes interrogée spécifiquement sur ce que l'on pourrait apprendre du travail mathématique effectif des chercheurs pour développer et enrichir des ingénieries favorisant l'activité de recherche mathématique des élèves et des étudiants dans le cadre de la résolution de problèmes de recherche. Plus précisément, l'étude épistémologique porte sur la nature de l'activité de recherche mathématique professionnelle et la manière dont elle est pratiquée par les chercheurs. L'objectif épistémologique central est d'identifier des éléments invariants potentiels dans l'activité de recherche mathématique à travers des témoignages de mathématiciens et à travers le suivi du travail de mathématiciens. L'étude didactique consiste, elle, à l'identification des éléments pour la construction d'un milieu riche favorisant la résolution de problèmes de recherche dans les classes.

La méthodologie de recherche que nous avons élaborée s'appuie sur l'interaction de trois pôles (mathématique, épistémologique et didactique), et se structure en trois phases selon les modèles de milieux de Bloch (2002) :

- Une étude d'épistémologie contemporaine qui consiste, outre la lecture des travaux de recherches contemporains sur la conjecture et notre propre travail mathématique, à suivre des travaux de recherche de chercheurs « in statu nascendi » sur la conjecture d'Erdös-Straus (milieu théorique épistémologique au sens de Bloch).
- La construction d'une situation didactique de recherche autour de la conjecture par des allers et retours entre le milieu théorique et le milieu expérimental a priori (au sens de Bloch), en particulier grâce à la mise en œuvre de pré-expérimentations.
- Une expérimentation de type laboratoire en classe de terminale scientifique pour mettre à l'épreuve la situation didactique élaborée (confrontation à la contingence au sens de Bloch).

La première partie de cet article présente les analyses mathématique et épistémologique. Dans un premier temps, nous résumons l'analyse mathématique du problème de recherche choisi, réalisée à partir d'articles de la littérature existante d'une part et à partir de l'étude des recherches récentes de deux chercheurs d'autre part. Dans un second temps, nous présentons l'étude épistémologique avec l'identification de divers aspects de l'activité de recherche mathématique à partir de témoignages de mathématiciens ; la construction d'une grille d'analyse des processus de recherche et le développement de la notion de *geste* de la recherche ; la mise à l'épreuve de cette grille sur les travaux de deux chercheurs. La seconde partie de l'article est consacrée aux études didactiques, scindées en phases : construction d'une situation didactique de recherche autour du problème de recherche choisi et son analyse *a priori*, mise en œuvre d'une expérimentation en contexte de laboratoire et analyses *a posteriori* de l'expérimentation avec notamment l'analyse des processus de recherche mis en œuvre par les élèves dans leur recherche à l'aide de la grille construire et l'analyse du milieu.

ANALYSE MATHEMATIQUE ET EPISTEMOLOGIQUE

Dans cette partie nous rendons compte des travaux que nous avons conduits pour élaborer le milieu théorique (au sens de Bloch) de la situation expérimentale autour de la conjecture d'Erdös-Straus. Dans la première partie, nous résumons l'analyse mathématique de la conjecture d'Erdös-Straus que nous avons effectuée en étudiant et en articulant les résultats

[1] L'énoncé du problème est donné à la page suivante.

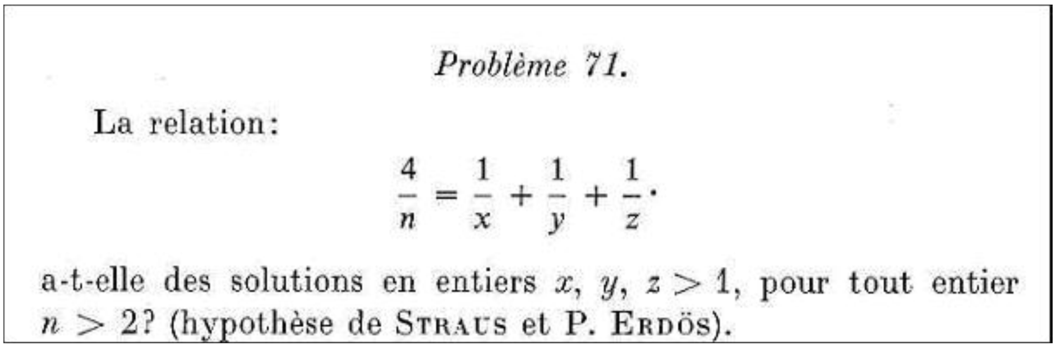
anciens et nouveaux sur le problème. Dans la seconde partie, nous présentons l'analyse d'épistémologie historique et contemporaine que nous avons conduite sur l'activité de recherche mathématique d'une part, et sur la conjecture d'Erdös-Straus d'autre part.

Première partie : analyse mathématique

La méthodologie de l'analyse mathématique s'est structurée selon trois études : l'état de l'art du problème, l'étude des travaux récents de deux chercheurs et l'analyse des articulations entre les différents résultats. Après une brève présentation du problème et de ses principaux résultats, nous résumons ici les travaux des deux chercheurs : Thépault, amateur de problèmes mathématiques et Mizony, chercheur (retraité) à l'Université Lyon 1.

Présentation du problème et des principaux résultats

Le problème choisi est une conjecture formulée par Erdös et Straus en 1950.


Problème 71.

La relation:

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

a-t-elle des solutions en entiers x, y, $z > 1$, pour tout entier $n > 2$? (hypothèse de STRAUS et P. ERDÖS).

Figure 1 – Enoncé de la conjecture d'Erdös-Straus (Erdös, 1963)

Plusieurs mathématiciens, entre 1950 et 2011 se sont intéressés à la recherche de cette conjecture[2]. Nous présentons ici les trois résultats principaux.
Résultat 1 : L'équation d'Erdös-Straus[3] a des solutions polynomiales en n pour tout n non congru à 1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2 modulo 840.
Résultat 2 : Pour n congru à 1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2 modulo 840, il n'existe pas de solutions polynomiales en n lorsque n parcourt l'une de ces progressions arithmétiques.
Résultat 3 (Swett, 1999) : L'équation d'Erdös-Straus a des solutions pour tout n inférieur à 10^{14}.

Recherches de deux chercheurs : Thépault et Mizony

La démarche de recherche de résolution de la conjecture d'Erdös-Straus de Thépault a été la suivante :

1. Restriction de n entier naturel à n nombre premier[4]. Soient n un nombre premier et k un nombre entier. Alors $n = 4k + 1$ ou $n = 4k + 3$.
2. Pour $n = 4k + 3$, il donne la solution polynomiale suivante :
$$\frac{4}{n} = \frac{1}{(4k+3)(k+1)((4k+3)(k+1)+1)} + \frac{1}{(4k+3)(k+1)+1} + \frac{1}{k+1}$$
3. Pour $n = 4k + 1$, il donne une condition suffisante d'existence de solutions à l'équation

[2] Nous pouvons citer : Erdös (1950, 1963), Yamamoto (1965), Mordell (1969), Swett (1999), Schinzel (2000), Elsholtz & Tao (2011).
[3] L'équation d'Erdös-Straus est la relation $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$.
[4] Si l'équation admet, pour l'entier n, le triplet (x, y, z) comme solution alors elle admet, pour l'entier kn, le triplet solution (kx, ky, kz). Le théorème de décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers assure alors la réduction du problème aux nombres premiers.

d'Erdös-Straus.

Théorème 1 : Soit $n = 4k + 1$. S'il existe a, b, deux entiers non nuls tels que b divise a^2 et $4a - 1$ divise $bn + a$, alors

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{an} + \frac{4a-1}{n(a+bn)} + \frac{b(4a-1)}{a(a+bn)}$$

est une décomposition de $4/n$ en somme de trois fractions unitaires.

4. Etude de la conjecture pour des familles de nombres. A partir du théorème 1, il a montré que l'équation d'Erdös-Straus a des solutions pour tous les nombres impairs, à l'exceptions des nombres de la forme $n = 60k + 1$ et $n = 60k + 49$.

Les outils mathématiques utilisés par Thépault pour établir ces résultats sont essentiellement algébriques. En particulier, il transforme l'écriture de l'équation initiale pour ramener le problème à la résolution d'une équation du second degré avec une méthode « classique », à savoir celle de la somme et du produit des racines d'une fonction polynôme du second degré.

La démarche de recherche de résolution de la conjecture d'Erdös-Straus de Mizony a été la suivante :

1. Etude de la conjecture d'Erdös-Straus sous deux formes :
   Conjecture forte : Pour tout n supérieur ou égal à 2, il existe x, y, z tels que $4/n = 1/x + 1/ny + 1/nz$.
   Conjecture faible : Pour tout n supérieur ou égal à 2, il existe x, y, z tels que $4/n = 1/nx + 1/y + 1/z$.
2. Pour chaque forme de conjecture, il donne une condition suffisante d'existence de solutions à l'équation d'Erdös-Straus.
   Théorème 2 (pour la conjecture forte)[5] : Soit n un nombre entier. S'il existe m, d, deux entiers tels que d divise m^2 et $4m - 1$ divise $n + 4d$, alors
   $$\frac{4}{n} = \frac{1}{mn} + \frac{4m-1}{mn+d} + \frac{(4m-1)d}{(mn+d)mn}$$
   est une décomposition de $4/n$ en somme de trois fractions unitaires[6].
3. Etude algorithmique de la conjecture d'Erdös-Straus : il a construit un programme de vérification de la conjecture pour tout $n < 10^{17}$. Il améliore ainsi le résultat 3.
   Résultat 3 bis (Mizony, 2010) : L'équation d'Erdös-Straus a des solutions pour tout n inférieur à 10^{17}.

Pour établir ces résultats, Mizony a utilisé des outils d'arithmétique modulaire (congruences, diviseurs, nombres premiers, etc.), d'algorithmique et de programmation.

A travers ce bref résumé de l'analyse mathématique de la conjecture d'Erdös-Straus, nous voulons mettre en évidence trois points essentiels. Tout d'abord, au vu des résultats 1, 2 et 3bis, les recherches sur la résolution de la conjecture peuvent être résumées ainsi : il reste à démontrer l'existence de solution à l'équation pour tout nombre premier n congru à 1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2 modulo 840 et plus grand que 10^{17}. Le problème majeur qui subsiste, c'est de réussir à trouver une forme générale de solutions pour ces classes de nombres. Il s'agit d'un problème de résidus quadratiques. Ensuite, l'étude montre une diversité des domaines mathématiques et des méthodes utilisées par les mathématiciens dans leurs recherches sur la conjecture. Certains travaux se situent dans le champ de l'arithmétique modulaire et d'autres relèvent de l'arithmétique des polynômes dans Z[X]. Concernant les recherches récentes que nous avons recueillies, Thépault a eu recours à des outils algébriques simples (équations du second degré) et Mizony a étudié le problème algorithmiquement et en arithmétique modulaire. Enfin, cette étude mathématique montre qu'il est possible de proposer un travail de recherche sur la conjecture d'Erdös-Straus à des élèves de lycée et à des étudiants en début

[5] Un théorème similaire est énoncé pour la conjecture faible. Nous renvoyons le lecteur à (Gardes, 2013, p.94).
[6] Remarque : les théorèmes 1 et 2 sont équivalents par le changement de variable $a = m$ et $b = m^2/d$.

d'université. En effet, les outils mathématiques mobilisés dans l'exploration du problème (nombres entiers, calcul fractionnaire, divisibilité, congruences, nombres premiers, etc.) sont *a priori* naturalisés dès les classes de collège et se révèlent performants pour avancer assez loin dans la recherche du problème.

Deuxième partie : analyse épistémologique

Notre référence pour définir l'activité de recherche en classe est le travail des mathématiciens. Des recherches en didactique se sont déjà intéressées aux caractéristiques de l'activité de recherche du mathématicien. Citons par exemple les travaux de Tisseron (1998) ou ceux de l'équipe Maths à modeler (Grenier & Payan, 2003 ; Grenier, 2012).

> Dans son quotidien, un chercheur va faire des essais, résoudre des cas particuliers, calculer, dessiner, étudier des conjectures, changer de cadre ou de registre, se poser une nouvelle question, mais aussi s'informer sur ce qui a été fait, échanger et débattre avec d'autres chercheurs. (Grenier, 2012, p. 1355)

Dans cette citation, nous distinguons des actions de natures différentes : des actions intrinsèques à la recherche d'un problème (faire des essais, résoudre des cas particuliers, étudier des conjectures, changer de cadre, etc.) et des actions extrinsèques telles que les échanges au sein de la communauté mathématiques. Dans notre recherche, nous nous intéressons plus spécifiquement à l'activité effective de recherche du chercheur lorsqu'il cherche un problème mathématique. Nous cherchons à analyser les processus de recherche mis en œuvre dans les actions intrinsèques, c'est-à-dire par exemple comment un chercheur va faire des essais, pour quelles raisons, comment il va les exploiter, quelles avancées cela entraîne pour ses recherches, etc. Nous voulons ainsi dégager des éléments invariants dans les processus de recherche mis en œuvre par les chercheurs dans une recherche de problème. Pour cela, nous avons choisi de mener une analyse d'épistémologie historique et contemporaine sur l'activité de recherche mathématique d'une part et une analyse d'épistémologie contemporaine sur la conjecture d'Erdös-Straus d'autre part. Dans un premier paragraphe, nous donnons les résultats de la première étude sur l'activité de recherche mathématique. Dans un second paragraphe, nous présentons la notion de *geste* de la recherche puis la construction d'une grille d'analyse des processus de recherche. Dans un troisième paragraphe, nous mettons à l'épreuve cette grille pour analyser les processus de recherche des deux chercheurs (Thépault et Mizony) sur la conjecture d'Erdös-Straus.

Résultats de l'étude d'épistémologie historique et contemporaine

Pour mener cette étude, nous avons choisi de nous référer à des textes historiques et contemporains de source primaire, c'est-à-dire des textes autobiographiques de mathématiciens sur le processus de découverte ou d'invention mathématique (Poincaré 1908, Hadamard 1945, Fehr 1908, Nimier 1989, Villani 2012). Nous avons également étudié plus particulièrement l'heuristique de la découverte à partir des ouvrages de Pólya, *How to solve it* (1945) et *Mathematics and plausible reasoning* (1954) et d'un essai de Lakatos, *Proofs and refutations* (1976). A partir de l'analyse de ces témoignages de mathématiciens, nous avons identifié différents aspects du travail du chercheur en situation de recherche :

- un processus en quatre étapes où s'alternent des phases de travail « conscient » et des phases de travail « inconscient », avec des méthodes de recherche différentes dans les phases d'invention et les phases de rédaction ;
- le rôle central de l'intuition dans la création mathématique ;
- le rôle d'une certaine sensibilité dans le choix d'un problème et dans la manière de le traiter ;
- le rôle de la communauté mathématique dans le processus de création et en particulier, des collaborations entre pairs ;
- le processus dialectique de l'activité de recherche mathématique entre la mobilisation,

l'acquisition de connaissances et le développement d'heuristiques (par exemple l'importance de faire des liens entre les notions, les problèmes déjà résolus, les méthodes, les domaines mathématiques, etc.) ;
- le caractère expérimental des heuristiques développées dans la résolution de problème de recherche.

Ces différentes caractéristiques du processus de découverte mathématique mettent en avant la dimension active de l'activité de recherche mathématique. Pour étudier plus finement les processus de recherche mis en œuvre par un sujet confronté à la résolution d'un problème de recherche, il nous semble ainsi intéressant de mieux comprendre les aspects suivants : le rôle de l'intuition (peut-on la provoquer ? si oui, comment la provoquer ?), l'importance du processus dialectique connaissances/heuristiques (comment y avoir recours ? comment le mettre en œuvre ?) et les ressorts de la dimension expérimentale (comment la favoriser ? comment permet-elle d'avancer dans la recherche d'un problème ?). Pour cela, nous avons développé la notion de « geste » de la recherche que nous présentons dans le paragraphe suivant.

Geste de la recherche et construction d'une grille d'analyse des processus de recherche

La notion de « geste » issue de la philosophie des mathématiques nous a semblé pertinente à développer pour analyser l'activité effective de recherche d'un problème mathématique, dans la mesure où elle permet de prendre en compte la dimension active de la recherche, le rôle central de l'intuition dans le processus de création et les aspects dialectiques entre la mobilisation, l'acquisition des connaissances et le développement d'heuristiques. Pour mettre en évidence ces éléments, nous nous sommes appuyée sur trois références philosophiques développant la notion de « geste » en mathématiques (Cavaillès, Châtelet et Longo).

Cavaillès introduit la notion de geste dans sa première thèse en philosophie des mathématiques, *Méthode axiomatique et formalisme* (1938, réed. 1981) pour discuter du fondement des mathématiques mais également des pratiques mathématiques. Il distingue deux facettes dans un geste : la manipulation de signes mathématiques, soumis à des règles d'emploi (geste qualifié de *combinatoire* par Cassou-Noguès (2001)) et un acte de pensée (geste qualifié d'*opératoire* par Cassou-Noguès (2001)). Cavaillès définit l'expérience comme un système de gestes et Cassou-Noguès précise alors que « l'expérience mathématique serait un double système de gestes : gestes combinatoires dans les espaces combinatoires, gestes opératoires dans les théories mathématiques » (Cassou-Noguès, 2001, p. 13). Ce ne sont pas deux actes distincts mais un seul acte qui se déploie comme combinatoire et opératoire. Le geste, au sens large, est alors une combinaison de signes, qui, pour qui sait lire, réalise une opération mathématique. Cavaillès reconnaît une certaine unité des gestes combinatoires et opératoires.

> La mathématique ne quitte pas le monde sensible mais est analyse sans fin du noyau des gestes sensibles. [...] la pensée est immanente au geste. (Cavaillès, 1994, p. 579)

Enfin, pour Cavaillès, le pouvoir de créer, qui réalise l'extension de l'expérience et le développement des théories, semble déterminé comme pouvoir de gestes dans l'expérience, c'est-à-dire comme pouvoir de gestes combinatoires. Cassou-Noguès reprend cette idée en s'appuyant sur le processus de résolution de problèmes par un mathématicien. Il avance deux éléments pour guider le mathématicien, l'exigence des problèmes posés et une sorte de prémonition du sens. Les notions exigées pour la résolution du problème sont pressenties et reconnues proches, à la limite du champ constitué. Et c'est précisément pour saisir ces notions, qui le hantent, que le mathématicien expérimente et teste des gestes. Le progrès dans la résolution du problème, c'est-à-dire l'extension de l'expérience provient alors d'un geste qui capte ces notions dans l'espace combinatoire initial au moyen d'une combinaison de signes, laquelle bouleverse le champ d'expérience et ouvre un nouvel espace combinatoire. Pour Cassou-Noguès, l'unité des gestes opératoires et combinatoires se réalise dans l'émergence de la pensée dans le geste, déterminée par cette possibilité de capter une notion pressentie dans un champ d'expérience au moyen d'un geste dans l'expérience. Le « geste » permet ainsi de saisir l'intuition puis de la mettre en œuvre afin de faire progresser le développement des mathématiques.

La notion de « geste » chez Châtelet (1993), qui reprend et prolonge celle de Cavaillès, est relativement complexe et semble plutôt se décliner comme un système de gestes :

> C'est une propulsion, qui se referme en une impulsion, d'un même geste qui décape une structure et réveille en nous d'autres gestes. (Ibid. p. 32)
>
> Le geste inaugure une lignée de gestes. (Ibid. p.32)

Comme chez Cavaillès, le « geste » chez Châtelet ne se réduit pas à l'acte mais comporte une intentionnalité.

> Le geste n'est pas un simple déplacement spatial : il décide, libère et propose une nouvelle modalité du « se mouvoir » ; [...] on se pénètre du geste avant de le savoir. (Ibid. p. 31)

Dans le travail mathématique, il ouvre le champ des possibles et permet de progresser dans l'élaboration de nouveaux concepts. Bailly et Longo précisent ainsi qu'il n'est « pas étonnant que les concepts les plus généraux et les plus abstraits, en mathématiques et en physique, s'enracinent "en première instance" dans l'expérience motrice et que ce soit "le geste" qui en permette le développement en même temps qu'il permet, si abstrait soit-il lui-même devenu, l'élaboration de nouveaux concepts » (Bailly & Longo, 2003, p. 13). Selon ces auteurs, trois gestes semblent avoir présidé à la naissance des concepts les plus fondamentaux des mathématiques et de la physique : celui des déplacements pour l'espace (et le temps), celui de la caresse pour le continu, celui de l'itération illimitée pour l'infini (et le nombre). Longo insiste sur l'action motrice du geste :

> Le geste, qui commence par l'action motrice, enracine la signification entre nous et le monde, à l'interface entre les deux. (Ibid. p. 4)
>
> Et le geste, en tant qu'action élémentaire, mais complexe, du vivant, est à l'origine de notre rapport à l'espace, de nos tentatives de l'organiser, de la géométrie, donc. (Ibid. p. 8)

Longo montre alors en quoi cette notion de « geste » est intéressante pour l'enseignement des mathématiques :

> Dans ce cas [le concept de nombre réel], l'intuition précède la structure mathématique et, ensuite, elle en est enrichie et précisée. Un mathématicien comprend et communique à l'élève l'appréciation du continu, par le geste, car, derrière le geste, les deux partagent cet acte d'expérience ancien ; par des gestes et des mots, l'enseignant peut (et doit) introduire à « [...] tout ce parler dans les mains [...] réservé aux initiés » dont parle Châtelet (1993, p. 34). La re-construction conceptuelle rigoureuse est nécessaire, bien évidemment [...] mais l'enseignement doit aussi faire vivre à l'élève l'expérience de l'intuition, de ce « voir » qui est au cœur de toute pratique scientifique. (Bailly & Longo, 2003, p. 15)

Les gestes permettent donc de saisir l'intuition qui précède et suit la construction conceptuelle. On retrouve ici un certain pouvoir de création par les gestes.

A la lecture de ces textes philosophiques, nous retenons la définition suivante de « geste » de la recherche :

> Un geste est un acte de mise en relation d'objets mathématiques dans une intentionnalité. C'est une opération qui s'accomplit en s'incarnant dans une combinaison de signes, soumise aux règles d'emploi de ces signes. Il possède un pouvoir de créer dans sa possibilité d'ouvrir le champ des possibles dans le travail mathématique, en saisissant l'intuition au moyen d'un geste dans l'expérience. (Gardes, 2013, p.155)

Deux caractéristiques nous semblent essentielles dans cette définition pour notre recherche. La première est la double facette unifiée du geste (geste sur les signes et gestes sur les idéalités) qui lui confère un pouvoir de créer dans le travail mathématique. Il prend en compte le rôle de l'intuition dans la création mathématique décrite par de nombreux mathématiciens. Identifier les gestes dans l'activité d'un mathématicien pourrait permettre ainsi de caractériser les éléments marqueurs de progression dans leur recherche. Notons également que ce pouvoir de créer, de saisir une intuition par un geste sur les signes, se réalise dans un processus dialectique entre organisation, acquisition de connaissances et développement d'heuristiques. La seconde caractéristique du geste est sa dimension active, il s'agit d'une action au cœur du travail mathématique. Dans une perspective socio-constructiviste de l'apprentissage, cette notion nous semble donc pertinente pour décrire et analyser l'activité mathématique effective d'un sujet confronté à la résolution d'un problème de recherche.

D'un point de vue didactique, nos travaux s'inscrivent dans la lignée de ceux de Dias (2008) qui a déjà repris cette notion de geste. Épistémologiquement, cet auteur a choisi de parler d'expérimentation en mathématiques à la lumière de Cavaillès comme d'un double système de gestes (combinatoire et opératoire) en les envisageant dans une dialectique qui les associe. Il considère l'intersection des espaces opératoire (où se situent la théorie mathématique et les opérations produits de la pensée) et combinatoire (où se construisent les signes sensibles et leurs règles d'emploi) par le sujet lui-même : « c'est en effet le sujet lui-même, celui qui écrit et qui pense, l'auteur unique de ces gestes » (Dias, 2008, p. 38). Cette représentation permet de faire apparaître l'expérience mathématique comme un dialogue du sujet avec les objets, où ces objets ne sont rendus visibles et accessibles que par les actes portant sur eux. En important ce modèle dans le champ didactique, l'auteur montre l'importance de créer un milieu propice à ce dialogue pour « faire faire des mathématiques » (au sens de Conne, 1999). Dias montre aussi que le modèle de « geste » peut rendre compte de l'aspect actif de l'activité mathématique ainsi que du processus dialectique de mobilisation, acquisition des connaissances et développement d'heuristiques (notamment dans la dialectique objets sensibles/objets théoriques). Cependant il ne l'utilise pas pour l'analyse de l'activité des sujets. Dans notre travail, nous voulons utiliser cette notion de « geste » à une autre échelle : celle de l'analyse du travail effectif d'un sujet confronté à la résolution d'un problème de recherche.

Pour étudier ces processus de recherche, nous proposons une analyse à deux niveaux. Dans un premier temps, nous effectuons une analyse globale de ces processus grâce à un outil méthodologique développé dans une recherche précédente (Gardes, 2010), basé sur une articulation entre une analyse en termes de dimensions organisatrice et opératoire (Battie, 2003) et une prise en compte du caractère expérimental en jeu dans le problème. L'exploitation de cet outil méthodologique permet, d'une part de spécifier la nature des procédures mises en œuvre par un sujet confronté à la résolution d'un problème de recherche, notamment en mettant en évidence les connaissances mathématiques mobilisées ; d'autre part d'effectuer une comparaison des processus de recherche de publics différents. Ce premier niveau d'analyse des processus de recherche permet de donner des éléments sur la nature des processus (relevant d'une démarche théorique, expérimentale, en algèbre, en arithmétique, en algorithmique, avec quelles visées, etc.) et de déterminer des premiers éléments comparatifs. Cependant, il ne permet pas d'analyser finement le travail effectif de recherche d'un sujet en situation de résolution de problèmes de recherche, en particulier les éléments qui permettent concrètement une « avancée » dans la recherche du problème. Pour cela, nous réalisons une seconde analyse s'appuyant sur la notion de « geste ». Dans ce paragraphe, nous développons spécifiquement cet outil méthodologique.

Dans notre recherche, la notion de « geste » de la recherche est un outil pour décrire et analyser le travail mathématique effectif d'un sujet (chercheur, élève, étudiant) dans la recherche d'un problème. D'une part, elle permet de mettre en évidence certains aspects du travail du chercheur que nos analyses épistémologiques ont identifiés : le rôle de l'intuition, le rôle de la dimension expérimentale des mathématiques et l'importance d'un travail dialectique entre la mobilisation, l'acquisition de connaissances mathématiques et le développement d'heuristiques. D'autre part, la notion de « geste » de la recherche permet de mettre en évidence la manière dont un sujet agit sur le problème afin d'avancer dans son étude. Nous identifions deux marqueurs d'avancement dans l'étude d'un problème de recherche. Nous empruntons le premier à Giroud (2011) qui considère que :

> Il y a avancée dans la recherche lorsque la conception des élèves sur le problème est modifiée. Par exemple, lorsqu'un nouveau problème est formulé, une nouvelle relation entre deux problèmes établie, un nouvel exemple produit, une nouvelle représentation utilisée, etc. (Giroud, 2011, p. 118)

Pour la recherche sur la conjecture d'Erdös-Straus, résoudre un problème auxiliaire en lien avec la conjecture, simplifier la conjecture, réduire ou limiter la recherche, le poser dans un autre cadre, etc., seront des indices de progression de la recherche. Le second marqueur d'avancée de la recherche est la production de résultats partiels sur la conjecture d'Erdös-Straus. Par exemple, trouver des valeurs de n solutions de l'équation d'Erdös-Straus, trouver des identités assurant l'existence de décompositions pour des classes de nombres ou trouver des conditions suffisantes ou nécessaires d'existence de solutions.

En appui sur l'analyse mathématique de la conjecture d'Erdös-Straus, sur les études épistémologiques de l'activité de recherche mathématique et sur les premières expérimentations en classe de terminale scientifique (Gardes, 2010), nous avons identifié sept gestes permettant d'analyser les processus de recherche mis en œuvre par les différents sujets cherchant cette conjecture :

- *réduire le problème aux nombres premiers* : c'est ramener l'étude du problème (pour tout entier n) à une forme équivalente (étudier la conjecture pour tout n premier) ;
- *désigner des objets* : c'est représenter cet objet par le langage ou un signe (définition du Petit Larousse 2001). Cela permet d'indiquer précisément la nature de ces objets ;
- *introduire un paramètre* : c'est l'introduction d'un signe, dans une modification des écritures mathématiques, sans renvoi explicite aux objets qu'il désigne ;
- *construire et questionner des exemples* : c'est la détermination d'une méthode de construction des exemples à partir de manipulations des objets mathématiques naturalisés en jeu dans le problème et un questionnement de ces différents exemples dans le but d'en dégager des informations ;
- *effectuer des contrôles locaux* : c'est vérifier les différentes étapes des manipulations et combinaisons de signes dans les écritures mathématiques ;
- *transformer l'équation initiale* : c'est une transformation qui s'effectue par équivalence de jeux d'écriture ;
- *implémenter un algorithme* : traduire un algorithme dans un langage de programmation.

Analyse d'épistémologie contemporaine sur la conjecture d'Erdös-Straus : mise à l'épreuve de la grille d'analyse

L'adjectif contemporain renvoie ici à la méthodologie particulière de cette étude. Nous avons recueilli et suivi des recherches « in statut nascendi[7] » de chercheurs (Thépault et Mizony) engagés dans l'étude de la résolution de la conjecture d'Erdös-Straus. Après un court résumé de l'analyse globale de leurs processus de recherche, nous montrons, sur trois exemples, l'analyse locale que nous avons conduite grâce à la notion de « geste ».

L'analyse globale en termes de dimensions organisatrice et opératoire montre que la recherche de Thépault s'est effectuée dans un cadre algébrique et théorique sans mise en œuvre d'une dimension expérimentale alors que la démarche de Mizony a été de nature expérimentale, en appui sur la manipulation et la construction de nombreux algorithmes. Si les chercheurs privilégient une démarche de recherche particulière, ils ne déconnectent pas leurs recherches de l'autre aspect. Thépault exploite le caractère expérimental du problème pour vérifier que l'équation a des solutions pour des familles de nombres et Mizony garde à l'esprit la quête d'une preuve théorique de la conjecture. L'analyse à une échelle plus locale à

[7] Cette expression est empruntée à Pólya : « [...] on n'a, en effet, jamais présenté tout à fait ainsi les mathématiques "in statu nascendi" (c'est-à-dire telles qu'elles sont lorsqu'on est en train de les inventer) [...] ». (Pólya, 1989, p. xv)

l'aide de la notion de « geste » confirme cette différence dans la nature des processus mis en œuvre et ceci est lié à la nature des outils mathématiques mobilisés et au rôle des objets en jeu dans leurs recherches. Nous l'illustrons, ci-dessous, via l'analyse de trois gestes de la recherche utilisés par les chercheurs.

Geste 1 : Réduire le problème aux nombres premiers

Cette réduction se fait à l'aide de deux propriétés arithmétiques.

Propriété 1 : tout nombre admet un diviseur premier.

Propriété 2 (multiplicativité) : si une propriété est vraie pour deux éléments de Z, alors elle est encore vraie pour leur produit. Ici, c'est la propriété *satisfaire à la conjecture d'Erdös-Straus, pour n entier* qui est multiplicative.

Cette réduction est le premier geste de la recherche effectué par Thépault et Mizony :

> Il est clair que si pour un n donné, il existe une solution, il existe également une solution pour tout multiple de n et que le problème se réduit à se pencher sur le cas où « n premier ». (Thépault, communications personnelles du 24 mars 2010)
>
> Si n vérifie la conjecture alors kn également, car si $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$ alors $4/kn = 1/kx + 1/ky + 1/kz$. Ainsi tout multiple d'un nombre premier vérifiant la conjecture la vérifie aussi. [...] Mais comment trouver une décomposition générique pour tout nombre premier ? (Mizony dans Aldon et al. 2010)

Dans leurs raisonnements, les chercheurs mettent en évidence le caractère multiplicatif de la propriété pour effectuer la réduction aux nombres premiers mais ne précisent pas que cela relève également de l'existence, pour tout entier, d'au moins un diviseur premier. Cependant, il est clair que ces deux connaissances sont mobilisables par les chercheurs et présentes dans leur milieu. Ce geste est important dans leurs recherches car il permet de réduire le champ de recherche de la conjecture. Pour Thépault, cela lui permet de faire une réduction à l'étude de deux classes de nombres (les nombres premiers étant congrus à 1 ou 3 modulo 4, une partition modulo 4 se réduit à l'étude de deux classes de nombres) et pour Mizony, cela constitue une avancée dans sa recherche dans la mesure où ces objets vont jouer un rôle particulier dans la suite de ses travaux. En particulier, l'étude de certains nombres premiers, les nombres premiers (non)-pythagoriciens, permettra de formuler la conjecture d'Erdös-Straus en d'autres termes et de donner ainsi une nouvelle piste de recherche.

Geste 2 : Transformer l'équation initiale

Ce geste a été primordial dans les recherches de Thépault.

> Savoir, si pour un n donné, je pouvais me servir d'une valeur auxiliaire de z me permettant de déterminer dans tous les cas, x et y entiers en fonction de n et de z. Je suis arrivé à l'équation $[(x + y)/xy = (4z - n)/zn]$, dans laquelle apparaissaient à la fois la somme S et le produit P de ces deux inconnues. (Thépault, communications personnelles du 24 mars 2010).

Ce geste semble provoqué par la volonté de formuler le problème dans un cadre qu'il connaît bien et dans lequel il sait mobiliser les objets mathématiques ainsi que leurs concepts et leurs propriétés. La transformation de l'équation initiale qu'il a effectuée va lui permettre, en passant dans un cadre algébrique, de simplifier le problème puis de trouver des résultats partiels sur la conjecture. En effet, le problème se ramène à la résolution d'une équation du second degré avec une méthode « classique » algébrique qu'il connaît bien, à savoir celle de la somme et du produit des racines d'une fonction polynôme du second degré. Il utilise ensuite cette méthode pour le traitement des nombres premiers de la forme $4k + 3$. Pour les nombres premiers de la forme $4k + 1$, il l'exploitera à nouveau mais elle demandera en amont un travail supplémentaire.

Geste 3 : Construire et questionner des exemples

Ce geste a été prépondérant et central tout au long des recherches de Mizony. En effet, sa démarche de recherche a été de nature expérimentale. Ses expériences se sont appuyées sur la construction d'exemples, c'est-à-dire la construction de décomposition de $4/n$ en somme de trois fractions égyptiennes pour certaines valeurs de n puis sur l'étude de ces différents exemples. Le rôle de ces expériences dans les recherches de Mizony est double : d'une part l'exploitation de nombreux cas particuliers permet d'effectuer des généralisations et d'autre part, l'analyse fine d'exemples clés permet de mieux comprendre les difficultés liées à la preuve de la conjecture. La construction et l'étude des exemples se sont effectuées à l'aide d'algorithmes. Ce recours à l'informatique lui permet de construire de nombreux exemples en temps limité. Or disposer de nombreux exemples est un avantage, en particulier pour la recherche de régularités. Ainsi, au sein de la résolution de la conjecture, ce geste de construction et questionnement des exemples conduit à de nombreuses avancées : approfondissement des connaissances sur le problème et en particulier des difficultés pour sa preuve, amélioration des algorithmes de décompositions et élaboration de résultats partiels sur la conjecture.

Pour résumer, la nature des principaux gestes identifiés comme moteurs dans la recherche de Thépault (réduction du problème aux nombres premiers, transformer l'équation initiale, effectuer des contrôles locaux) montre qu'il a peu travaillé sur les objets mathématiques en jeu. Il a en effet mobilisé des outils algébriques qui ne favorisent pas le recours à la manipulation des objets. Dans les procédures syntaxiques mises en œuvre, la nature des objets auxquels réfèrent les symboles n'a pas d'importance et elle peut être mise de côté. Notons cependant que Thépault ne l'oublie pas et contrôle ses procédures algébriques à l'aide de procédures sémantiques, notamment par un retour à la nature des nombres en jeu. Dans les recherches de Mizony, la place des objets mathématiques est centrale. La nature des principaux gestes identifiés comme moteurs dans ses recherches (implémenter un algorithme, désigner des objets, construire et questionner des exemples) met en évidence qu'il a travaillé en appui sur la manipulation et le questionnement de ces objets. Le fait que ses gestes soient liés et s'appellent les uns les autres dans leur réalisation montre que ce travail sur les objets a favorisé la mise en œuvre d'une démarche expérimentale, processus non linéaire mais au contraire dialectique entre expérience et théorie. Pour conclure, l'analyse des processus de recherche des deux chercheurs nous permet d'identifier deux visées de la recherche sur la conjecture d'Erdös-Straus : la quête de la vérité de la conjecture (choix de Thépault) et la recherche de décompositions effectives (choix de Mizony). Chaque visée privilégie des dimensions organisatrice et opératoire particulières et favorise l'émergence de gestes de nature différente : gestes dans l'espace combinatoire tels que la transformation de l'équation initiale, l'introduction de paramètre et les contrôles locaux pour la quête de la vérité et gestes opératoires tels que la construction et le questionnement des exemples, la désignation des objets et l'implémentation d'algorithmes pour la recherche de décompositions effectives.

Conclusion des analyses mathématique et épistémologique

Cette étude mathématique et épistémologique a permis de confirmer le potentiel de la conjecture d'Erdös-Straus pour l'objectif didactique principal que nous nous sommes fixée, à savoir, mettre les élèves dans une situation de recherche de problèmes, en contexte scolaire, proche de celle du mathématicien. Ces analyses montrent, d'une part la possibilité d'implémenter une situation de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus en classe (à partir du lycée) en prenant en compte différents aspects du travail du chercheur, et d'autre part les potentialités de ce problème pour analyser les processus de recherche mis en œuvre dans une étude de résolution de problème de recherche. Dans la partie suivante, nous présentons une situation de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus, que nous avons expérimentée dans un contexte de laboratoire avec des élèves de terminale scientifique. Nous montrons ensuite les analyses des processus de recherche mis en œuvre par les élèves dans leur étude du problème, à partir de la notion de « geste » de la recherche.

ANALYSE DIDACTIQUE

A partir des études mathématiques et épistémologiques, nous avons construit une situation didactique de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus et nous en avons fait une analyse *a priori*. Cette étude correspond à l'élaboration du modèle de milieu expérimental *a priori* (au sens de Bloch). Dans un premier temps, nous avons prévu différentes organisations didactiques et identifier plusieurs variables didactiques pour des situations d'enseignement selon différents critères : le public concerné, le contexte d'enseignement, le niveau d'enseignement, le temps disponible, etc. Dans un second temps, afin d'affiner notre analyse *a priori* de la situation créée, nous avons mené des pré-expérimentations. La mise à l'épreuve des différentes variables de la situation a pour but de tester la robustesse de la situation et de dégager des invariants mais aussi des phénomènes didactiques inattendus. La confrontation entre les séances prévues et les séances réelles nous a permis de faire un retour et d'enrichir les études mathématique, épistémologique et didactique et en particulier, d'affiner la grille d'analyse de l'activité de recherche effective d'un sujet en résolution de problèmes. Le retour des pré-expérimentations ont ainsi nourri les études théoriques. Les différentes organisations didactiques de la situation ont également pu être modifiées, pour éviter un biais ou pour pouvoir observer un phénomène particulier. Afin d'observer et d'analyser précisément l'activité de recherche effective des élèves en résolution de problèmes, nous avons choisi de mener une expérimentation de type laboratoire, c'est-à-dire hors-classe. Cette étape correspond à la confrontation à la contingence du cadre d'analyse de Bloch (2002). Le contexte de laboratoire permet de neutraliser le paramètre « classe » et ses conséquences (temps limité, insertion dans le cours de l'enseignant, nombre d'élèves) et de se focaliser sur d'autres paramètres qui méritent d'être étudiés plus en détail pour notre questionnement tels que l'influence du bagage mathématique sur la recherche, l'influence de la recherche individuelle sur la recherche collective et l'observation de l'évolution du milieu objectif des élèves. Nous avons ainsi construit un protocole expérimental long (sur sept semaines) pour dix élèves de terminale scientifique. Le scénario de cette expérimentation de type laboratoire s'est construit par des va-et-vient entre les élaborations théoriques mathématique et épistémologique et l'analyse didactique *a priori* qui s'est réalisée dans la mise à l'épreuve des pré-expérimentations. Dans cet article, nous présentons les résultats de l'analyse *a priori* de la situation didactique de recherche créée autour de la conjecture d'Erdös-Straus, la caractérisation du milieu initial des élèves puis l'expérimentation en contexte de laboratoire. Nous exposons ensuite les résultats des analyses *a posteriori* et en particulier celles concernant les processus de recherche des élèves et l'évolution du milieu.

Analyses *a priori*

Dans un premier temps, nous avons déterminé différentes procédures mathématiques qui pourraient être mises en œuvre par des élèves de terminale scientifique engagés dans l'étude de la conjecture afin d'établir des résultats partiels. Ces procédures sont nombreuses et de natures différentes. Nous les avons classées en deux catégories selon le premier geste de la recherche effectué : des procédures exploratoires qui s'effectuent à partir de la construction d'exemples et des procédures opératoires qui s'appuient sur des manipulations algébriques. Nous faisons l'hypothèse que les procédures exploratoires sont plus efficaces pour avancer dans l'étude de la conjecture et en particulier, pour la production de résultats partiels. D'une part, elles favorisent une démarche de type expérimentale en appui sur la manipulation des objets mathématiques en jeu, et d'autre part elles font appel à des connaissances mathématiques (notionnelles et heuristiques) disponibles et mobilisables par des élèves de terminale scientifique. Nous avons également relevé un lien privilégié entre les deux visées de la recherche que nous avons identifiées et la nature des procédures. Les procédures exploratoires sont associées à une étude de la conjecture par recherche de décompositions effectives alors que les procédures opératoires sont privilégiées dans la quête de la vérité de la conjecture.

Dans un second temps, nous avons affiné l'analyse *a priori* des processus de recherche des élèves en mettant à l'épreuve notre grille d'analyse dans les pré-expérimentations. L'analyse globale des processus de recherche en termes de dimensions organisatrice et opératoire montre que les élèves sont susceptibles de s'engager dans deux types de recherche : une recherche dirigée par la quête de la vérité de la conjecture, de nature algébrique et peu articulée avec le caractère expérimental du problème et une recherche privilégiant la construction de décompositions, de nature expérimentale mais peu articulée avec la phase d'élaboration d'une preuve. Même si une démarche est privilégiée par les élèves, des articulations et des interactions entre les deux types de recherche peuvent se réaliser et permettre des avancées dans l'étude de la conjecture. L'analyse à une échelle plus locale, à l'aide de la notion de « geste », a montré que cet outil est pertinent pour étudier le travail de recherche effectif des élèves et des étudiants. Il permet en effet de mettre en évidence trois éléments essentiels des processus de recherche mis en œuvre par les élèves dans l'étude de la conjecture : l'origine des avancées de la recherche, les ressorts de la dimension expérimentale et l'apport d'un travail dialectique entre la mobilisation de connaissances et le développement d'heuristiques. Notons que nous avons identifié que les gestes associés à des procédures opératoires (introduire un paramètre et implémenter un algorithme) sont moins présents dans les recherches des élèves. Nous l'expliquons par la difficulté des élèves à mobiliser certaines connaissances en algèbre, algorithmique ou programmation.

Dans un troisième temps, nous avons déterminé une organisation didactique et un scénario possible pour mettre en œuvre la situation en classe. Notre objectif étant de placer les élèves ou étudiants dans une position relativement proche de celle d'un chercheur en mathématiques, l'organisation didactique de la situation autour de la conjecture d'Erdös-Straus s'est appuyée sur l'analyse épistémologique de l'activité de recherche des mathématiciens. Plusieurs différences entre les activités de recherche du mathématicien et les activités de recherche des élèves ou étudiants en contexte scolaire montrent les limites de cette référence au travail du chercheur professionnel. On peut citer par exemple la durée d'une recherche, le choix d'un objet de recherche ou la raison sociale du chercheur, dont le métier est de chercher. Cependant, de nombreuses modalités du travail des chercheurs peuvent être approchées et une organisation didactique spécifique peut permettre sous certaines conditions, la reproduction de la position d'un chercheur en situation de résolution de problèmes de recherche. En appui sur notre analyse épistémologique de l'activité de recherche mathématique, nous présentons ces différents aspects du travail du mathématicien et les choix qu'ils engendrent pour déterminer l'organisation didactique de la situation autour de la conjecture d'Erdös-Straus.

Les aspects du travail du chercheur sur lesquels nous nous sommes appuyée pour élaborer l'organisation didactique d'une situation de recherche autour de la conjecture sont les suivants : le rôle du temps, l'importance et les modalités des échanges entre pairs, l'importance de la documentation, l'importance du positionnement par rapport aux travaux antérieurs et l'aspect jubilatoire de la création. Nous avons alors fait les choix suivants pour l'organisation didactique :

- proposer une recherche du problème sur un temps long, avec plusieurs séances de recherche de deux heures, afin de prendre en compte le facteur « temps ouvert » ;
- construire un scénario composé de différentes phases de recherche (phase de recherche individuelle, phases de recherche collective par groupes, phase de production d'affiches, phases de mises en commun et de débat, phase de synthèse) afin de prendre en compte la dimension sociale de l'activité de recherche sous toutes ses formes d'une part et d'approcher les différentes phases du processus de création mathématique d'autre part ;
- permettre l'accès à tout type de documentation afin d'approcher l'importance du

recours à la documentation dans une recherche mathématique ;

- ne pas faire travailler les élèves sur des travaux existants sur la conjecture ;
- mettre en place, pour les élèves, des outils méthodologiques pour assurer le suivi de leur recherche : mémoire de leurs résultats, conservation de traces écrites, synthèse des travaux, etc.

Nous avons ensuite déterminé huit variables didactiques pour une situation de recherche autour de la conjecture d'Erdös-Straus. Le choix des variables didactiques et de leur valeur est déterminant pour mettre en adéquation les connaissances et outils mathématiques utiles à l'engagement dans le problème avec le répertoire des élèves. Nous listons ci-dessous ces variables avec entre parenthèses les différentes valeurs qu'elles peuvent prendre.

V1 - Statut épistémique du problème (indiqué aux élèves ou non indiqué aux élèves)

V2 - Lettres pour désigner les solutions (a, b, c ou x, y, z)

V3 - Syntaxe de l'énoncé

V3a : aspects prédicatif et opératoire (syntaxe avec forme prédicative, syntaxe avec forme opératoire, syntaxe hybride articulant les aspects prédicatif et opératoire)

V3b : forme interrogative ou forme affirmative

V4 - Indication sur le domaine d'exploration

V4a : indication sur le domaine d'exploration de n (n entier naturel, n entier naturel non nul et n supérieur ou égal à 2)

V4b : indication sur le domaine d'exploration de a, b, c (a, b, c entiers naturels ou a, b, c entiers naturels non nuls)

V5 - Précision sur les solutions (préciser ou non que a, b, c sont non nécessairement distincts)

V6 - Séance préalable (présence d'une séance préalable sur les fractions unitaires ou non)

V7 - Outils technologiques (disponibilité d'une calculatrice, disponibilité d'un ordinateur)

V8 - Aides écrites (introduite dans le milieu des élèves ou non)

Le choix des variables didactiques pour la situation mise en œuvre sont les suivants :

Variable	**Choix des valeurs**	**Justification**
V1	Indiqué aux élèves	Savoir que ce problème est toujours une conjecture peut être une motivation (relever un défi) et les élèves sont dans une position proche de celle du chercheur. Au vu du niveau en mathématiques des élèves, de leur pratique et de leur culture mathématique, ce choix ne constitue *a priori* pas un obstacle à l'engagement dans le problème et à la dévolution de la recherche.
V2	a, b, c	Ce choix permet de mettre en évidence la nature des nombres (ici des entiers).
V3a **V3b**	Hybride (prédicative, opératoire) Affirmatif	Nous faisons l'hypothèse que cette formulation favorise un engagement dans la recherche du problème par l'action et oriente vers une recherche constructive de solutions.
V4a **V4b**	n supérieur ou égal à 2 a, b, c entiers naturels non nuls	Après avoir testé les différentes valeurs possibles de cette variable, nous avons retenu celle qui posait le moins de problème aux élèves pour comprendre l'énoncé.
V5	Non précisé	Nous voulons laisser l'initiative aux élèves de se questionner et de faire un choix sur l'égalité ou non de a, b et c.
V6	Non	Pour ces élèves, un travail préalable sur les fractions en jeu ne paraît pas nécessaire.

V7a **V7b**	Oui (de type TI-89) Oui (tout logiciel autorisé)	L'utilisation d'une calculatrice et d'un ordinateur permet aux élèves de s'engager rapidement et facilement par l'action dans la recherche du problème. Certaines fonctions (calcul fractionnaire, programmation) favorisent l'exploitation du caractère expérimental du problème et la recherche de solutions constructives.
V8	Non	Pour ces élèves, nous faisons l'hypothèse que des aides ne sont pas nécessaires.

Caractérisation du milieu initial

Nous identifions cinq éléments qui caractérisent un milieu favorisant une dévolution de la recherche sur un temps long et la production de résultats partiels sur la conjecture :

- des connaissances mathématiques notionnelles (par exemple en arithmétique, notions de multiple, critères de divisibilité, parité, nombre premier, congruences, etc.) et heuristiques (par exemple sur la preuve, sur l'existence et la valeur de résultats partiels, etc.) ;
- une pratique distanciée de l'activité de recherche de problèmes (qui comprend d'une part une culture mathématique et d'autre part une pratique régulière et fréquente d'activités de recherche mathématique) ;
- une organisation didactique spécifique prenant en compte divers aspects du travail du mathématicien (temps ouvert, accès à la documentation, diversité des échanges, etc.) ;
- un énoncé du problème incitant à l'action ;
- la disponibilité de calculatrices programmables et d'ordinateurs.

Expérimentation en contexte de laboratoire

L'expérimentation s'est déroulée dans un lycée de Saône et Loire, classé « Ambition réussite » par le Ministère de l'Education Nationale. Dans ce cadre, le lycée a mis en place, pour les élèves de terminale scientifique volontaires, un parcours « Excellence » en mathématiques. Dix élèves, suivant par ailleurs l'enseignement de spécialité Mathématiques, se sont inscrits pour suivre ce parcours. C'est dans ce parcours que notre expérimentation a eu lieu. Ce dispositif leur offre deux heures hebdomadaires supplémentaires de mathématiques, dispensées par leur enseignant de spécialité. Ce dernier est expérimenté et a un DEA (diplôme d'études approfondies) en didactique des mathématiques. Il s'est particulièrement intéressé, dans ses recherches, à la mise en place de problèmes de recherche en classe ordinaire et à ses effets à long terme. Le contrat didactique qu'il instaure au sein de sa classe, dans les cours de spécialité et dans le parcours « Excellence », inclut ainsi une forte dimension liée à l'activité de recherche mathématique. Dans ce contexte spécifique, les différents éléments caractéristiques (cf. paragraphe précédent) d'un milieu favorisant une dévolution du problème sur un temps long et des avancées significatives dans la recherche sont *a priori* présents dans le milieu initial de ces élèves. En suivant les choix effectués pour l'organisation didactique, nous avons élaboré un scénario composé de sept séances de deux heures : une séance de recherche individuelle, quatre séances de recherche collective, une séance de mise en commun et débat et une séance d'institutionnalisation et synthèse. Les élèves avaient à disposition tout type de documents, des calculatrices programmables et des ordinateurs. Notons que nous avons limité l'accès à Internet aux séances de recherche en classe.

Nous avons recueilli quatre types de données pour chacun des groupes[8] :

- les traces écrites des recherches de chaque élève consignées dans un cahier de bord personnel ;
- les enregistrements audio et vidéo des échanges au sein du groupe pour chaque séance;
- les productions finales des groupes (affiches et démonstrations des résultats) ;
- les réponses de chaque élève à un questionnaire[9].

Les quatre types de données recueillies sont complémentaires pour mener l'analyse de l'activité effective des élèves en situation de recherche sur la conjecture d'Erdös-Straus. Les productions écrites des élèves (cahiers de bord et productions finales) ne sont pas suffisantes pour analyser les processus de recherche dans la mesure où elles ne rendent pas visible l'aspect non linéaire de la recherche des élèves, ni le cheminement de leurs idées ni la construction de leurs raisonnements. L'analyse des échanges entre les élèves permet alors d'avoir accès à leurs processus de recherche effectifs lors de l'étude du problème et notamment, aux aspects dialectiques de la recherche mathématique, que nous avons identifiés dans nos analyses mathématique et épistémologique et dans l'analyse *a priori*. Les cahiers de bord et les productions finales constituent alors un support essentiel pour comprendre les pistes de recherche étudiées, les expressions mathématiques examinées, les conjectures formulées ou les résultats mentionnés par les élèves dans leurs interactions.

Analyses *a posteriori*

Dans ce paragraphe, nous effectuons une mise en perspective des analyses *a posteriori* des travaux des élèves avec nos analyses *a priori* selon trois points : dimensions organisatrice et opératoire, gestes de la recherche et milieu.

Dimensions organisatrice et opératoire

Rappelons que nos analyses *a priori* mathématiques et épistémologiques de la conjecture d'Erdös-Straus nous ont permis d'identifier deux visées de la recherche pour étudier le problème : la quête de la vérité de la conjecture et la recherche de décompositions effectives. Nos analyses *a posteriori* de la situation créée autour du problème ont montré, d'une part que les deux visées apparaissent dans les travaux des élèves, et d'autre part que les recherches des élèves s'inscrivent dans une visée particulière pour explorer le problème (ce qui n'exclut pas d'éventuelles interactions ou articulations des deux visées). Le groupe 2 a débuté ses recherches en choisissant comme visée la quête de la vérité. Cette direction a guidé l'ensemble des recherches du groupe tout au long des séances. Lors des synthèses et des mises en commun des travaux, ils ont clairement expliqué avoir choisi des pistes de recherche leur permettant *a priori* d'étudier la vérité de la conjecture. Au contraire, les groupes 1 et 3 n'ont pas privilégié une direction particulière de recherche, elle s'est révélée au cours de leurs recherches. Les élèves ont débuté l'étude de la conjecture par l'exploitation de procédures exploratoires et se révélant productives en termes de résultats partiels, ils ont choisi de continuer à les exploiter. Cela les a conduits à une étude de la conjecture d'Erdös-Straus par recherche de décompositions effectives pour des valeurs de n données. Ces analyses mettent donc en évidence un nouveau phénomène, non relevé dans les analyses *a priori* : soit le choix d'une visée de la recherche s'effectue dès le début de l'étude du problème, soit il se détermine progressivement, au cours des recherches, en fonction des procédures exploitées. Ceci semble lié à la perception qu'ont les élèves de l'étude de la conjecture à leur niveau : pour les élèves du groupe 2, il s'agit de déterminer des conditions d'existence de solutions et pour les élèves

[8] Les dix élèves ont été répartis en trois groupes : deux groupes de 3 élèves et un groupe de 4 élèves.
[9] Ce questionnaire portait sur leur vécu de cette expérimentation de recherche d'un problème non résolu sur un temps long.

des groupes 1 et 3, il s'agit de déterminer des classes de nombres pour lesquelles l'équation d'Erdös-Straus a des solutions.

L'analyse des processus de recherche en termes de dimensions organisatrice et opératoire met également en évidence la nature différente des démarches de recherche mises en œuvre par le groupe 2 d'une part, et par les groupes 1 et 3 d'autre part :

- une recherche dirigée par la quête de la vérité de la conjecture, de nature algébrique et peu articulée avec le caractère expérimental du problème (groupe 2) ;
- une recherche privilégiant la construction de décompositions, de nature expérimentale, mais où l'étape d'élaboration de preuves peut être difficile à effectuer (groupes 1 et 3).

Dans nos analyses *a priori*, nous avions relevé que des articulations entre ces deux types de démarche pouvaient apparaître dans les recherches des élèves. En effet, privilégier une visée de la recherche n'exclut pas la mise en œuvre de procédures associées à l'autre visée. Nous avons relevé des articulations entre une recherche de nature algébrique et une recherche de nature expérimentale dans les travaux du groupe 1. En revanche, les groupes 2 et 3 ont exploité les deux types de procédures (exploratoire et opératoire) mais en passant de l'un à l'autre, sans les articuler. Nous ajoutons que cette expérimentation a mis en évidence une autre caractéristique des recherches selon la visée choisie. Une recherche dirigée par la quête de la vérité entraîne les élèves à mener une réflexion sur la nature de l'activité mathématique et à se poser de nombreuses questions métamathématiques sur les raisonnements ou le développement des mathématiques. Une recherche de type expérimental favorise davantage les avancées en termes de production de résultats partiels sur la conjecture, mais nous avons relevé que les élèves peuvent éprouver des difficultés à passer à l'étape de l'élaboration de preuves, même lorsque la nécessité de la preuve est reconnue. Ceci fait écho aux travaux de Grenier et Tanguay (2008) sur les relations entre les activités de définition, construction et preuves en géométrie dans l'espace. Enfin, notons que dans leur recherche du problème, les trois groupes ont travaillé les aspects dialectiques entre la mobilisation de connaissances mathématiques et le développement d'heuristiques.

Gestes de la recherche

Dans cette partie, nous donnons les résultats de l'analyse des processus de recherche des élèves effectuée en termes de gestes de la recherche. Nous détaillons l'émergence et les effets dans les recherches des élèves de trois gestes en particulier : réduire le problème aux nombres premiers, transformer l'équation initiale et construire et questionner des exemples.

Geste 1 : réduire le problème aux nombres premiers

Ce geste est effectué par les élèves mais ce n'est pas le premier geste réalisé lors de la recherche. Les élèves n'utilisent pas directement les propriétés d'arithmétique sous-jacentes même si ce sont des connaissances disponibles. Pour les rendre mobilisables, le recours à la construction et au questionnement des exemples semble nécessaire. Ce geste de la recherche est un construit de leur recherche, grâce à des allers et retours entre l'exploitation des exemples et la recherche de régularités pour élaborer des propriétés théoriques sur ces objets. De ce point de vue, l'émergence de ce geste dans la recherche des chercheurs et dans celle des élèves est différente. Cependant, nous avons relevé une similarité entre les mathématiciens et les élèves quant à l'explicitation de ce geste : ils évoquent la propriété de multiplicativité (admise ou démontrée) mais ils ne mentionnent pas le théorème fondamental de l'arithmétique. Le recours à ce théorème semble se faire implicitement. Pour les élèves, nous faisons l'hypothèse que cela peut dissimuler une difficulté à l'énoncer et à le mobiliser. Dans les groupes 1 et 3, l'émergence de la réduction du problème aux nombres premiers s'est réalisée dans un système de gestes, en interaction avec d'autres gestes de la recherche : la désignation des objets et la construction et le questionnement des exemples. La réduction du problème aux nombres premiers a conduit les élèves du groupe 1 à effectuer une disjonction de cas modulo 4 et à désigner un nombre premier selon sa congruence modulo 4. Cela leur a permis d'avancer dans la construction de leur méthode par élimination de cas. Dans le groupe 3, ce geste de la recherche a favorisé la mise en œuvre d'une démarche de type expérimental. Ils ont en effet élaboré leur méthode de décomposition en étudiant tous les nombres premiers inférieurs à 300. Ce geste tient un rôle central dans les recherches des élèves dans la mesure où il permet des avancées, telles que la formulation de conjectures ou l'écriture d'identités générales et l'élaboration d'éléments de preuves.

Geste 2 : transformer l'équation initiale

Le geste de transformation de l'équation initiale apparaît assez spontanément dans la recherche des élèves. La visée de la quête de la vérité de la conjecture est un élément favorisant l'émergence de ce geste. Il est en effet associé à une étude de la conjecture dans un cadre général, par exploitation de procédures opératoires. Dans ce cas, sa réalisation et son exploitation sont favorisées par la mobilisation de certaines connaissances mathématiques notionnelles et heuristiques. Les avancées de la recherche sont la production de résultats partiels mais surtout, un travail sur les heuristiques et une réflexion de type métamathématique. Nous avons relevé, dans une recherche, l'utilisation de ce geste en lien avec l'exploitation du caractère expérimental du problème (faire des essais sur des valeurs de n) mais généralement, au sein de procédures exploratoires, les élèves ont peu recours à ce geste de la recherche. Une des raisons est qu'il n'est pas particulièrement porteur d'une dialectique entre manipulation des objets mathématiques en jeu et élaboration d'éléments théoriques.

Geste 3 : construire et questionner des exemples

Le geste de construction et questionnement des exemples émerge dans la majorité des travaux de recherche des élèves sur la conjecture d'Erdös-Straus. Dans les recherches individuelles, nous l'avons relevé dans 8 recherches sur 10. Il émerge, soit comme premier geste de la recherche dans le but de déterminer des régularités à partir de plusieurs exemples, soit à la suite de l'abandon d'une piste de recherche algébrique ou pour vérifier des manipulations algébriques. Dans les recherches collectives, ce geste a particulièrement été porteur dans la construction des méthodes de décomposition et d'élimination de cas au sein des groupes 1 et 3. Dans le groupe 1, les élèves ont élaboré leur méthode d'élimination des cas à partir de la valeur de la fraction unitaire inférieure la plus proche de $4/n$ (à savoir $1/y = 1/E(n/4\ )+1)$, à partir du questionnement de trois exemples (donnés par le groupe 3 lors de la mise en commun : $n = 23$; $n = 29$ et $n = 457$) et à partir de la construction et de l'étude de deux exemples ($n = 461$ et l'exemple crucial $n = 4513$). Le geste de construction et questionnement des exemples joue un rôle central dans leur démarche de recherche : il favorise les allers et retours entre la manipulation des exemples, la recherche de régularités et l'écriture des expressions littérales pour rendre compte des propriétés de ces objets. Notons que l'étude des exemples comme produits finis (ceux donnés par le groupe 3) ne suffit pas aux élèves pour élaborer les éléments théoriques de leur méthode. Un recours au geste de construction et questionnement de nouveaux exemples (dont un exemple crucial) semble nécessaire. Dans le groupe 3, les élèves ont construit leur méthode de décompositions à partir de la construction, puis de l'étude des décompositions de $4/n$ pour tout nombre n premier inférieur à 300. Ce geste de la recherche a émergé pour deux raisons : d'une part les élèves cherchent à déterminer des régularités pour généraliser leurs procédés de décomposition, et d'autre part ils veulent étudier en détail les cas problématiques. Il favorise alors la mise en œuvre d'une démarche de type expérimental entre la manipulation de nombreux exemples, l'étude de cas particuliers, la recherche de régularités et la détermination de règles générales pour décomposer certaines classes de nombres. Leur utilisation de ce geste est similaire à celle de Mizony dans ses recherches sur la conjecture. La différence est dans la construction des exemples, « à la main » pour les élèves et à l'aide d'algorithmes pour le chercheur. Nous noterons également que ce geste de la recherche s'effectue en lien avec les gestes de désignation des objets et de contrôles locaux, favorisant également les interactions entre les expériences et l'élaboration d'éléments théoriques, comme nous l'avions relevé dans les recherches de Mizony.

Ces analyses concernant les gestes de la recherche ont mis en évidence que cet outil est pertinent pour étudier la question de la transposition du travail des chercheurs : les gestes de la recherche effectués par les élèves dans l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus sont similaires à ceux des mathématiciens, ils émergent au sein de démarches de même nature, en appui sur les connaissances mathématiques sous-jacentes, et permettent des avancées, notamment en termes de production de résultats partiels. La notion de « geste » de la recherche permet de prendre en compte les aspects dialectiques de l'activité de recherche entre la mobilisation, l'acquisition de connaissances mathématiques et le développement d'heuristiques.

Milieu

L'analyse du milieu objectif des élèves montre que les éléments, identifiés pour caractériser un milieu antagoniste de type expérimental favorisant la dévolution de la recherche sur un temps long et des avancées sur le problème, sont producteurs des effets escomptés. Le milieu que nous avons élaboré est favorable pour placer les élèves dans une réelle position de chercheur sur l'étude de la conjecture d'Erdös-Straus. Nous avons particulièrement mis en évidence l'importance des connaissances mathématiques, de la pratique distanciée et régulière d'une activité de recherche de problèmes et du temps long de la recherche. Ces éléments ont permis aux élèves de vivre les différentes phases du processus de découverte mathématique (décrit par de nombreux mathématiciens) comme en témoigne cette citation d'élève :

> [Que] cette activité se vit, on y pense sans cesse quand on a le temps et des fois, l'idée vient d'où on ne s'y attend pas.

Ils ont également pu approcher divers aspects de l'activité de recherche experte (rôle du temps, différentes modalités d'échange, appropriation du travail des pairs), s'engager dans l'étude approfondie d'une piste de recherche, et pour certains, mettre en œuvre une démarche expérimentale, avoir une réflexion d'ordre métamathématique et produire plusieurs résultats partiels sur le problème.

Conclusion

Les analyses didactiques ont mis en évidence la viabilité de la situation didactique de recherche créée autour de la conjecture d'Erdös-Straus et ses diverses potentialités dans le travail des élèves : la richesse des procédures mises en œuvre, un travail effectif de la dialectique entre les connaissances mathématiques et les heuristiques mobilisées, et selon les groupes, une mise en œuvre de démarches de type expérimental, l'approfondissement de connaissances mathématiques notionnelles et une acquisition d'heuristiques expertes de recherche de problème non résolu. Nous avons également montré que le milieu construit est pertinent pour faire vivre aux élèves une authentique situation de recherche et qu'une certaine transposition du travail du mathématicien est effective.

RESULTATS ET PERSPECTIVES

Dans notre recherche, nous nous sommes attachée à construire des outils pour décrire le travail des mathématiciens, et pour analyser les processus de recherche mis en œuvre au cours de la résolution d'un problème de recherche. Pour cela, nous avons développé la notion de

« geste » de la recherche, qui permet de prendre en compte différents aspects de l’activité de recherche mathématique, notamment sa dimension active et ses aspects dialectiques entre la mobilisation, l’acquisition des connaissances et le développement d’heuristiques. De plus, elle permet de mettre en évidence les ressorts de la dimension expérimentale, dans le cadre de la résolution de problèmes de recherche, et plus généralement pour l’apprentissage des mathématiques. En accord avec Dias (2008) et l’équipe DREAM (Aldon et al., 2010), nous faisons en effet l’hypothèse que le recours à la dimension expérimentale participe à la construction des connaissances mathématiques. Nous avons ensuite élaboré une situation de recherche pour des élèves et des étudiants, les plaçant dans une position proche de celle d’un chercheur en mathématique. Pour cela, nous avons identifié des éléments qui caractérisent un milieu favorisant une dévolution de la recherche et la production de résultats partiels sur le problème. La mise en œuvre d’une expérimentation en contexte de laboratoire a confirmé la consistance de la situation pour placer les élèves en réelle situation de résolution de problèmes de recherche. D’autre part, nos analyses montrent que la notion de geste est un outil pertinent à intégrer dans les analyses *a priori* d'une situation didactique de recherche. Cependant, cette notion reste à développer sur le plan didactique, en particulier pour analyser plus en détail la question de la transposition du travail du mathématicien. Enfin, dans notre recherche, nous avons fait le choix de construire et réaliser une ingénierie de recherche pour conduire nos analyses didactiques sur l’étude des processus de recherche d’élèves en situation de résolution de problèmes de recherche. Un des enjeux serait ensuite de passer d’une ingénierie de recherche à une ingénierie pour la classe.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ALDON, G., CAHUET, P.-Y., DURAND-GUERRIER, V., FRONT, M., KRIEGER, D., MIZONY, M., & TARDY, C. (2010). *Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l’école*. Cédérom INRP.

ARSAC, G., GERMAIN, G., & MANTE, M. (1988). *Problème ouvert et situation-problème*. IREM de Lyon.

ARSAC, G., & MANTE, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. SCÉRÉN-CRDP de l’Académie de Lyon.

BAILLY, F., & LONGO, G. (2003). *Incomplétude et incertitude en Mathématiques et en Physique*. Consulté sur http://math.univ-lyon1.fr/irem/IMG/pdf/arsac.pdf.

BATTIE, V. (2003). *Spécificités et potentialités de l’arithmétique élémentaire pour l’apprentissage du raisonnement mathématique*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.

BLOCH, I. (2002). Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e école d’été de didactique des mathématiques. Corps, 21-30 août 2001* (p. 125-139). Grenoble : La Pensée Sauvage éditions.

CASSOU-NOGUES, P. (2001). *De l’expérience mathématique. Essai sur la philisophie des sciences de J. Cavaillès*. Paris : VRIN.

CAVAILLES, J. (1938). *Méthode axiomatique et Formalisme*. Paris : Hermann.

CAVAILLES, J. (1981). *Méthode axiomatique et Formalisme*. Paris : Hermann, rééd.

CAVAILLES, J. (1994). *Œuvres complètes de philosophie des sciences*. Paris : Hermann.

CHATELET, G. (1993). *Les enjeux du mobile. Mathématique, physique, philosophie*. Paris : Editions du Seuil.

CONNE, F. (1999). Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne. *Le cognitif en didactique des mathématiques*, 31-69.

DIAS, T. (2008). *La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l’enseignement et l’apprentissage*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1.

DUCHET, P. (1996). *De la recherche à la formation : MATh.en.JEANS, chercher, comprendre, aimer les mathématiques*. En ligne. Consulté sur

http://mapage.noos.fr/duchet/duchet_travaux_fichiers/pub_dida/rechform.pdf.
ELSHOLTZ, C., & TAO, T. (2011). Counting the number of solutions to the Erdos-Straus equation on unit fractions. *Arxiv preprint ArXiv :1107.1010.*
ERDÖS, P. (1963). *Quelques problèmes de théorie des nombres (N°6)*. Monographies de L'Enseignement Mathématique.
FEHR, H. (1908). *Enquête de l'Enseignement Mathématique sur la méthode de travail des mathématiciens*. Gauthier-Villars.
GARDES, M.-L. (2010). Démarche d'investigation en arithmétique, entre essais et conjectures : Un exemple en classe de terminale scientifique. *Petit x 83*, 51-78.
GARDES, M.-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres*. Thèse de doctorat, Université Lyon 1.
GIROUD, N. (2011). *Etude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourrier Grenoble.
GRENIER, D. (2012). La démarche d'investigation dans les situations de recherche pour la classe (SiRC). In D. J.-L. & C. S. (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle. Actes du colloque EMF 2012*. Genève.
GRENIER, D., & PAYAN, C. (2003). Situations de recherche en « classe », essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Cahiers du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques*.
GRENIER, D., & TANGUAY, D. (2008). L'angle dièdre, notion incontournable dans les constructions pratique et théorique des polyèdres réguliers. *Petit x 78*, 26-52.
HADAMARD, J. (1993). *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine Mathématique*. Sceaux : Les Grands Classiques Gauthiers-Villars. Editions Jacques Gabay.
LAKATOS, I. (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge University Press.
MIZONY, M. (2010). Sur la conjecture d'Erdös-Straus. *Mathematice 18*. Consulté sur http://revue.sesamath.net/spip.php?article262.
MORDELL, L. (1969). *Diophantine equations (Vol. 30)*. Academic Press.
NIMIER, J. (1989). *Entretiens avec des mathématiciens : l'heuristique mathématique*. IREM de Lyon.
POINCARE, H. (1908). L'invention Mathématique. *Bulletin de l'Institut Général Psychologique 3*, 175-187.
PÓLYA, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.
PÓLYA, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton University Press.
SCHINZEL, A. (2000). On sums of three unit fractions with polynomial denominators. *Funct. Approx. Comment. Math. 28*, 187-194.
SCHOENFELD, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic press.
SWETT, A. (1999). *The erdös-straus conjecture*. Consulté sur http://math.uindy.edu/swett/esc.htm.
TISSERON, C. (1998). *Différents aspects du travail du chercheur*. Consulté sur http://sierra.univ-lyon1.fr/irem/CF/epis/cadre1.htm.
VILLANI, C. (2012). *Théorème vivant*. Paris : Grasset.
YAMAMOTO, K. (1965). On the Diophantine equation $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A 19*, 37-47.