

REFLEXIONS D'ORDRE EPISTEMOLOGIQUE AUTOUR DE L'ETUDE DE LA MULTIPLICATION POUR DIFFERENTS ENSEMBLES DE NOMBRES DANS UN CONTEXTE DE GEOMETRISATION

Raquel I. **BARRERA CURIN**

Université du Québec à Montréal

barrera.raquel@uqam.ca

Résumé

Dans le cadre de mon travail de thèse de doctorat, j'ai voulu déterminer et analyser des parcours d'individus au cœur d'un processus de mise en relation entre multiplication et géométrie. Ces analyses ont été effectuées sous le regard de l'approche théorique des Espaces de Travail Mathématique et des éléments associés à la Médiation Sémiotique. L'importance accordée aux processus de médiations sémiotique et sociale enrichit le regard porté sur le travail mathématique de la classe. Des réflexions d'ordre épistémologique m'invitent à porter une attention particulière sur l'appropriation que les élèves font de l'espace de travail mathématique mettant en valeur une multiplicité d'actions qui révèlent sa réinvention permanente.

Mots clés

Espaces de Travail Mathématiques, Médiation Sémiotique, émergence des mathématiques, faire des mathématiques, appropriation d'un espace de travail mathématique, réinvention du travail mathématique.

INTRODUCTION

Dans cette communication je donne un aperçu du travail de recherche théorique et expérimentale réalisé dans le cadre de ma thèse de doctorat ainsi que de certaines réflexions d'ordre épistémologique sur le travail mathématique des élèves. Mon travail de thèse porte sur une étude de la multiplication pour différents ensembles de nombres dans un contexte de géométrisation et de médiations sémiotique et sociale (Radford, 2004 ; Sfard, 2008). Dans ce contexte, nous avons voulu déterminer et analyser le travail mathématique des élèves pour ainsi rendre compte de leur parcours tout au long d'une séquence d'apprentissage proposée par l'enseignant. Plus spécifiquement, nous cherchions à identifier et à différencier des interactions entre les composantes de l'espace de travail mathématique personnel des élèves rendant compte d'une compréhension géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres. Les analyses de ce que nous avons appelé des *parcours d'individus*, ont été effectuées sous le regard de l'approche théorique des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011 ; 2014) et des éléments associés à la Médiation Sémiotique (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). Le terme *individu* représente un groupe d'élèves. Il a été utilisé puisque nous avons donné à chaque groupe le statut d'une entité. Ainsi, les parcours de chaque entité avaient pour but de rendre compte d'expériences de médiation, de collaboration

et d'une appropriation spécifique de l'espace de travail mathématique qui leur a été proposé. Dans un premier temps, je présente dans cet article une brève synthèse de l'articulation théorique développée dans le cadre de ma thèse. Dans un deuxième temps, je donne à titre d'exemple, des extraits de deux des parcours étudiés. Enfin, ouvrant sur une réflexion d'ordre épistémologique sur le travail mathématique des élèves, je propose de porter une attention particulière à l'espace de travail mathématique *approprié* par l'élève, appropriation qui résulte du pouvoir générateur des mathématiques et qui rend compte d'une multiplicité d'actions qui révèlent une réinvention permanente de l'espace de travail mathématique.

POUR QUOI PARLER D'UN ESPACE DE TRAVAIL MATHEMATIQUE ?

L'approche théorique des Espaces de Travail Mathématique (ETM) (Kuzniak, 2011) m'a particulièrement intéressée puisqu'il cherche à étudier des éléments épistémologiques et cognitifs impliqués dans tout travail mathématique²⁷. Dans ce cadre, le travail mathématique est organisé et d'une certaine façon contextualisé par l'interaction de plusieurs composantes qui en sont représentatives. Pour fonctionner, les ETM supposent une mise en réseau de ses composantes à partir de différentes genèses qui peuvent être de nature *sémiotique*, *instrumentale* et *discursive* (Annexe 1). Cette mise en réseau se produit grâce à l'appropriation que l'élève fera de l'ETM qui lui a été proposé par l'enseignant. De ce fait, il existe une diversité d'espaces de travail dans une classe de mathématiques, à l'intérieur desquels l'articulation des composantes peut être de nature différente. D'un point de vue classique, le départ de l'articulation de composantes dans un ETM se produirait au niveau épistémologique. Notre analyse de l'approche théorique de l'Espace de Travail Mathématique nous a permis de proposer une entrée par le plan cognitif, laquelle enrichirait le regard en ce qu'elle permet une ouverture à des nouvelles composantes. Ces nouvelles composantes favoriseraient une lecture alternative du travail mathématique des élèves quand ce travail porte particulièrement sur un processus de recherche mathématique. Je me réfère, par exemple, à la mise en relation entre la visualisation en géométrie d'une notion mathématique et sa représentation non géométrique. La visualisation pourrait ainsi être vue comme le résultat d'une interprétation métaphorique du concept mathématique en jeu (Lakoff & Núñez, 2000 ; Presmeg, 1997 ; Sfard, 1994 ; Soto-Andrade, 2011), laquelle donne du sens à d'autres représentations du même concept. De ce fait, les métaphores viennent aussi habiter les ETM des élèves comme des points de référence (Kilhamn, 2011), et elles peuvent jouer un rôle important dans la mise en fonctionnement des autres composantes à travers lesquelles les élèves font la rencontre des mathématiques.

L'ESPACE DE TRAVAIL MATHEMATIQUE ET LA MEDIATION SEMIOTIQUE

Selon Vygotsky, dont la théorie socioculturelle est un des fondements de la Théorie de la Médiation Sémiotique (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008), il y a une relation inhérente entre l'activité interne et l'activité externe des individus. L'internalisation de fonctions par lesquelles l'activité – en contexte social – se réalise permet de caractériser l'apprentissage, comme le soulignent Wertsch et Addison Stone (1995) :

“internalization is viewed as part of a larger picture concerned with how consciousness emerges out of human social life. The overall developmental scheme begins with external social activity and ends with internal individual activity. Vygotsky's account of semiotic mechanisms provide the bridge that connects the external with the internal and the social with the individual”. (Wertsch & Addison Stone, 1995, p. 164)

Les signes, en tant que médiateurs dans le processus complexe visant la formation d'un concept (Vygotsky, 1934/1997) acquièrent un statut privilégié puisqu'ils favorisent l'interaction entre différents éléments lors de la rencontre des mathématiques. Par exemple,

²⁷ Pour plus de références voir Kuzniak, 2011.

notamment dans le cas de notre recherche, entre la représentation et la visualisation d'une notion mathématique.

Dans ce cadre, Noss et Hoyles (1996) discutent l'idée de « signes situés », lesquels deviendraient constitutifs du processus de conceptualisation des mathématiques vécu par les élèves. Ces signes, peuvent ainsi devenir des médiateurs visuels « defined as providers of the images with which discursants identify the object of the talk and coordinate their communication » (Sfard, 2008, p. 147). Le rôle essentiel ainsi attribué à la médiation sémiotique, au niveau épistémologique et didactique, nous a conduits à situer l'Espace de Travail Mathématique dans un contexte socioculturel de l'apprentissage. Dans ce contexte, les dimensions sociale et sémiotique s'articulent dans la zone de développement proximale définie par Vygotsky (1993/1997). C'est ainsi qu'un autre regard théorique est venu compléter l'étude de certains enjeux propres au travail mathématique des élèves lors qu'ils résolvent de problèmes en contexte de collaboration. Nous avons rendu explicite la présence d'un processus de médiation sémiotique dans un contexte d'interactions sociales, au cœur de l'Espace de Travail Mathématique. Tel que présenté dans la figure 2, le processus de médiation sémiotique viendrait faire émerger les différentes genèses qui articulent les deux plans de l'ETM, favorisant, par exemple, la mise en relation entre représentation et visualisation ou entre métaphores et référentiel théorique. Dans le cas particulier de notre étude, les médiations sémiotique et sociale favoriseraient l'évolution d'un *signe-artefact* (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) et la production d'un processus de géométrisation conduisant vers la compréhension géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres. Les notions de signe-artefact et de géométrisation seront présentées dans la section suivante.

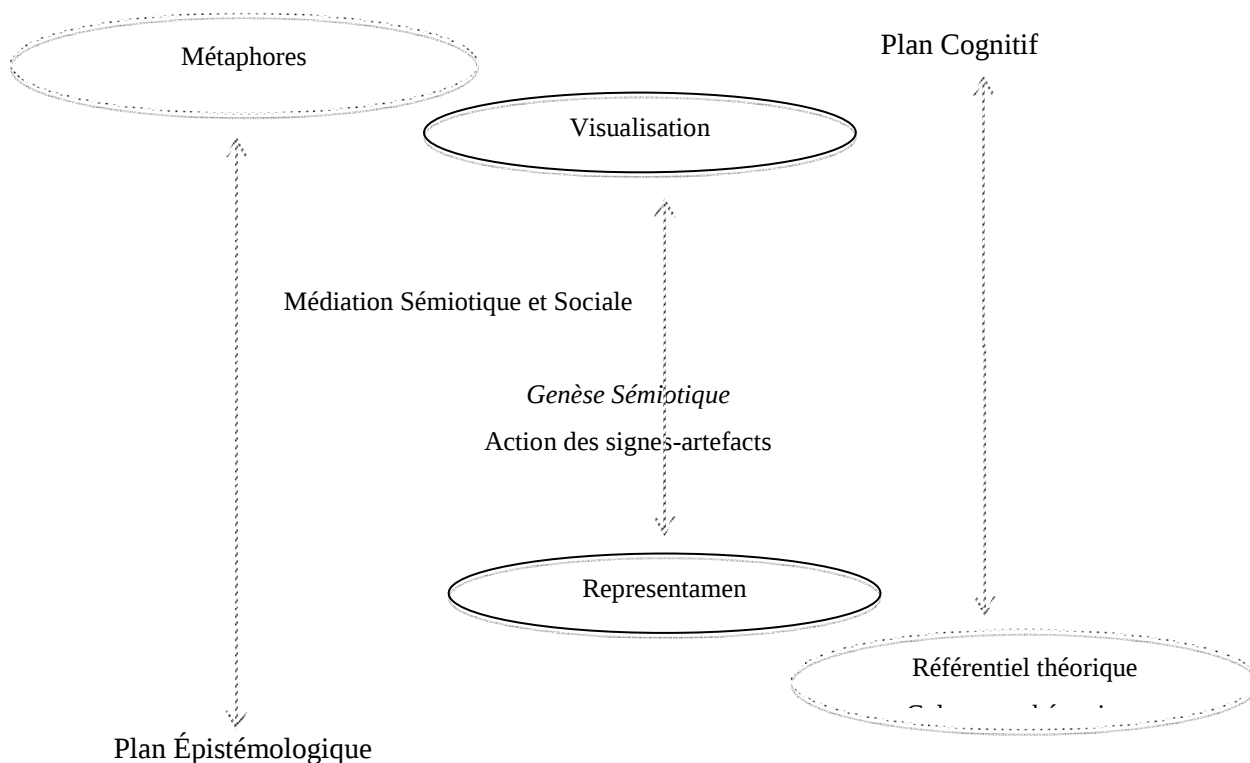


Figure 1. Côté gauche du schéma représentant l'Espace de Travail Mathématique : articulation des plans cognitif et épistémologique et présence d'un processus de médiation sémiotique et sociale.

En conséquence, des éléments théoriques associés à la médiation sémiotique (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) et à la médiation sociale (Radford, 2004 ; Sfard, 2008) pour l'apprentissage de mathématiques ont été intégrés à l'approche théorique des ETM. La présence explicite d'un processus de médiation sémiotique dans un contexte d'interactions sociales a élargi les

critères de ce que nous voulions observer et analyser dans le travail mathématique des élèves. Ainsi, des analyses *a priori* de l'ETM à proposer et aussi *a posteriori* de l'activité mathématique effective des élèves – i.e. leur appropriation de l'ETM proposé –, nous permettaient de déterminer de quelle façon ces médiations peuvent favoriser l'évolution partagée de connaissances, lorsque plusieurs élèves résolvent un problème mathématique (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008).

UNE PHASE EXPERIMENTALE POUR ETUDIER L'ESPACE DE TRAVAIL MATHEMATIQUE EN CONTEXTE DE MEDIATION SEMIOTIQUE

La phase expérimentale de ma thèse consiste à la mise à l'épreuve d'une séquence d'apprentissage conçue pour étudier – dans un contexte de médiations sémiotique et sociale – la construction géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres. Dans le cadre de cette communication je ne vais que présenter un aperçu de l'analyse d'une partie de cette séquence (Annexe 2). L'expérimentation a été mise en place en Ile de France dans quatre classes de Terminale S. Les élèves ont eu à résoudre une suite de cinq questions proposant une approche géométrique de la multiplication de nombres réels et complexes. Dans un premier temps, les élèves effectuent la construction géométrique du produit de deux nombres réels dans le cadre proposé par Descartes dans sa Géométrie (1637/2009). Puis, il leur était demandé de trouver une relation entre des points donnés dans le plan et la multiplication de deux nombres complexes. En s'appuyant sur ces activités, notre but était de décrire et de caractériser des parcours d'individus dans l'ETM en précisant notamment leurs possibilités de rencontrer des significations géométriques de la multiplication à partir de l'analyse de la représentation géométrique de la multiplication de Descartes. Nous avons attribué à cette représentation géométrique – reconnue par les élèves français comme étant représentative du théorème de Thalès – le rôle d'un *signe-artefact*, destiné à être interprété et à évoluer, jusqu'à être visualisé comme une représentation géométrique de la multiplication comme des transformations pour différents ensembles de nombres. La dernière question de la séquence ou question de synthèse sollicite un retour réflexif des élèves sur l'ensemble de l'activité. Elle est fondamentale dans le processus de recherche et son analyse doit permettre une première description des parcours effectués par les élèves dans leur travail mathématique. Pour décrire le rôle de la géométrisation dans l'approche de la multiplication chez les élèves, nous avons étudié leur manière de résoudre des problèmes de construction géométrique mettant en jeu la multiplication des nombres réels et des nombres complexes. Petit à petit nous avons été amenés à chercher et à déterminer les interactions entre les plans cognitif et épistémologique de l'ETM approprié par les élèves, pour ainsi rendre compte de la rencontre de la multiplication géométrique de deux nombres complexes.

L'ESPACE DE TRAVAIL MATHEMATIQUE APPROPRIE PAR LES ELEVES

Une des tâches posées aux élèves dans cette séquence consiste à lire la multiplication de deux nombres complexes construite géométriquement (tâche 4.a – Annexe 2). La tâche suivante leur demande de construire le produit de deux autres nombres complexes (tâche 4.b – Annexe 2). L'objectif spécifique de ces tâches était de mettre en relation les propriétés de la multiplication de deux nombres complexes et la représentation géométrique qui résulte de leur mise en œuvre. Les élèves ont les traces numériques et algébriques de ces propriétés puisqu'ils les ont déjà dégagées dans la question précédente. Plus tôt dans la séance, les élèves avaient vérifié que la multiplication géométrique pour différents ensembles de nombres pouvait être prouvée par l'existence d'une relation de proportionnalité entre les facteurs, l'unité et le produit (ils font référence à cela en parlant de « Thalès »). Ainsi, la recherche d'une mise en relation entre le produit complexe et une situation de proportionnalité – géométriquement représentée – favoriserait non seulement la rencontre de la signification

géométrie de ce produit mais viendrait aussi la valider. Les élèves reçoivent de temps en temps quelques informations de la part de l'enseignante, ce sont surtout des interventions qui éclairent certaines questions qui pourraient « bloquer » leur travail.

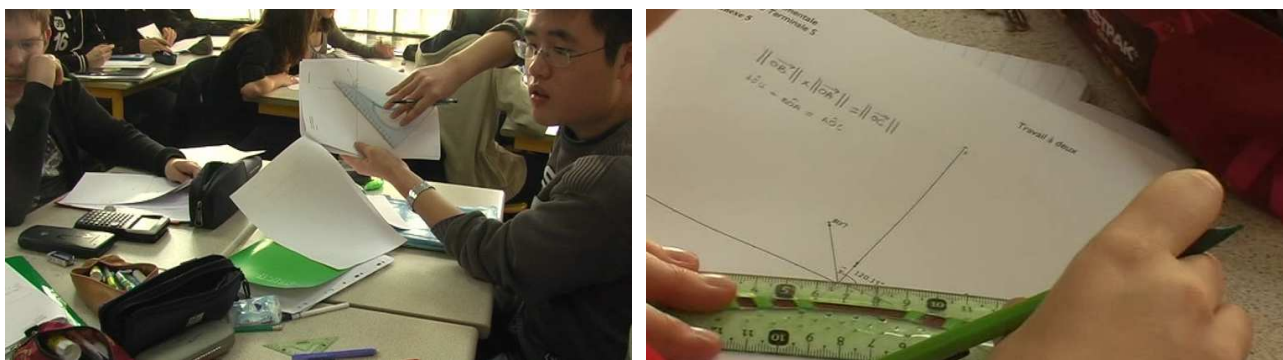


Figure 2. Les élèves au travail – Groupe A.

Dans ce contexte, le *faire* des élèves – c'est-à-dire, leur appropriation (*interprétation et participation volontaire*) de l'Espace de Travail Mathématique proposé – rend compte de plusieurs interactions par lesquelles différentes notions mathématiques se mélangent, se combinent ou semblent même s'opposer. Les élèves articulent la représentation géométrique de la multiplication de deux nombres complexes et les propriétés exprimant des relations entre les facteurs et le produit en proposant différentes façons de faire. Leur travail se déroule autour des aller-retours entre l'énoncé de la question, une figure, un signe-artefact, des discours, la représentation géométrique de deux nombres complexes, les représentations numériques ou algébriques des propriétés du produit des nombres complexes et les éléments de base sur lesquels ils font leur construction, soit, la représentation géométrique de deux nombres complexes. L'appropriation de l'ETM par les élèves les conduisant vers la construction recherchée met en évidence des gestes qui articulent, *comme dans une sorte de bricolage*, le numérique et le géométrique. En observant leurs productions et leurs échanges, de nouvelles questions s'imposent lors de notre analyse : Serait-il possible pour les élèves d'établir des relations entre le pôle propriétés de la multiplication de nombres complexes et les éléments de réponse concernant les transformations géométriques ? Comment les propriétés de la multiplication de nombres complexes ont influencé le travail des individus surtout face aux questions portant sur les significations géométriques de la multiplication et sur les constructions ? La visualisation de la multiplication comme une transformation dans le plan, a-t-elle émergée dans l'Espace de Travail Mathématique approprié par les élèves ? Quel appui sur le figural peut-on identifier au cours de la séance ? À quel moment et de quelle façon se fait-il présent ? Quelle influence a pu exercer notre signe-artefact sur la suite du processus de *compréhension* de la multiplication ? Et que peut-on dire sur la médiation résultant du travail collaboratif ?

Notre travail a permis d'avancer dans la recherche d'éléments de réponse à certaines de nos questions même si ce travail n'est pas encore été terminé. Pour rendre compte d'éléments du déroulement de l'une de nos séances expérimentales, je vais donner quelques exemples du travail mathématique de deux groupes d'élèves portant sur le processus de construction géométrique de la multiplication de deux nombres complexes. Pour le groupe A, je présente des transcriptions et des analyses de certains de leurs échanges verbaux ainsi que certaines de leurs productions écrites. Pour le groupe B, nous n'avons pas eu la possibilité de garder un registre audiovisuel de leurs échanges. Je ne présente donc que certaines de leurs traces écrites et quelques hypothèses en ce qui concerne leur appropriation du travail mathématique proposé.

Groupe A

Les échanges entre les élèves semblent cumuler des éléments qui pourraient ou non devenir les fondements du travail mathématique demandé et donc de la construction évoquée. La tâche semble très complexe. L'extrait suivant en donne un aperçu :

Extrait 1

- A: En fait, il faut construire le... produit de ça.
- A: En multipliant l'un et en ajoutant l'autre (rires).
- B: En fait, c'est simple. Ah, mais je sais, j'ai trouvé. (Ils lisent et relisent la question, puis ils reviennent en arrière pour regarder leur réponse à la question précédente).
- C: Attendez, dans quel sens déjà on donne les [...]
- B: On représente sur le graphique, alors... Il faut construire la représentation, tu vois ?
- A: (C fait une construction où le produit ne correspond pas au produit de modules car la longueur est trop courte. La position n'est pas correcte non plus car la droite où le produit a été placé ne correspond pas à une addition des angles des facteurs. Cette droite correspond à celle qui a été placée par B et que nous décrivons par la suite.) Mais c'est tout petit !
- B: Déjà voilà, c'est ça (B trace une droite qui correspond à un élargissement dans le sens négatif du vecteur OA. Cette droite correspond exactement à la droite portant le produit dans la représentation géométrique donnée dans la question 4.a ; En même temps, C réécrit en langage algébrique les propriétés de la multiplication de nombres complexes : somme d'angles et produit de modules. Puis tous les autres vont tracer la même droite que B).
- P: (L'enseignante fait une remarque à toute la classe car plusieurs groupes étaient restés très longtemps bloqués dans la dernière petite question de la question 4.a.) Vous m'écoutez deux secondes ? [...] On vous demande juste les normes, entre elles, entre les normes des facteurs et les normes du produit, et entre les angles des facteurs et l'angle du produit. Et après c'est tout.

Le travail des élèves ici est très local et l'enseignante essaie de mieux cibler la question pour qu'elle devienne plus accessible aux élèves. Leurs questions se centrent sur *la forme*, par exemple *nommer ou non un point, comment le faire ou où le placer*. Néanmoins des aides et des commentaires sont bien partagés entre les élèves qui, petit à petit, modifient leurs constructions géométriques. Ils font un pas puis un autre en faisant avancer leur recherche même si, à plusieurs reprises, leurs réponses semblent découpées. Pour avancer, nous les voyons en quelque sorte retourner sans cesse aux points de départ du problème ainsi qu'aux idées mathématiques déjà travaillées : faire un graphique, trouver un produit, tracer une droite, etc. Nous pourrions dire qu'ils se trouvent dans ce que Nishida (1870-1945) appelle *un fait* : l'union de pensée et perception dans le processus de retourner aux fondements infinis des mathématiques, toujours en mouvement (Dalissier, 2009). Le travail mathématique des élèves semble se situer dans un contexte de perception pure, dans la recherche d'une intuition qui accompagne toujours le travail mathématique des chercheurs. Les élèves mobilisent des outils, réfléchissent, se questionnent, effacent, recommencent. Ils font intervenir des mathématiques *déjà là*, c'est-à-dire celles qui font partie de leur histoire et qu'ils font *émerger dans leur travail présent*. Dans ce contexte, à plusieurs reprises tout au long du travail réalisé pendant la séance, certains élèves cherchent des modèles qui pourraient expliquer ce qui se passe, d'autres font de conjectures à partir des éléments présents. Ils changent aussi de direction, ils reviennent sur leur pas, leurs mesures, les nombres choisis : ils refont, ils font ensemble. Même s'ils reviennent, s'ils répètent des actions ou s'ils reprennent des modèles, ils sont au cœur de la réinvention. Il s'agit d'une réinvention partagée, une réinvention en collaboration. Tout au début de la séquence, le théorème de Thalès n'était qu'un outil pour la preuve de la multiplication de Descartes. Plus tard, les composantes de l'icône le représentant paraissent intégrées au discours mathématique associé à la construction géométrique de la multiplication. De ce fait, nous avons notamment observé l'intention de prendre en compte les

droites parallèles constituant l'icône du théorème de Thalès : d'après leur discours, les élèves avaient l'intention de prendre en compte « la propriété de Thalès ». De cette manière, l'évolution de notre signe-artefact s'est bien manifestée dans le discours d'un des élèves ; néanmoins, elle reste limitée et même, à certains moments, bloquée à cause de la forte influence d'une pensée habituée à la mise en place de recettes —en termes plus élégants, de *techniques* — ou encore, au besoin de suivre un bon modèle :

Extrait 2

- C: Parallèles...
- C: On a des parallèles ici.
- A: Il faut faire la parallèle ici, non ?
- C: Je montre la parallèle, là, non ?
- D: C'est la parallèle. Sinon on ne pourra pas utiliser [...]
- D: En traçant la droite, et en traçant la parallèle ici... (D signale dans sa feuille, avec une équerre, deux droites parallèles : l'une d'entre elles corresponde à la droite passant par les points U et A. Sa parallèle passe par le point B et coupe OA permettant, de cette façon, de trouver « le produit » cherché).

Il y a bien du bricolage, des choses trouvées, du partage des idées, mais il est impossible de savoir si elles sont pertinentes ou non avant d'avoir terminé la construction demandée. L'œuvre finale apparaît donc comme le résultat de ce partage et de la médiation résultant de leurs échanges. Les élèves cherchent non seulement la réponse à l'énoncé mais aussi « ce qu'il faut faire », résultant du contrat didactique de la classe (Brousseau, 1998). De ce fait, ce qui a motivé les élèves à tracer des parallèles reste encore très flou, car l'intérêt de les utiliser pourrait juste correspondre au fait que *c'est ce qu'il faut faire*. Ainsi, nos interprétations de cette évolution restent au niveau de conjectures puisque le discours des élèves doit nécessairement être interprété à l'aide d'une forme d'intervention qui puisse encourager sa verbalisation (Radford, 2003) et qui leur permette de développer leur discours ! Par contre, ce développement n'a pas pu se produire de façon optimale à l'intérieur des échanges que la conception de notre séance expérimentale permettait entre les élèves. Nous avons à ajouter que la place que nous avons donnée à la médiation de l'enseignant était limitée (je reviendrai un peu plus tard sur cet aspect). Si nous prêtons attention aux commentaires de l'élève D (*extrait 3*), nous observons que celui-ci insiste sur ce besoin de construire en respectant les « propriétés de Thalès » mais ses commentaires se perdent dans des discussions dans lesquelles ses idées ne peuvent pas se développer, parce que non prises en compte par ses camarades et non guidées par l'enseignant, alors absent :

Extrait 3

- D: Il faut s'aider des angles afin de trouver là où il fallait *tourner* la droite.
- B: Excuse... est-ce qu'on peut m'expliquer encore ?
- D: En fait, on repart à zéro !
- D: Madame Rémy nous a conseillé de construire la droite, z", avec l'histoire des angles.
- E: Tu as un rapporteur ? (A ce moment ils se concentrent en mesurer les angles (au rapporteur) et les modules (à la règle graduée). Ils effacent leur construction avec les parallèles et ils trouvent, après beaucoup de réflexion et des calculs, la position de la droite où il faudra finalement placer le produit résultant de l'addition d'angles et du produit de modules en centimètres. Même en connaissant la mesure résultant de la somme des angles des facteurs ils n'arrivent pas facilement à placer le produit).
- D: Ça me paraît vraiment étrange que l'on peut pas arriver à la propriété de Thalès.
- B: C'est pas forcément que j'ai utilisé Thalès à chaque annexe.
- D: Mais justement on doit vérifier les mêmes propriétés que... là bas
- B: Non mais c'est que tu évolues. Au début on disait Thalès, après on a parlé de normes, après on a parlé de... pour arriver aux nombres complexes [...]

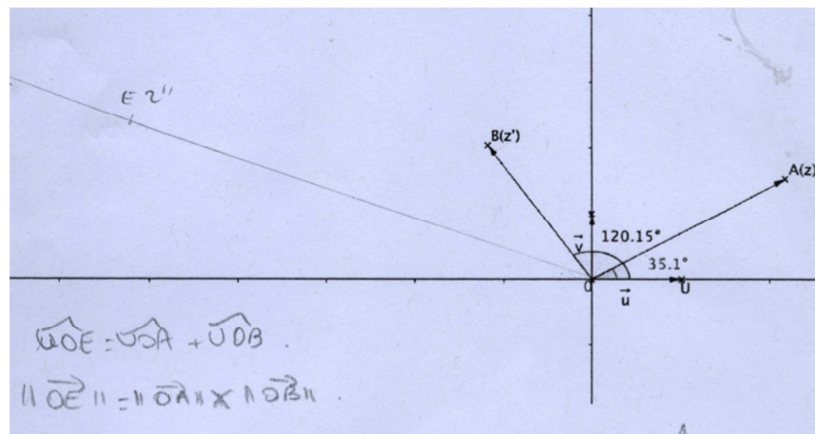


Figure 3. Construction géométrique du produit de deux nombres complexes réalisé par le groupe A.

Les propositions verbales et les gestes non verbaux des élèves ne rendent pas nécessairement compte d'un débat rationnel ou de la poursuite d'un chemin préétabli qui se limiterait à la recherche d'une solution particulière. À certains moments de leur débat, la discussion semble ne pas évoluer et plusieurs propositions restent sans réponse. Finalement, et suite à d'autres échanges très intéressants (Barrera Curin, 2013), les élèves ne concluent que sur une mise en œuvre littérale des propriétés géométriques du produit complexe.

La complexité des processus cognitifs impliqués dans notre séquence ainsi que la diversité d'appropriations de l'Espace de Travail Mathématique au milieu d'un travail collaboratif, nous ont conduits à des réflexions portant sur des changements de variables liés à l'importance d'une médiation et d'une orchestration plus active de l'enseignant (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). Nous nous sommes aussi beaucoup questionnés sur la pertinence des rétroactions du milieu (Brousseau, 1998, Margolinas, 1998) que nous avons prévues lors de la conception de l'ETM à proposer.

Groupe B

D'après ce que nous observons dans leur réponse à la question 4.a de la séquence, les élèves ont rendu compte des propriétés géométriques de la multiplication de deux nombres complexes, qu'ils aient déduites de la correspondance entre la configuration géométrique donnée et les produits représentés précédemment ou qu'ils les connaissent avant la mise en place de notre séance expérimentale. Le fait de donner une importance à ces considérations théoriques a à voir avec le fait que ces réponses auraient pu, d'une certaine manière, influencer le discours théorique permettant de donner une réponse à la question suivante (4.b).

$$\begin{cases} \theta_c = \theta_c + \theta_o \\ \|\vec{OC}\| = \|\vec{OA}\| \times \|\vec{OB}\| \end{cases}$$

Figure 4. Réponse du groupe B à la question 4.a. Ils expriment les propriétés géométriques de la multiplication de deux nombres complexes pour expliquer la relation entre les facteurs et le produit de deux nombres complexes.

La connaissance de ces propriétés pourrait – facilement ou difficilement – permettre la mise en œuvre d'une technique qui amènerait les élèves à la construction du produit de deux nombres complexes la plus répandue parmi les réponses des élèves (voir la construction réalisée par le groupe A, figure 3). Ladite construction, à partir de la connaissance des propriétés en langage algébrique, pourrait rendre compte de la possibilité des élèves de représenter le produit complexe différemment. Nous l'avons bien vu dans certains des

parcours étudiés (Barrera Curin, 2013), et même dans le travail du groupe A décrit précédemment : la puissance du discours théorique a conditionné les réponses des élèves sans leur permettre – hypothétiquement, bien sûr – d’agir en fonction de ce qui était attendu. Nous avons ainsi mis en évidence que le fait de réussir à représenter dans un autre registre un même objet mathématique ne rend pas nécessairement compte de la *compréhension* des significations dont est porteur l’objet en question. En d’autres mots, le seul fait de changer de registre de représentation sémiotique (Duval, 1993) n’implique pas nécessairement la réification (Sfard, 2008) d’un objet mathématique. Voici donc une difficulté cognitive à prendre en compte lorsque nous proposons des activités où ce genre de processus doit être mis en œuvre par les élèves.

Revenant aux réponses données par le groupe B, je présente dans la *figure 5* la réponse de ces élèves à la question portant sur la construction du produit de deux nombres complexes. Les mesures et le calcul prenant en compte l’unité nous font penser que la construction réalisée répond bien au discours théorique portant sur la multiplication de modules, ceci faisant partie des connaissances préalables ou bien, comme je l’ai déjà dit, étant déduit de la justification par le théorème de Thalès travaillée tout au long de la séquence.

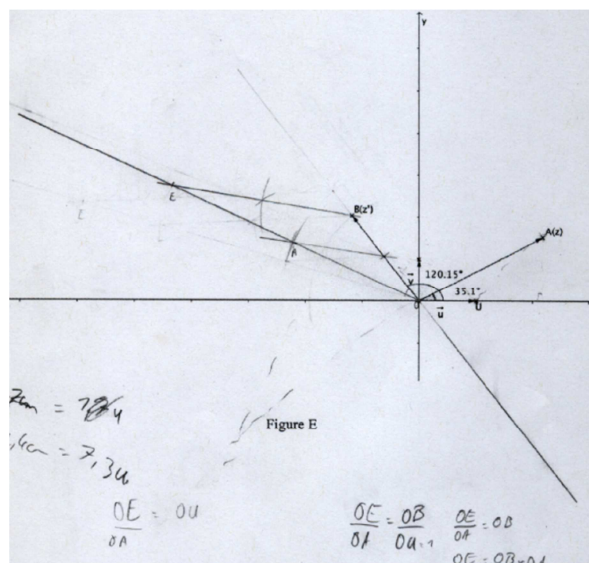


Figure 5. Représentation géométrique du produit de deux nombres complexes réalisée par le groupe B.

En revanche, même avec quelques défauts liés aux mesures des longueurs, une construction tout à fait correcte du point de vue de sa correspondance *morphologique* avec la représentation géométrique du produit de Descartes et le bon placement des points *U*, *A* et *E* respectifs résultant d’une similitude rendent compte d’une appropriation de la signification du produit : le passage du produit de Descartes, ayant un angle nul, au produit complexe où la puissance du théorème de Thalès permet de prouver le produit en ajoutant la rotation des angles à la multiplication de *longueurs*. Les propriétés géométriques du produit de deux nombres complexes auraient été interprétées en termes de transformations. Cela amène les élèves à mettre en œuvre une genèse instrumentale qui, articulée avec une genèse sémiotique, leur a permis la construction réalisée. La genèse sémiotique ayant, dans ce cas, une origine dans le plan cognitif peut aussi être associée à la médiation sémiotique de notre signe-artefact. Finalement, étant donné que nous n’avons pas d’autres traces écrites ou orales qui nous permettent d’accéder plus finement au travail fait par ce groupe, il ne nous reste que des conjectures à faire quant aux motivations favorisant leur réponse. Nous remarquons que nos résultats restent ambigus et que nos données manquent de paroles qui permettent de mieux les interpréter comme des faits. Dans ce cas, nous aurions une preuve plus tangible de l’effet ou de l’influence provoqués par notre signe-artefact comme médiateur tout au long du processus.

Cela aurait été bien beau d'avoir eu accès aux discussions qui, tel que je les ai présentées pour le groupe A, rendent compte de la complexité de la tâche et de la richesse des échanges entre les élèves.

DISCUSSION

Peut-on identifier et différencier des interactions entre les composantes de l'espace de travail mathématique personnel des élèves rendant compte d'une compréhension géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres ? Cette question, portant directement sur le travail mathématique des élèves et sur le regard théorique sous lequel ce travail a été étudié, correspond à notre deuxième question de recherche. Une séance non-traditionnelle d'apprentissage a été conçue spécifiquement pour répondre à nos intentions et à nos fins didactiques, lesquelles portaient sur la mise en relation entre les composantes d'un espace de travail mathématique grâce à l'action de genèses sémiotiques et à la médiation sémiotique d'un signe-artefact dans un contexte de médiation sociale. Comme je l'ai déjà mentionné, nous avons intégré explicitement à l'ETM des intermédiaires, des signes médiateurs. Ainsi l'ETM a été lui-même intégré à un processus socioculturel de l'apprentissage où les dimensions sociale et sémiotique coexistent dans la zone de développement proximale définie par Vygostky (1934/1997). Dans ce contexte, et de façon plus spécifique, notre objectif était d'étudier si les représentations géométriques, données ou demandées, reconnues comme signes-artefacts, peuvent renvoyer à un signifié mathématique précis (Falcade, 2002), dans notre cas, la multiplication. Nous avons pris conscience des difficultés des élèves à transposer leurs connaissances à des situations différentes, leur résistance à un nouveau discours théorique, ainsi que leur attachement à la résolution de problèmes mettant en place des techniques qui suivent un modèle déjà connu. La diversité d'espaces de travail mathématiques appropriés de manières très différentes nous a permis de déterminer des parcours d'élèves dans lesquels des entrées cognitives se sont produites. Nous avons ainsi observé une mise en relation entre notre signe-artefact et la signification de la multiplication comme une transformation dans le plan, laquelle a été observée dans la construction du produit de deux nombres complexes et dans d'autres réponses données à d'autres questions de la séquence proposée. Nos intentions didactiques nous ont conduits à la conception de séances expérimentales donnant priorité à la médiation entre paires, mais donnant une place limitée aux interventions de l'enseignant. Je ne peux que souligner l'importance de concevoir des situations qui permettent aux élèves de s'exprimer, de développer leurs idées et de répondre à leurs questionnements sous une médiation plus active de l'enseignant.

Par ailleurs, mes analyses du travail mathématique effectif des élèves, réalisées un an et demi après la soutenance de ma thèse – et partiellement articulées aux anciennes analyses dans le cadre de cet article –, m'ont conduite à des réflexions me poussant à, d'une part, veiller à ne pas restreindre le travail mathématique des élèves à un regard tourné complètement vers des *a priori* et, d'autre part, à sortir d'une épistémologie réaliste des mathématiques au sein de laquelle les mathématiques existeraient en dehors de celui qui les fait. Le travail mathématique des élèves résulte d'une appropriation du travail mathématique proposé. C'est ce mot *appropriation* ce que je souhaite questionner. L'analyse initiale des processus de résolution des tâches proposées m'a permis d'ébaucher ce processus d'appropriation mais, notamment dans le cadre de ma thèse, je suis surtout allée chercher si les élèves arriveraient ou non à l'état optimal du processus d'apprentissage attendu : la *construction* de la notion mathématique en jeu à travers l'accès à une signification visée et dont l'émergence (*son* émergence) était le but à atteindre à la fin du processus. Néanmoins, en observant plus en détails les échanges des élèves, je me suis rendue compte que me limiter à un tel regard peut être très restrictif. En effet, la lecture faite de l'espace de travail mathématique approprié par les élèves – sous l'angle précisé précédemment, c'est-à-dire consistant à le voir comme une sorte de transposition de l'ETM proposé – ne peut que partiellement tenir compte de

l'expérience des élèves ou du contexte dans lequel se réalise la rencontre des mathématiques (Maheux & Proulx, sous-presse) : un contexte de travail collaboratif, complexe et très riche dans lequel chacune des réflexions exprimées, chaque mot partagé, chaque question, mérite une attention plus profonde. Ces réflexions font émerger une question élémentaire mais assez complexe : comment formuler les liens entre l'ETM de l'enseignant (ou du chercheur) et celui des élèves en tenant compte de la diversité et de la plasticité propres à tout travail mathématique en classe ? L'idée de *mouvement* (Châtelet, 1993) dans et entre les composantes attribuées à l'ETM nous permet de mieux approcher le travail résultant du pouvoir générateur des mathématiques et ses répercussions dans le travail mathématique des élèves. Je me trouve donc au cœur d'une reconceptualisation qui permettrait d'élargir, encore une fois, la conception de ce qu'est un espace de travail mathématique. La mise en valeur des *cheminements* des élèves dans un tel espace, jamais fixe, nous permettrait de mieux apprécier sa réinvention grâce aux interactions et aux appropriations de la tâche proposée. Dans ce contexte, l'histoire de chacun des élèves fait *émerger dans le présent* (Varela et al., 1993) une diversité d'espaces de travail mathématiques, lesquels se manifestent comme un *devenir* en faisant *fleurir* ou *exploser* (Châtelet, 1993) les idées mathématiques en jeu (voir plus de références à ce sujet dans Barrera Curin & Maheux, à paraître).

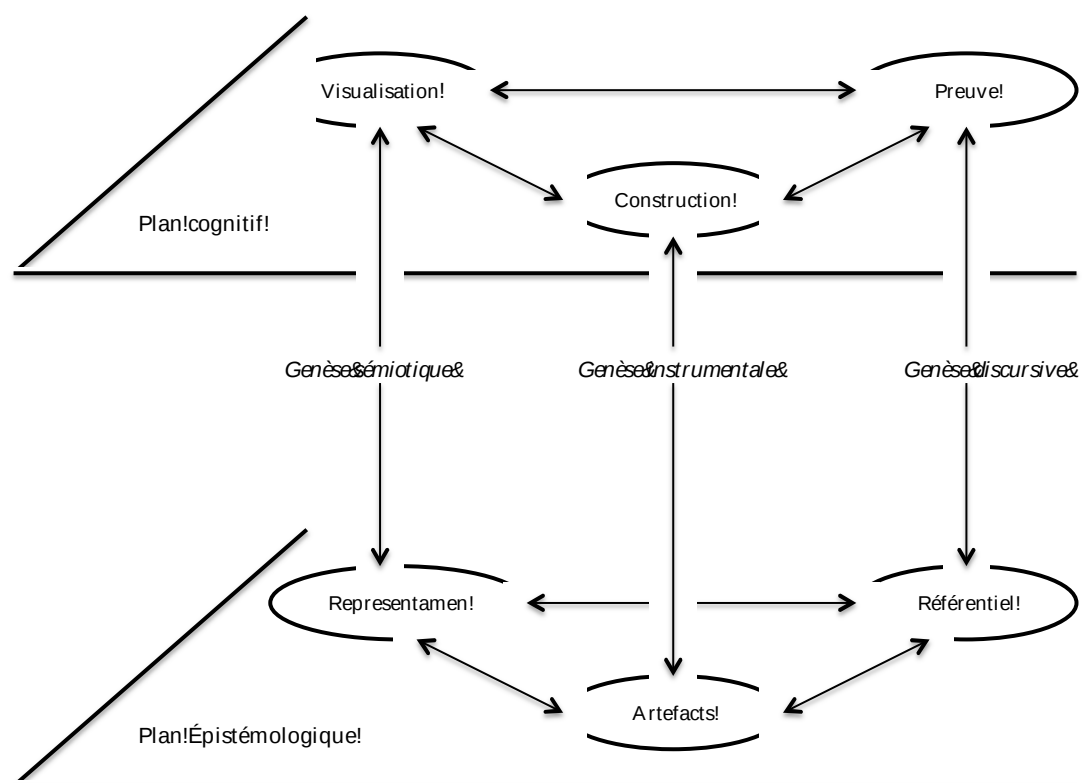
Mon travail de thèse a rendu compte de mes premiers pas dans l'étude du travail mathématique des élèves. À partir de là plusieurs questionnements ont émergé. Aujourd'hui, c'est bien sur ces questionnements que je travaille tout en sachant que ce ne sont pas non plus les dernières questions autour desquelles j'aimerais développer mon travail de recherche. Revenir sur mon travail de thèse un an et demi après la soutenance m'a permis de mettre en valeur les fondements épistémologiques de ma recherche et de vouloir y rendre compte sans hésitation. Comme je l'ai dit dans ma communication orale lors du séminaire national, je ne cherche ni à établir de vérités didactiques, ni à limiter le *faire* des mathématiques à l'apprentissage de significations préfixées. Que ces apprentissages se produisent, que des gestes soient retrouvés dans le *faire* des élèves, que des modèles soient cherchés en faisant émerger des invariants dans les conduites d'élèves dans des contextes différents, tout cela, ne peut résulter d'une transposition d'un espace de travail mathématique. Les appropriations des ETM proposés par l'enseignant, si elles se produisent, doivent être vues comme fondamentalement propres à un contexte particulier, à une histoire personnelle et encore à une expérience de rencontre (Barrera Curin & Maheux, à paraître). En conséquence, ces réflexions me conduisent à enrichir mes questionnements par rapport à la façon d'approcher les mathématiques et la façon dont j'aimerais les voir vivre en contexte scolaire. La beauté toujours présente dans la possibilité de création que nous donnent les mathématiques elles-mêmes, et la beauté d'observer le *faire* des élèves au cœur d'un processus de médiations sémiotique et sociale – par exemple dans la mise en relation entre nombres et géométrie – constituent toujours le cœur de ma recherche.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BARRERA CURIN R. I. (2013). *Etude des significations de la multiplication pour différents ensembles de nombres dans un contexte de géométrisation*. Thèse de doctorat, Paris : IREM de l'Université Paris Diderot – Paris 7.
- BARRERA CURIN R. I. & MAHEUX J.F. (à paraître). Une réflexion autour de l'expérience de rencontrer les mathématiques. Colloque GDM, 2014.
- BARTOLINI BUSSI M. G. & MARIOTTI M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a vygotskian perspective. In L. E. et al. (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2ème éd.). New York and London: Routledge.
- BROUSSEAU G. (1998). *Théorie des situations didactiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage.
- CHATELET G. (1993). *L'enchantement du virtuel. Mathématique, physique, philosophie*. Paris: Le Seuil.
- DALISSIER M. (2009). *Anfractuosit  et unification: la philosophie de Nishida Kitar *. Genève: Droz.
- DUVAL R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, 5, 37-65.
- FALCADE R. (2006). *Théorie de situations, médiation sémiotique et discussions collectives dans les séquences d'enseignement avec cabri-géomètre pour la construction des notions de fonction et graphe de fonction*. Thèse de doctorat non publiée.
- KILHAMN C. (2011). *Making sens of negative numbers*. Thèse de doctorat non publiée.
- KUZNIAK A. (2011). L'espace de travail mathématiques et ses g n ses. In *Actes du symposium franco-chipriote de didactique espace de travail mathématique*. Paris.
- KUZNIAK A. (2014). Understanding geometric work through its development and its transformations. In S. Rezat & M. Hattermann (Eds.), New York : Springer.
- LAKOFF G. & NUNEZ R. (2000). *Where Mathematics comes from?* New York: Basic Books.
- MAHEUX J.F. & PROULX J. (sous presse). Vers le faire mathématique: essai pour un nouveau positionnement en didactique des mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*.
- MARGOLINAS C. (1998).  tude de situations didactiques ordinaires à l'aide du concept de milieu : détermination d'une situation du professeur. In *Actes de la 8 me  cole d'été de Didactique*.
- NOSS R. & HOYLES C. (1996). *Windows on mathematical meanings : Learning cultures and computers*. Dordrecht : Kluwer.
- PRESMEG N. C. (1997). Reasoning with metaphors and metonymies in mathematics learning. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (pp. 267-279). London: Lawrence Erlbaum Associates.
- RADFORD L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: a semiotic cultural approach to students types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.
- RADFORD L. (2004). La g n ralisation mathématique comme processus sémiotique. In A. G. (ed.) (Ed.), *Atti del convegno di didattica della matematica* (p. 11-27). Locarno : Alta Scuola Pedagogica.
- SFARD A. (1994). Reification as the birth of metaphor. *For the learning of mathematics*, 14(1), 44-55.
- SFARD A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of*

- discourses, and mathematizing*. Cambridge : Cambridge University Press.
- SOTO-ANDRADE J. & REYES-SANTANDER P. (2011). Conceptual metaphors and grundvorstellungen: A case of convergence. In M. Pytlak, T. Rowland & Ewa Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 1625-1635). Rzeszów: University of Rzeszów.
- VARELA F. THOMPSON E. & ROSCH E. (1993). *L'inscription corporelle de l'esprit*. Paris : Edition Seuil.
- VYGOTSKY L. S. (1934/1997). *Pensée et langage* (3ème éd.). Paris : La Dispute
- WERTSCH J. V. & ADDISON STONE C. (1995). The concept of internalization in Vygotsky's account of the genesis of higher mental functions. In J. V. Wertsch (Ed.), *Culture, communication and cognition: Vygotskian perspectives*. Cambridge: Cambridge University Press.

ANNEXE 1 : L'ESPACE DE TRAVAIL MATHÉMATIQUE ET SES GENESES.
KUZNIAK, 2011.



ANNEXE 2 : SEQUENCE EXPERIMENTALE D'ENSEIGNEMENT PROPOSEE EN CLASSE DE TERMINALE S

Travail avec annexe 1

La configuration « Figure A » correspond à ce que Descartes (mathématicien et philosophe, 1596-1650) a considéré comme une représentation géométrique de la multiplication. Nous vous présentons aussi son texte historique la décrivant.

Lire le texte de Descartes (annexe 1), puis observer la configuration « Figure A » pour répondre à la question suivante :

Nous proposons $AB = 1 \text{ cm}$. BE , est-il bien le produit annoncé par Descartes ? Qu'en pensez-vous ?

Travail avec annexe 2

Observer la configuration « Figure B » pour répondre aux questions suivantes :

Nous voudrions construire la représentation géométrique d'un produit ayant les caractéristiques de la multiplication de Descartes :

Sachant que $BA = 1 \text{ cm}$ placer D entre B et A .

Construire E pour que BE donne le produit de la multiplication de BD par BC .

Décrire votre construction et expliquer pourquoi elle peut être considérée comme analogue à la multiplication de Descartes.

Travail avec annexe 3

Observer la configuration « Figure C » où nous avons repéré sur la droite numérique certains nombres. Du côté positif nous avons placé le point A d'abscisse $+1$ et du côté négatif le point D d'abscisse -2 . (AC) et (DE) sont parallèles.

Projeter orthogonalement les points C et E sur l'axe des abscisses. Pouvez-vous justifier que l'abscisse du point E est le produit des abscisses des points D et C ? Comment ?

Si de manière plus générale, l'abscisse du point C est $x_C > 0$ et l'abscisse du point D est $x_D < 0$, décrire la représentation géométrique du point E sur (BC) d'abscisse $x_E = x_C x_D$.

Travail avec annexe 4

Nous allons étudier une nouvelle configuration, similaire à la configuration précédente, mais celle-ci est située dans le plan complexe avec certains éléments complémentaires.

Soit $(O; \vec{u}, \vec{v})$, un repère orthonormé direct du plan appelé plan complexe. Nous vous rappelons qu'un nombre complexe est appelé affixe d'un point M et d'un vecteur $\vec{OM}$. Utiliser les informations données sur la configuration « Figure D » pour répondre aux questions suivantes :

Pouvez-vous affirmer que dans cette représentation géométrique, la multiplication de z et z' donne toujours le produit z'' (affixe du point E et du vecteur $\vec{BE}$) ? Expliquez votre réponse.

Dans votre réponse à la question précédente, avez-vous établi des liens entre $\|\vec{BC}\|$, $\|\vec{BD}\|$ et $\|\vec{BE}\|$? Lesquels ? Et entre $\hat{AOC}$, $\hat{AOD}$ (les angles associés aux facteurs) et $\hat{AOE}$ (l'angle associé au produit) ? Si vous ne les avez pas encore considérés, quels liens établiriez-vous entre ces éléments pour expliquer la représentation géométrique du produit de deux nombres complexes ?

Travail avec annexe 5

Observez les représentations géométriques de deux nombres complexes dans la configuration « Figure E ».

En prenant en compte tes réponses dans les questions précédentes construire la représentation

géométrie du produit de z et z' .

Décrire votre construction.

Quel lien pouvez-vous établir entre le produit de Descartes et le produit que vous venez de construire ?

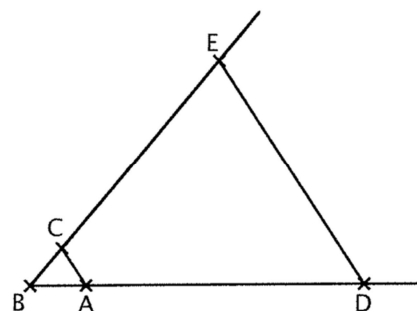
Dernière question :

En vous appuyant sur le travail que vous avez fait dans cette séance et sur vos connaissances antérieures, quelle *signification géométrique* pouvez-vous donner à la multiplication ?

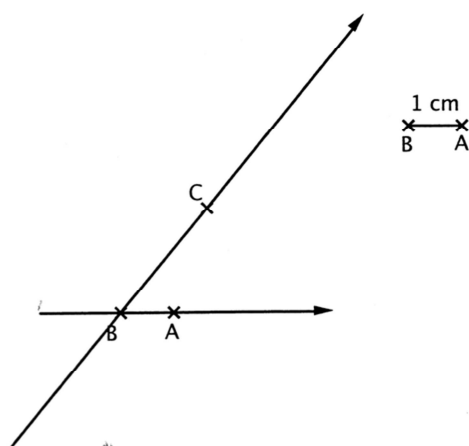
Annexes liées aux tâches de la séquence d'apprentissage

Annexe 1 (Figure A)

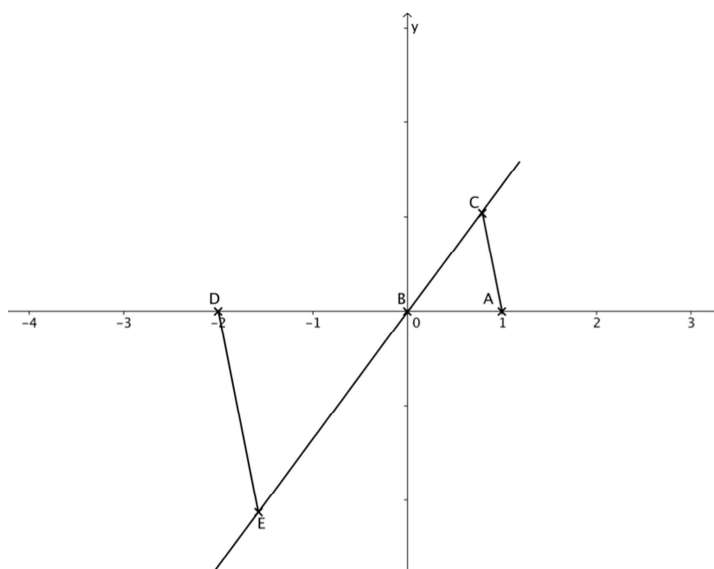
Soit par exemple AB l'unité et qu'il faille multiplier BD par BC ; je n'ai qu'à joindre les points A et C , puis tirer la parallèle à CA , et BE est le produit de cette multiplication (Descartes, 1637).



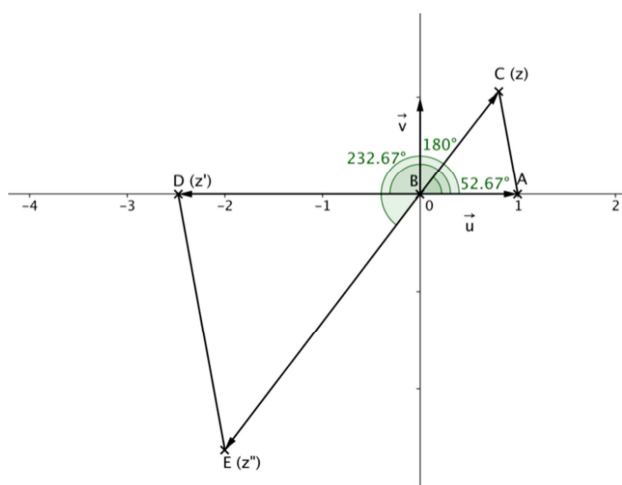
Annexe 2 (Figure B)



Annexe 3 (Figure C)



Annexe 4 (Figure D)



Annexe 5 (Figure E)

