# MODELISATION DE L'ACTIVITE DE DEFINITION EN MATHEMATIQUES ET DE SA DIALECTIQUE AVEC LA PREUVE ÉTUDE EPISTEMOLOGIQUE ET ENJEUX DIDACTIQUES

Cécile **OUVRIER-BUFFET**

Université Paris-Est Créteil

Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR-EA 4434)

cecile.obperso@gmail.com

**Résumé**

Ce travail s'inscrit dans la lignée de nos précédents travaux sur les définitions en mathématiques. L'enjeu était de parvenir à une modélisation épistémologique complète de l'activité de définition, avec une explicitation de la dialectique entre définition et preuve ; et cela, bien sûr, dans une perspective didactique, en vu de concevoir, analyser et transmettre de situations de construction de définitions.

Dans ce texte, un rapide panorama de l'ensemble des travaux de recherche traitant de l'activité de définition, travaux souvent disjoints et sollicitant des cadres théoriques très différents, permettra de souligner les manques (épistémologique et didactique) sur la question. La modélisation de référence de l'activité de définition, suivant quatre composantes que nous présenterons ici de manière synthétique, s'appuie sur des expérimentations et entretiens avec des mathématiciens.

Les perspectives de recherche de ce travail se situeront à trois niveaux : épistémologique, théorique, et didactique. En arrière-fond de cette recherche, nous retrouverons une question maintenant d'actualité dans notre communauté : celle de l'enseignement des mathématiques discrètes et de sa didactique.

**Mots clés**

Épistémologie, didactique des mathématiques, activité de définition, preuve, mathématiciens, mathématiques discrètes

## PROLOGUE – QUE PEUT ETRE UNE ACTIVITE DE DEFINITION ?

Pour introduire le questionnement sur les définitions en mathématiques et la façon dont celles-ci sont produites dans la sphère savante, nous allons utiliser un exemple en géométrie. Cet exemple nous permettra de souligner un processus propre à l'activité mathématique que nous appellerons par la suite « activité de définition ».

### La convexité : un concept doté de fortes potentialités mathématiques et didactiques

Nous utiliserons ici les apports historiques de Berger (2009, chapitre VII) et les problématiques qu'il propose pour montrer l'importance de la convexité et de ses définitions. Le concept de convexité, transdisciplinaire a été, selon Berger (2009), peu défini jusqu'à Minkowski (XIX-XXème). En effet, les problèmes précédant cette période étaient trop difficiles pour l'époque, les outils pas assez puissants. La demande de définition du concept de convexité est alors devenue forte du côté de l'analyse harmonique (prise en compte de la dimension infinie), du calcul des probabilités, et de la programmation linéaire, avec des implications en géométrie (nouvelles caractérisations des ellipses) et en théorie des nombres, mais pas seulement (en physique également, dans la seconde moitié du XXème).

Il est possible d'engager une recherche sur le concept de convexité, simple d'apparence et de première approche, et de définir des opérations sur les convexes. Trois types de considérations de la convexité sont proposés par Berger (2009) :

- la section d'un convexe par un sous-espace affine (c'est encore un convexe) : cette étude génère de multiples résultats, difficultés et surprises, même pour les convexes les plus simples ;
- les symétrisations (de Steiner, de Schwarz), qui préservent la convexité et qui permettent d'appréhender des questionnements en physique ;
- l'addition de Minkowski : on essaie ici de faire de l'algèbre sur les convexes en définissant la somme de deux convexes d'un même espace affine, somme qui semble avoir un effet « régularisant », mais qui cache, elle aussi, de nombreux phénomènes.

De ces directions de travail et de différentes problématiques proposées dans Berger (2009), la question en fait transversale de la « méchanceté » d'un convexe ressort : elle revient à juger du défaut d'être rond. À partir de la caractérisation de la « méchanceté d'un convexe », les mathématiciens ont travaillé principalement sur quatre critères (ellipse de John Loewner, rapport aréolaire, inégalité isopérimétrique inverse, produit aréolaire) selon le processus de recherche suivant, processus impliquant clairement une activité de définition : définir différemment des degrés de méchanceté d'un convexe, réutiliser des résultats connus, mobiliser la dualité, changer de dimension, et générer de nouveaux problèmes.

Il ressort de ce rapide historique impliquant le concept de convexité des intérêts reconnus par les mathématiciens (simplicité et puissance du concept de convexité, applications en mathématiques et en physique), et des perspectives similaires en didactique : le concept est en effet facile d'accès (au moins au niveau des représentations que l'on peut en proposer), les énoncés sont simples à présenter. De plus, ceux-ci soulèvent des questions encore non résolues en mathématiques, impliquent de nouveaux concepts à définir, ainsi que des preuves problématiques qui elles-mêmes reposent des questions de définitions de concepts déjà connus.

# 1. Introduction et questionnements

## 1.1. Contexte général de la recherche

Le travail présenté ici est dans la continuité de nos précédents travaux sur la définition en mathématiques (Ouvrier-Buffet, 2003), avec un arrière-plan épistémologique inscrit dans les mathématiques discrètes, et dans les SiRC (Situations de Recherche pour la Classe - Grenier & Payan, 2003). Dans ce cadre impliquant didacticiens et mathématiciens discrets, notre recherche s'est intéressée plus particulièrement à un élément de l'activité mathématique : la construction de définitions, activité pratiquée et reconnue par les mathématiciens. L'idée directrice était d'accéder à la formation de concepts via la construction de définitions. Il s'agissait ainsi de baliser la construction de concepts par différents « niveaux » de définition et d'étudier le processus consistant à faire évoluer ce que nous pourrions appeler des définitions intermédiaires. Cette recherche a également pris une forte orientation du côté de l'articulation entre le processus de preuve et celui de définition. Ce travail nous permet aujourd'hui de proposer une nouvelle voie d'entrée sur la construction de concepts dans l'enseignement.

L'accès au concept transversal de définition et à l'activité heuristique de construction de définitions dans la pratique du chercheur s'est avéré complexe car le processus de génération de concepts et de définitions appartient à la sphère privée du mathématicien. Dorénavant, nous entendrons par « activité de définition » tout processus impliquant la construction de définitions, de l'amorce de la résolution d'un problème à la construction formelle de théories. Nous parlerons ainsi d'activité de définition et de situations de construction de définitions : il sera toujours question d'une construction réelle de définitions.

## 1.2. Intérêts et apports de l'étude de l'activité de définition

Placer les définitions au centre d'une activité mathématique de construction de connaissances et de preuve s'est révélé pertinent et productif à deux niveaux (au moins).

- Le premier niveau est bien sûr d'ordre épistémologique : la construction de définitions est l'une des composantes de l'activité du chercheur. Certains chercheurs se sont penchés sur la caractérisation des heuristiques et attitudes des mathématiciens (par exemple : Burton, 2004 ; Carlson & Bloom, 2005 ; Gardes, 2013 ; Schoenfeld, 1985 ; Weber, 2008). Tous soulignent la difficulté à faire émerger les implicites de la pratique des mathématiciens. Aucun de ces travaux ne porte sur une modélisation effective du processus de définition, ni sur l'explicitation de la dialectique entre l'élaboration d'une preuve et la génération de définitions. Il y avait donc un réel enjeu dans l'explicitation de l'activité de définition, au niveau épistémologique.

- Le second niveau est d'ordre didactique : le processus de définition a été très peu investigué en tant que tel dans la communauté didactique internationale. L'étude même de l'activité de définition occupe en fait une place discrète, mais récurrente dans les travaux internationaux, depuis les années 90 : déjà soulignée par Mariotti & Fischbein en 1997, elle apparaît aujourd'hui dans des travaux plus récents comme une ouverture pour appréhender les concepts mathématiques, dans une nouvelle perspective d'enseignement. Nous avons réalisé une synthèse critique des travaux existants, synthèse qui n'existait pas encore à ce jour dans la littérature internationale (Ouvrier-Buffet, 2013 ; partie II). Nous avons ainsi mis en évidence les invariants dans ces études relatifs aux concepts mathématiques retenus et aux types de situations expérimentées, mais aussi les éléments pertinents pour enrichir la modélisation que nous proposons de l'activité de définition, notamment au niveau des cadres théoriques et méthodologies didactiques. Nos travaux épistémologiques et nos analyses didactiques ont permis de modéliser l'activité heuristique de définition en mathématiques et de montrer l'efficacité de cette modélisation à trois niveaux : elle permet en effet de concevoir des situations impliquant la construction de définitions, de présenter une analyse *a priori* orientée sur l'activité de définition et la construction de concepts, de baliser et d'analyser le processus de formation de concept des étudiants et ainsi d'anticiper la gestion de situations impliquant une telle activité de construction de définitions. Les expérimentations ont été essentiellement conduites avec des étudiants de première année d'université, et ouvrent de réelles perspectives pour l'enseignement des mathématiques dans le supérieur, mais aussi pour le secondaire et la formation des enseignants.

## 1.3. Questionnements épistémologique et didactique, méthodologie

L'enjeu a été de parvenir à une modélisation prenant ses sources au niveau épistémologique, mettant en évidence la dialectique entre l'activité de définition et l'activité de preuve, et cela dans une perspective didactique (conception, analyse et transmission de situations de définition). À cette fin, nous avons exploité et articulé deux axes : un axe de recherche au niveau épistémologique et un axe de recherche au niveau didactique.

**Au niveau épistémologique**, la question de recherche était la suivante : comment modéliser

l’activité mathématique de définition au sein de l’activité mathématique ?
Plusieurs points d’appui ont servi notre étude et nous avons exploré différents axes de travail. Nous avons tout d’abord analysé et modélisé le travail de Lakatos (1961, 1976) : celui-ci propose en effet une explicitation de la démarche de recherche en mathématiques, avec un focus sur le processus de définition et de formation de concepts. Ce travail épistémologique, basé sur deux exemples de réécriture historique de construction de concepts, devait être étudié de manière spécifique afin de mettre en évidence et enrichir la description de l’activité de définition en mathématiques proposée par Lakatos (1961, 1976).
Nous avons montré dans (Ouvrier-Buffet, 2013) que l’outil théorique des conceptions (celui de Balacheff, 1995) permettait de structurer, enrichir et rendre opérationnels les apports de Lakatos. Nous avons ainsi modélisé ce que nous avons appelé la conception lakatosienne (Lakatos étant le représentant principal de cette conception). Les autres référents épistémologiques retenus dans nos travaux, pour accéder à un spectre complet de l’activité de définition, sont Aristote (dimension langagière et logicienne) et Popper (dimension axiomatique et construction de théories). Nous reviendrons ci-après (§3.3) sur ces trois conceptions qui représentent la première composante de notre modélisation de l’activité de définition.
Nous avons également relié l’activité de définition au processus de preuve. La dialectique définition-preuve est difficile à caractériser dans la pratique d’une recherche en mathématiques. Une analyse de l’activité des chercheurs via des entretiens a été conduite pour approfondir cet aspect et l’intégrer dans notre modélisation de l’activité de définition. Les résultats de ce travail seront présentés au paragraphe 3.4 via la deuxième composante, à savoir les quatre moments de l’activité de définition.
Par ailleurs, nous avons cherché à caractériser les types de situations mathématiques et les types de concepts « se prêtant mieux » à une activité de définition et à décrire les processus définissants possibles. Les types de problèmes permettant une activité de définition ont fait l’objet d’une recherche spécifique (Ouvrier-Buffet, 2013 ; partie III) et seront listés au paragraphe 3.5, constituant la troisième composante de notre modélisation.

**Au niveau didactique**, une double question de recherche découlant naturellement de l’étude épistémologique était la suivante : comment rendre notre modélisation épistémologique appropriée (choix, portée, limites) pour un usage didactique et quelles sont les nouvelles perspectives didactiques apportées par cette modélisation ?
Au niveau de la modélisation théorique, il a été nécessaire de considérer le niveau des µ conceptions (Balacheff & Margolinas, 2005) et une redéfinition des problèmes. Nous reviendrons sur ces aspects théoriques ci-après. Nous avons dû adapter ces éléments théoriques pour l’étude du concept de définition, dont la transversalité posait problème. Les résultats expérimentaux existants, montrant en particulier la faisabilité de la mise en œuvre de situations impliquant une activité de définition (à différents niveaux de l’enseignement et de la formation des enseignants), ont également servi pour une validation extrinsèque de la modélisation. La pertinence de la modélisation théorique a été éprouvée au niveau expérimental (voir par exemple Ouvrier-Buffet, 2011) et a démontré l’intérêt de l’enrichissement nécessaire du modèle (Ouvrier-Buffet, 2012) développé dans (Ouvrier-Buffet, 2013 ; partie III). La quatrième composante de notre modélisation présente une méthodologie pour concevoir et analyser des situations impliquant une activité de définition : elle sera présentée au paragraphe 3.6.

## 2. PANORAMA CRITIQUE DES TRAVAUX EXISTANTS SUR L'ACTIVITE DE DEFINITION

L'un des apports de notre recherche réside dans ce panorama. Il existe en effet des études disjointes impliquant l'activité de définition en mathématiques, mobilisant des cadres théoriques différents. Il était donc normal de s'interroger sur la portée de ses cadres et sur les interrelations possibles. Nous en reprenons ici les principaux résultats, sans revenir sur la description même des cadres théoriques. Le panorama complet est présenté dans la note de synthèse (Ouvrier-Buffet, 2013), ainsi que la mise en évidence des interrelations entre les travaux existants.

### 2.1. Trois types de recherche

Notre analyse critique a permis de souligner des points de convergence et a mis en évidence trois types de recherches :

1) Des reprises récurrentes du travail épistémologique de Lakatos (1976) qui apparaît comme prédominant. Dans ces travaux cependant, aucune modélisation ni critique de l'utilisation didactique de Lakatos n'ont été conduites. Nous avons donc pris en charge ce travail.

2) Une dimension cognitive découlant des travaux de Freudenthal (1973) et de Vinner (1991).

3) Une modélisation épistémologique de conceptions sur la construction de définitions à usage didactique (l'ensemble de nos travaux).

Dans les travaux de type 1) et 2), les aspects philosophiques et épistémologiques sont parfois présents mais rarement, et ils convergent essentiellement vers la vision de Lakatos. De plus, la conception, l'analyse, la reproductibilité, et donc la gestion, des situations impliquant une activité de définition en classe (niveau primaire, secondaire ou supérieur) ne sont pas prises en charge ou lorsqu'elles le sont, cela reste très vague. C'est à ces deux aspects en particulier, à savoir la modélisation épistémologique de l'activité de définition et sa transposition didactique, que notre travail de recherche sur l'activité de définition a apporté des réponses.

### 2.2. Spécificités des expérimentations conduites

Dans l'ensemble des travaux internationaux (à l'exception des nôtres), les conditions expérimentales sont toujours très spécifiques. Il s'agit d'expérimentations pilotées par les chercheurs eux-mêmes, avec des effectifs restreints (de 2 à 15 élèves voire 25 étudiants), parfois même avec des élèves surdoués. Le travail de recherche des étudiants est toujours un travail en groupe avec des supposées institutionnalisations pilotées par le gestionnaire de la situation (ces institutionnalisations ne sont pas décrites ni questionnées, mais leur existence transparait dans les articles présentant les travaux). Lorsqu'une activité de définition des étudiants est décrite, les leviers qu'utilise(nt) le(s) gestionnaire(s) de la situation et qui permettent une évolution des processus des étudiants ne sont pas explicités.

Si nous nous intéressons maintenant aux spécificités des situations et concepts utilisés dans ces expérimentations, nous pouvons noter que :

- les types de situations impliquant une activité de définition sont de deux types : il s'agit principalement de redéfinition de concepts familiers ou de changement de cadre de concepts déjà connus des étudiants ;
- les concepts mathématiques utilisés dans les expérimentations sont hors curricula ou déjà partiellement connus des étudiants ;
- le matériel à la disposition des étudiants peut aussi inclure un manuel comprenant des éléments qui vont être utiles au processus des étudiants, voire des définitions de départ.

Ces caractéristiques, tant au niveau des dispositifs et de la gestion que des situations et

concepts retenus, posent de manière forte la question de l'implémentation de situations impliquant une activité de définition en classe, quel que soit le niveau, et de la gestion de celles-ci.
Notre modélisation de l'activité de définition permet de rendre explicite le processus de définition et d'apporter un nouvel éclairage sur les travaux existants afin de montrer leur reproductibilité.

## 2.3. Apports de nos travaux en regard des précédents

Pour compléter ce panorama, rappelons ici brièvement les résultats apportés par nos travaux (Ouvrier-Buffet, 2003 ; 2006 ; 2011). Nous avons mis en évidence différents types de définitions qui s'articulent dans le processus de construction de définitions en mathématiques et entrent en dialectique avec le processus de preuve : les « définitions-en-acte », les « zéro-définitions », et les « *proof-generated definitions* », mais aussi ce que nous avons identifié et nommé « définitions formalisées » et « définitions théoriques » (voir les composantes 1 et 2 de notre modélisation ci-après). Les zéro-définitions et *proof-generated definitions* sont empruntées au travail de Lakatos. Quant aux définitions-en-acte, nous avons démontré leur existence et la nécessité de les considérer et de les définir précisément afin d'accéder à une caractérisation complète du processus de définition. Les définitions formalisées et définitions théoriques viennent compléter notre modélisation, et sont d'un autre ordre que les précédentes, nous y reviendrons ci-dessous.
Par ailleurs, notre modélisation du processus de définition a révélé son opérationnalité didactique, à trois niveaux :

- la conception et l'analyse a *priori* de situations impliquant une activité de définition, et, avec elles, l'analyse des processus définissants possibles ;
- la caractérisation des différents processus de définitions des étudiants, rendus observables par les éléments constitutifs de notre modélisation ;
- et la gestion de situations impliquant une activité de définition : en effet, notre modélisation met en évidence des leviers à la disposition du gestionnaire de la situation qui lui permette de proposer des rétroactions lors de blocages avérés. Les rétroactions sont de différents niveaux et sont décrites dans les opérateurs et contrôles des conceptions de notre modélisation.

Nos expérimentations ont porté principalement sur l'étude de concepts discrets et problèmes issus des mathématiques discrètes, au niveau du supérieur (première année d'université), donc hors curricula. Nous avons bénéficié de faibles effectifs (une dizaine ou une vingtaine d'étudiants travaillant en groupes). L'une des caractéristiques principale des concepts et problèmes que nous avons utilisés réside dans leur accessibilité par leurs représentations et leur exploration. Par ailleurs, certains des concepts que nous avons utilisés sont encore en construction dans la recherche mathématique (objets géométriques discrets ; problème de Frobenius), ce qui permet de créer des conditions où étudiants et gestionnaire de la situation disposent d'un même bagage conceptuel face à une situation impliquant un « nouveau » concept.
Les types de situations utilisées dans nos expérimentations étaient principalement des situations de classification, la preuve étant un lieu de validation des définitions construites (il n'était pas question de viser l'émergence d'un lemme caché à la Lakatos). Nous avons également investi de manière exploratoire les niveaux primaires et secondaire en travaillant sur une situation de classification sur la convexité (en primaire) et sur le concept d'arbre (dans le secondaire), avec les mêmes types de résultats qu'au niveau supérieur quant à l'efficience des outils didactiques que nous avons élaborés, à l'implication des élèves dans l'activité et à leur capacité à prendre la responsabilité de rédiger des définitions.

## 2.4. Des concepts « favorables » à une activité de définition

Dans les travaux impliquant une activité de définition, ou plus souvent de redéfinition de concepts, les concepts considérés étaient :

- soit nouveaux (et peu enseignés dans les curricula actuels) mais accessibles et permettant de générer facilement un premier *concept image* ;
- soit déjà familiers des étudiants et revisités, éventuellement dans un autre cadre mathématique.

Il est important de préciser ici les différentes caractéristiques des concepts que nous pouvons considérer comme de « bons candidats » à une activité de définition. Ce sont des concepts :

- possédant plusieurs définitions équivalentes, définitions pouvant être formulées dans des systèmes de représentations symboliques différents ;
    - dont l'accessibilité via des représentations et/ou l'exploration de problèmes est avérée ;
- appartenant à différents champs des mathématiques (c'est le cas des objets appartenant à différentes géométries) : il est vrai que la transposition des objets d'un champ à un autre implique une activité de définition, mais aussi de changement d'axiomatique et donc nécessite une exploration du nouveau concept, parfois en s'affranchissant de connaissances antérieures afin d'avoir un regard neuf sur le concept ;
- pour lesquels il est aisé de générer des questionnements naturels (c'est le cas lors de l'exploration de problèmes combinatoires ou lors de l'essai de transposition d'une axiomatique géométrique au cas de la géométrie discrète par exemple) ;
    - pour lesquels l'enseignant se retrouve dans la même position de chercheur que l'étudiant.

Les concepts issus des mathématiques discrètes impliqués dans des problèmes de combinatoire, d'arithmétique, de théorie des graphes, de géométrie discrète, de géométrie combinatoire, vérifient ces différentes conditions et se prêtent particulièrement à une activité de définition (cela a été démontré dans Ouvrier-Buffet, 2006 et 2011).

# 3. MODELISATION DE L'ACTIVITE DE DEFINITION EN MATHEMATIQUES ET ENJEUX DIDACTIQUES : UN MODELE SUIVANT 4 COMPOSANTES

## 3.1. Présentation succincte de la modélisation

Nous avons donc modélisé l'activité de définition selon quatre composantes :

- La première concerne les trois conceptions épistémologiques de l'activité de définition, enrichies et validées par les travaux en didactique et des entretiens avec des mathématiciens. Les conceptions sont présentées ci-après sous forme de tableaux, avec le modèle cK¢. Il s'agit des conceptions lakatosienne, aristotélicienne, et poppérienne.
- La deuxième composante est une meilleure définition des problèmes, permettant également de générer de nouveaux problèmes impliquant une activité de définition (avec appui sur le concept de « problèmes » issu de la théorie de la complexité).
- Nous y ajoutons une troisième composante qui s'attache à décrire quatre moments de travail sur la définition (issu des entretiens avec les mathématiciens) : cette composante intègre en particulier le niveau « en-acte » qui n'est pas présent dans la modélisation via les conceptions mais où certains opérateurs et contrôles peuvent déjà intervenir. Ces moments ne sont pas hiérarchiques mais coexistent et interagissent. Ils sont éclairés par les conceptions et montrent que celles-ci s'articulent et coexistent dans l'activité de définition.

- La quatrième et dernière composante est une méthodologie pour concevoir et analyser des situations impliquant une activité de définition.

## 3.2. Le choix d'un modèle permettant de rendre compte des conceptions des mathématiciens

Nous considérons que l'idée générale sous-jacente à l'utilisation d'un modèle pour les conceptions est triple. Il s'agit de traduire la pluralité des « points de vue » sur un concept mathématique, mais aussi l'adaptation de tel ou tel point de vue pour résoudre différents problèmes et la définition des éléments opératoires permettant la résolution de ces problèmes. Cela implique de s'interroger sur le fonctionnement des conceptions, sur les problèmes, outils, et signifiants qui les différencient, mais aussi sur la façon dont elles peuvent permettre d'interpréter des erreurs et misconceptions. Il s'agit également, de manière plus globale, de parvenir à différencier un savoir mathématique, un savoir à transmettre, un savoir effectivement transmis. Ces éléments ont guidé notre choix d'un outil théorique permettant de circonscrire l'activité de définition.

### *3.2.1. Les conceptions au sens de Balacheff : le modèle cK¢*

Balacheff (1995), s'inscrivant dans la théorie des situations de Brousseau (1986), considère le système [Sujet <> Milieu] et qu'une conception est une propriété émergente des interactions au sein de ce système. Une conception est alors définie comme une « modélisation cognitive rendant compte des régularités des conduites d'un sujet relativement à un cadre. » (Balacheff, 1995, p. 228). Nous avons donc retenu le modèle de conception de Balacheff (repris dans Balacheff & Margolinas, 2005) qui s'appuie sur la notion de concept de Vergnaud (1991) et l'enrichit avec les structures de contrôles (qui se sont avérées nécessaires lors de l'exploration de conceptions dans des EIAH). Deux niveaux d'invariants interviennent : les opérateurs (R) qui permettent d'agir sur un problème et les structures de contrôle ($\sum$) qui justifient et valident l'utilisation des opérateurs. Une dialectique forte existe entre opérateurs et contrôles, et c'est là l'un des intérêts de ce type de modélisation qui se révèle particulièrement adaptée pour modéliser un processus dynamique tel celui de construction de définition et décrire ses observables. Une conception est alors décrite par un quadruplet (P, R, L, $\sum$) où :

- P est un ensemble de problèmes sur lesquels la conception est opératoire ; P décrit le domaine de validité de la conception.
- R est un ensemble d'opérateurs. Ceux-ci permettent la transformation des problèmes. Ils sont attestés par des productions et des comportements du sujet.
- L est un système de représentation qui permet d'exprimer les éléments de P et de R. À l'image du modèle proposé par Vergnaud, les éléments de L sont langagiers ou non.
- $\sum$ est une structure de contrôle qui assure la non contradiction de la conception. Les contrôles sont des outils de décision sur la légitimité de l'usage d'un opérateur et sur l'état du problème (résolu ou non).

### *3.2.2. Conceptions de référence et savoir savant*

Il est nécessaire de considérer des conceptions « de référence » qui font autorité, impliquant les savoirs de référence. La conception Cμ a été introduite par Balacheff (1995) comme plus générale que toutes les autres conceptions (son existence est un postulat) : Cμ est la conception de référence pour un μ-objet (μ est l'univers de référence composé de l'ensemble des concepts mathématiques). Ainsi, pour chaque concept, une conception Cμ domine, et c'est celle-ci qui sera caractérisable et accessible lorsque nous cherchons à modéliser un savoir savant. La complexité de notre recherche a été d'accéder au concept de définition qui n’appartient pas à un savoir savant unique et explicite mais à une pratique de mathématicien relevant en grande partie de sa sphère privée. L’avantage de théoriser par les µ-conceptions réside dans le fait qu’il s’agit en fait d’instances d’un concept. Cet éclairage théorique nous a permis de focaliser également sur la définition des problèmes (dans le couple sujet/problèmes), jusqu’alors insatisfaisante, et de poursuivre les questionnements relatifs aux perturbations [Sujet <> Milieu].

### *3.2.3. Les objectifs de la modélisation de conceptions par le modèle cK¢*

Il s’agissait d’utiliser ce modèle pour structurer l’exposé d’un nombre minimal de µ-conceptions, significatives relativement aux différents niveaux de préoccupations sur la définition (que ce soit des aspects relatifs à la dénomination, à la preuve, à la construction de théories etc.). L’explicitation des opérateurs et des contrôles de ces conceptions nous a permis de mettre en valeur les composantes importantes dans tout processus de construction de définitions, et d’apporter un cadre à visée didactique, en vu de l’analyse de procédures de différents sujets (étudiants, enseignants, mais aussi mathématiciens). Rappelons que l’une des difficultés reconnues du modèle cK¢ est la définition de l’ensemble des problèmes caractérisant une conception. Nous pouvons aussi remarquer qu’il est tout aussi difficile d’accéder à une situation fondamentale. En ce qui concerne les concepts, ce que développe Vergnaud est également sujet au même genre de difficulté. La question de la définition des problèmes a été reprise, pour aller au-delà de ces situations, et représente l’une des originalités de notre travail.

## 3.3. Composante 1 de notre modélisation – Trois conceptions pour modéliser l’activité de définition

### *3.3.1. Pourquoi Aristote, Popper, et Lakatos ?*

L’étude de ces trois conceptions nous a apporté effectivement une complémentarité sur le concept de définition : la conception aristotélicienne développe des composantes logiques et langagières (étude du discours), celle de Popper propose une théorie de la théorie (étude théorique), et la conception lakatosienne s’intéresse à la construction de définitions parallèlement à la construction de concepts (étude heuristique). Ces choix sont aussi étayés par une étude des typologies des définitions présentée dans Ouvrier-Buffet (2007). La présentation synthétique des conceptions qui suit est reprise et argumentée plus en détail dans (Ouvrier-Buffet, 2013).

### *3.3.2. Conception aristotélicienne*

Aristote présente essentiellement le processus dit de définition par *genre et différences spécifiques*. Nous avons décrit sa conception pour les dimensions logique et langagière qu’elle renferme, mais aussi pour la problématique de « résistance aux contradicteurs » que propose Aristote dans sa présentation des définitions (Aristote, 1965). La caractérisation de cette conception a été réalisée à partir des textes d’Aristote (Aristote, 1965 & 1970). Concernant la question de l’existence, Aristote considère qu’elle n’a pas à être prise en charge dans la définition, mais que la question se posera. Il s’agit en fait d’éviter des contradictions en s’assurant de l’existence. Nous avons ainsi intégré la question de l’existence de l’objet défini à la conception aristotélicienne (Poincaré par exemple précise lui aussi que la définition comprend un axiome qui affirme l’existence de l’objet) au niveau des contrôles.

| | |
|---|---|
| **Problèmes (P) :**<br>Classification (l’exemple de la géométrie est donné), et plus généralement : tout problème où une délimitation (au sein d’un même *genre* par exemple) est possible.<br><br>**Systèmes de représentation (L) :**<br>- Langage et règles du discours<br>- Logique<br>- Systèmes de représentations propres au(x) concept(s) en jeu | |
| **Opérateurs (R)** | **Contrôles (∑)** |
| $\mathbf{R}_1^{\mathbf{A}}$ : procéder par *genre et différences spécifiques* (cela revient à rechercher des invariants au sein d’une classe).<br>$\mathbf{R}_2^{\mathbf{A}}$ : supprimer toute redondance.<br>$\mathbf{R}_3^{\mathbf{A}}$ : supprimer toute régression à l’infini.<br>$\mathbf{R}_4^{\mathbf{A}}$ : prouver l’équivalence entre définitions.<br>$\mathbf{R}_5^{\mathbf{A}}$ : formuler une définition esthétique (simple quant au langage). | - **Pôle « Logique »** : proscrire les cercles vicieux, les termes antérieurs doivent être définis. Une définition est une condition nécessaire et suffisante. L’unicité du concept défini doit être vérifiée.<br>- **Pôle « Langage et logique »** : proscrire les redondances et régressions à l’infini (d’où l’existence de termes primitifs) ; pas de métaphores ni homonymes.<br>- **Pôle « Essentialisme »** : interroger l’existence des concepts définis. |

*Tableau 1 – Conception aristotélicienne*

### *3.3.3. Conception poppérienne*

| | |
|---|---|
| **Problèmes (P) :** choix entre théories concurrentes<br>**Systèmes de représentation (L) :** relatifs aux théories et concepts en jeu | |
| **Opérateurs (R)** | **Contrôles (∑)** |
| $\mathbf{R}_1^{\mathbf{P}}$ : génération de contre-exemples (processus de réfutations).<br>$\mathbf{R}_2^{\mathbf{P}}$ : ne rien dériver d’une définition car une définition est un raccourci de langage.<br>$\mathbf{R}_3^{\mathbf{P}}$ : réduire le nombre de postulats et voir si la théorie explique davantage de choses au regard de telle ou telle définition.<br>$\mathbf{R}_4^{\mathbf{P}}$ : construire une axiomatique locale (composée de définitions, axiomes, propositions)<br>$\mathbf{R}_{\mathbf{4bis}}^{\mathbf{P}}$ : mettre à l’épreuve une axiomatique locale. | - **Pôle « heuristique »** : Résistance aux réfutations<br>- **Pôle « théorique »** : « Une théorie $t_2$ dépasse une théorie $t_1$ lorsque :<br>1) $t_2$ formule des assertions plus précises que ne le fait $t_1$, et celles-ci résistent à des tests plus précis.<br>2) $t_2$ prend en compte et explique davantage de faits que $t_1$.<br>3) $t_2$ décrit ou explique les faits de manière plus détaillée que $t_1$.<br>4) $t_2$ a subi avec succès des tests où $t_1$ avait échoué.<br>5) $t_2$ a permis de nouveaux tests expérimentaux qui n’avaient pas été envisagés avant que cette théorie n’ait été conçue, et a subi ces tests avec succès.<br>6) $t_2$ a permis d’unifier ou de relier divers problèmes qui étaient jusque-là sans rapport. » (Popper, 1985, p. 344)<br>- **Pôle « méta »** : Contrôle appelé « savoir métascientifique » par Popper : « Celui-ci est visiblement de nature intuitive, et prétend que nous savons ce que doit être une bonne théorie scientifique, avant même qu’on ait procédé à des tests. » (Popper, 1985, p. 322). |

*Tableau 2 – Conception poppérienne*

Popper se distingue par son rejet de l’essentialisme aristotélicien. Il s’inscrit dans le courant du nominalisme méthodologique qui « entreprend de décrire comment la chose se comporte selon les circonstances, et plus particulièrement, de déterminer si ce comportement obéit à des règles constantes. » (Popper, 1962, p. 34). Les définitions ne sont pas centrales dans sa problématique, mais sa recherche d’une méthodologie scientifique est complémentaire à ce que l’on trouve dans *Preuves & Réfutations* de Lakatos. L’apport principal de Popper pour la description des conceptions réside dans des opérateurs centrés sur la construction d’une théorie scientifique et dans les structures de contrôles.

### 3.3.4. Conception lakatosienne

<table>
<tr><td colspan="2">Problèmes (P) : - Problèmes intramathématiques (recherche du domaine de validité d'une conjecture, détermination de la validité d'une preuve)<br>- Classification<br>Système de représentations (L) : - Représentations du (ou des) concept(s) mathématique(s) en jeu<br>- Systèmes de représentation interne aux mathématiques<br>- Systèmes de représentation en jeu lors d'un changement de cadre (il peut s'agir d'un changement de représentation symbolique)</td></tr>
<tr><th>Opérateurs (R)</th><th>Contrôles (∑)</th></tr>
<tr><td>$\mathbf{R}_1^L$ : générer des exemples et contre-exemples (conséquences sur la définition produite)<br>$\mathbf{R}_{1.1}^L$ : exclure de la définition une classe d'objets contenant les contre-exemples (monster-barring).<br>$\mathbf{R}_{1.2}^L$ : exclure de la définition une classe d'objets qui est la classe des contre-exemples (exception-barring).<br>$\mathbf{R}_{1.3}^L$ : réinterpréter les termes de la définition pour que les contre-exemples n'en soient plus (monster-adjustement).<br>$\mathbf{R}_{1.4}^L$ : défendre la définition en l'étendant (en incluant une nouvelle classe d'objets) - généraliser la conjecture (monster-including).<br>$\mathbf{R}_2^L$ : rédiger une zéro-définition.<br>$\mathbf{R}_3^L$ : utiliser une définition dans une preuve (mise à l'épreuve de la définition, retour sur la nature des contre-exemples).<br>$\mathbf{R}_4^L$ : changer de cadre.<br>$\mathbf{R}_5^L$ : formuler un nouveau problème. Cet opérateur est très vaste et peut comprendre :<br>- générer des exemples et/ou des contre-exemples (recherche d'un processus pour une génération systématisée) ;<br>- questionner la validation et la portée de faits expérimentaux ; étudier des cas limites ;<br>- formuler un lemme ;<br>- formuler une nouvelle conjecture, interroger sa validité et sa généralisation (voir ci-dessous);<br>- structurer une stratégie (de preuve ou de définition ou de recherche d'algorithme ou autre), interroger sa validité et sa généralisation ;<br>- structurer un plan de preuve ;<br>- formuler des sous-problèmes : il s'agit en particulier de l'étude de cas particuliers et de la question de la généralisation des résultats alors obtenus par une telle étude ;<br>- formuler un problème plus général ;<br>- formuler le problème dual (et définir le dual du concept en jeu) ;<br>- interroger la validité de la preuve ;<br>- problématiser d'autres preuves.<br>$\mathbf{R}_6^L$: formuler une proof-generated definition (lemmes cachés).</td><td>- Pôle « heuristique » : Contrôle de la validité d'une assertion par des exemples. Contrôles par interaction avec des pairs.<br><br>- Pôle « preuve » : notion de proof-generated definitions (contrôles issus de la dialectique preuve-définition), liée à un changement de cadre ou non (il peut s'agir d'une validation de la zéro-définition, mais aussi de l'émergence d'un concept via un lemme caché).<br><br>- Pôle « philosophique et logique » : voir la conception aristotélicienne.<br><br>- Pôle « axiomatique » : voir la conception poppérienne car le niveau axiomatique est en dehors du cadre explicite de Lakatos.<br><br>- Pôle « structurel » : contrôles relatifs à un changement de cadre (insuffisamment explicité et étudié chez Lakatos, mais découlant de $\mathbf{R}_4^L$).<br><br>- NB : il n'y a pas de critère de fin explicite du processus de Preuves & Réfutations, donc pas de contrôle de fin.</td></tr>
</table>

*Tableau 3 – Conception lakatosienne*

La conception lakatosienne, telle qu'elle est dans *Preuves & Réfutations*, inclut les conceptions aristotélicienne et poppérienne, mais se concentre sur le processus de génération de concepts en laissant une place privilégiée aux définitions : c'est ce processus qui est décrit dans la conception présentée dans le tableau suivant. Une étude complète et critique de *Preuves & Réfutations* est présentée dans Ouvrier-Buffet (2013).

Nous avons également décrit d'autres sous-opérateurs, notamment de $\mathbf{R}_5^L$, dans la note de synthèse (Ouvrier-Buffet, 2013).

## 3.4. Composante 2 de notre modélisation – Quatre moments de l'activité de définition

Nous présentons ici, au vu des entretiens avec les mathématiciens et les travaux existants, quatre moments de l'activité de définition. Ces moments n'ont pas pour vocation d'être hiérarchisés et ne présentent pas une activité linéaire. Ils sont en interrelation. Nous allons les mettre en regard de la fonction des définitions et des conceptions. L'objectif de la définition de ces moments est de mettre en relation les conceptions et leur opérationnalité, les types de problèmes (de manière globale) liés à l'activité mathématique de recherche, et ainsi de donner un panorama de l'activité de définition dans la recherche mathématique. La dénomination que nous avons retenue pour ces moments est en relation avec les différents types de définition : définitions-en-acte, zéro-définitions, *proof-generated definitions*, et définitions théoriques (ce dernier terme s'inscrit dans la construction axiomatique d'une théorie, locale ou plus globale). Cette vision a pour vocation de donner une image dynamique et globale de l'activité de définition (voir Figure 1 ci-après).

### *3.4.1. Le moment « en-acte »*

Il s'agit du lieu de l'intuition des objets, des idées, des résultats. L'activité mathématique pendant ce moment est principalement une activité d'exploration et d'imprégnation d'un ou de plusieurs problèmes, mais aussi des objets en jeu pour mieux les connaître (fréquentation d'exemples, non-exemples, contre-exemples). Des analogies et des champs mathématiques voisins peuvent alors être mobilisés, de même que des problèmes plus faibles peuvent être formulés. C'est là que des définitions-en-acte et des *concept image* apparaissent. Ici, la conception lakatosienne est opérationnelle, les opérateurs concernant les changements de cadres et formulations de problèmes, mais aussi la génération d'exemples et contre-exemples étant prédominants.

### *3.4.2. Un moment intermédiaire entre « en-acte » et « zéro ». Lien possible avec le moment « axiomatique »*

Ce moment a deux versants : il s'agit de faire des premières catégories d'objets, de classer et d'exploiter des classifications existantes, mais aussi d'essayer des analogies et de faire des liens avec des concepts existants et théories existantes. Ce qui oriente l'activité de définition ici est principalement la classification, la catégorisation d'objets, et la dénomination de ceux-ci. Les conceptions aristotélicienne et lakatosienne peuvent être opérationnelles. C'est dans le lien avec le moment « axiomatique » et les ponts réalisés avec des théories axiomatiques préexistantes que nous retrouverons la conception poppérienne.

### *3.4.3. Le moment « zéro »*

C'est le lieu des zéro-définitions (définitions de travail) mais aussi de définitions locales de portée plus faible. L'activité mathématique peut se décrire avec des opérateurs lakatosiens (par exemple : utiliser et construire des exemples et contre-exemples, reléguer les monstres) et intègre également d'autres aspects : faire des choses fausses, accéder à une idée de la preuve (la preuve forçant les concepts et les définitions selon les mathématiciens). Ainsi, les zéro-définitions et autres définitions locales auront ici différentes fonctions : nommer ; proposer différentes voies d'accès sur un concept ; travailler sur la preuve ; délimiter le domaine d'applicabilité d'une idée, d'une conjecture ou d'une preuve ; communiquer. L'opérateur lakatosien « changer de cadre » pourra aussi être mobilisé et un lien pourra être construit avec le moment « axiomatique », en particulier pour les changements de cadres où existe déjà une théorie (finalisée ou locale, voire même en construction).

### *3.4.4. Le moment « formalisé »*

Nous avons retenu cette dénomination afin de souligner l'importance de la dimension « communication » qui intervient à la fois pendant la recherche heuristique mais aussi lors d'une nécessité de formalisation. Il peut s'agir d'une communication impliquant un assujettissement aux règles de l'institution considérée (discussion, séminaire, prépublication etc.) et/ou de la rédaction d'un texte davantage formalisé permettant de régler des inférences. Un saut d'abstraction est réalisé par rapport au moment « zéro ». L'activité mathématique pendant ce moment « formalisé » s'appuie sur certains contrôles de nature lakatosienne tels que : une bonne résistance des définitions et conjectures et/ou preuves et donc la fin des contre-exemples. Lorsqu'une preuve est en jeu, des *proof-generated definitions* peuvent émerger. Des opérateurs poppériens peuvent également être mobilisés, notamment en ce qui concerne l'élaboration d'axiomatiques locales. La rédaction de définitions formalisées impliquera de fait la convocation de la conception aristotélicienne (la recherche de l'esthétisme des définitions construites apparaîtra vraisemblablement aussi), et l'accès au *concept definition* de Vinner (1991). Par ailleurs, la formulation de nouveaux problèmes que nous avons identifiée et décrite dans l'un des opérateurs lakatosiens permettra à l'activité mathématique de se poursuivre et d'explorer de nouvelles ramifications au problème initial. Il s'agit essentiellement d'interroger la généralisation et l'utilisation des définitions, problèmes et résultats, mais aussi la compréhension des nouveaux concepts (ce qui rejoint la dimension « communication » précédemment évoquée). L'exploration de concepts voisins ouvrira également de nouvelles perspectives de travail et s'inscrira dans un nouveau moment « en-acte ».

### *3.4.5. Le moment « axiomatique »*

Nous avons choisi de nommer les définitions produites dans ce moment « théoriques » afin de souligner leur inscription dans une théorie. Il s'agit ici de construire une théorie (qui pourra être momentanément locale) et d'introduire de nouveaux concepts au sein de cette théorie, donc de répondre à certaines contraintes axiomatiques, ce qui nous permet de mettre en évidence l'opérationnalité de la conception poppérienne (NB : l'opérateur concernant la résistance aux réfutations est encore présent). La construction de la théorie en question sera guidée par la recherche du plus petit nombre de conditions initiales pour obtenir le plus grand nombre de résultats et/ou des résultats de plus grande portée. L'axiomatisation pourra également être conduite au-delà du champ mathématique initialement considéré pour unifier des concepts (c'est le cas dans les notions FUG, cf. Dorier et *al*. (1997)). La transposition de concepts à d'autres champs mathématiques ouvrira également de nouvelles perspectives et de nouveaux champs de recherche (c'est le cas par exemple de la topologie et de la géométrie des espaces de Banach).

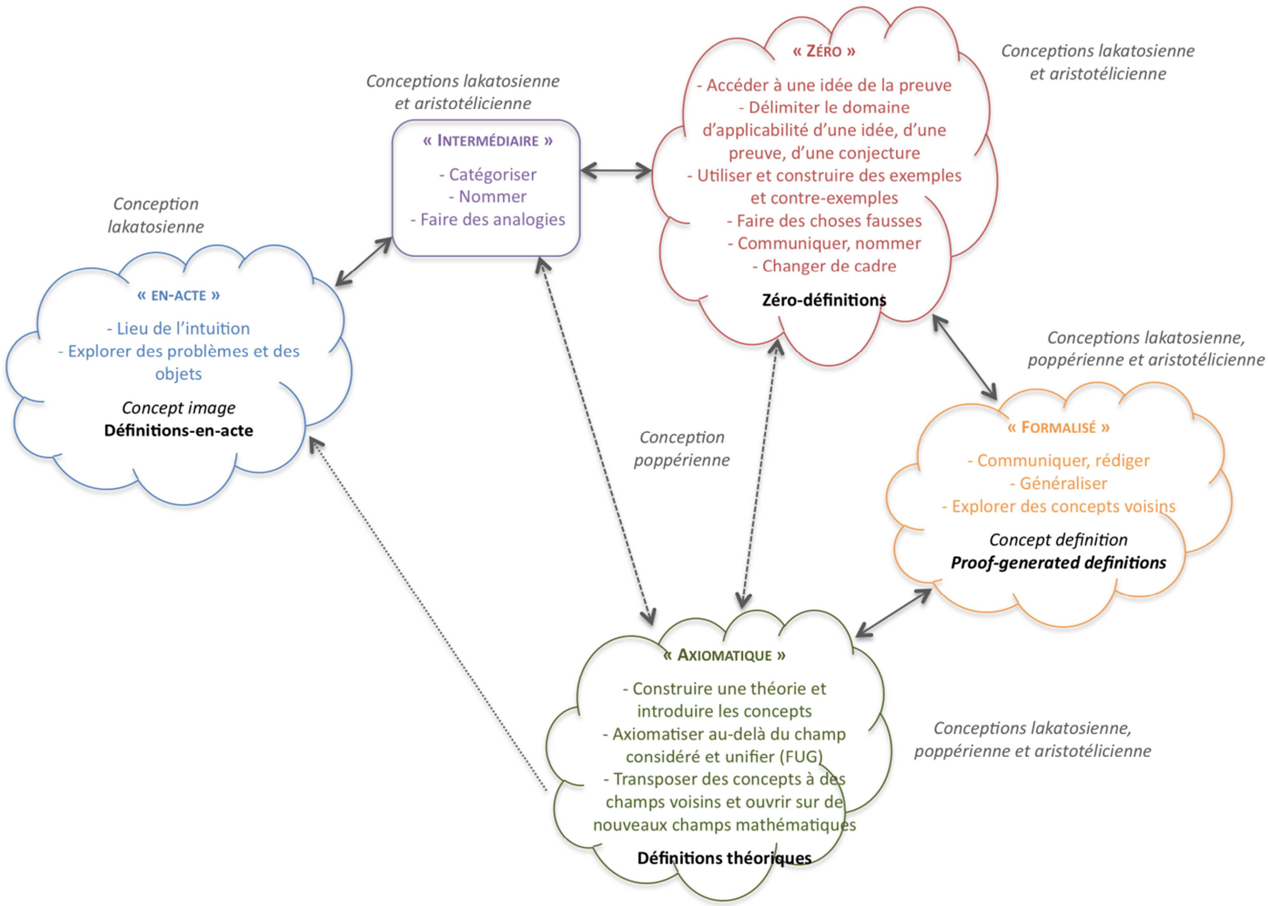


*Figure 1 – Représentation globale de l'activité de définition dans la recherche mathématique*

## 3.5. Composante 3 de notre modélisation – Une définition de l'ensemble des problèmes impliquant une activité de définition

### *3.5.1. La question de la définition des problèmes*

Dans le cadre de l'utilisation du modèle des conceptions de Balacheff (1995), la question de la définition des problèmes P du quadruplet (P, R, L, $\sum$) se pose ainsi :

> Nous appelons problèmes les perturbations du système. Le domaine de la validité de la conception, ou sphère de pratique, est constitué de l'ensemble des problèmes que la conception permet de résoudre et qui ne conduisent pas à une rupture de l'équilibre du [Sujet <> Milieu]. (Balacheff & Margolinas, 2005, p. 80)

Cette définition correspond à un besoin de décrire les conceptions d'un sujet dans une situation particulière. Pour décrire les µ-conceptions, il était nécessaire de parvenir à rendre compte des problèmes identifiés comme tels par le savoir savant lui-même. Modeste (2012, p. 57) a proposé une autre définition du terme « problème », adaptée à la description de µ conceptions de l'algorithme. Giroud (2011) a utilisé le même mode de définition pour introduire la notion de « concept-problème » et décrire la démarche expérimentale en mathématiques. Tous deux ont exploité et montré l'efficacité du développement du concept de « problèmes » issu de la théorie de la complexité (Garey & Johnson, 1979). Cette définition de « problèmes » est certes liée aux notions algorithmiques d'entrée et de sortie, mais elle présente l'avantage de formaliser un problème mathématique indépendamment du sujet et du milieu, et ainsi d'accéder à une définition de problèmes pour les µ-conceptions qui nous intéressent dans le cadre de l'exploration épistémologique de l'activité de définition. Il s'est avéré que la définition de « problèmes » de Garey & Johnson (1979) nous a permis dans un premier temps de nous affranchir du sujet et du milieu pour déterminer les couples (I, Q) possibles, et a ouvert dans un second temps l'exploration des types de problèmes envisageables au niveau didactique, en réintroduisant les interactions [Sujet <> Milieu].

Un problème, dans la théorie de la complexité algorithmique, peut être décrit ainsi :

> For our purposes, a problem will be a general question to be answered, usually possessing several parameters, or free variables, whose values are left unspecified. A problem is described by giving: (1) a general description of all its parameters, and (2) a statement of what properties the answer, or solution, is required to satisfy. An instance of a problem is obtained by specifying particular values for all the problems parameters. (Garey & Johnson, 1979, p. 4)

Nous avons donc adopté la définition de problème qui suit reprenant l'ensemble des instances et l'ensemble des questions. Un problème est défini comme un couple (I, Q) : l'ensemble des instances du problème (I) peut être décrit par plusieurs paramètres et la (ou les) question(s) (Q) porte(nt) sur ces instances (spécifiant les propriétés de la solution attendue). Fixer une instance du problème, c'est instancier le problème. Réduire l'ensemble de définitions des instances permet de considérer les sous-problèmes de (I, Q).

### *3.5.2. Les problèmes impliquant une activité de définition*

Nous avons ainsi conduit une étude spécifique et systématique des problèmes impliquant une activité de définition et abouti à une caractérisation suivant trois catégories :

- Catégorie 1 « (Re)définir un concept familier »
- Catégorie 2 « Définir un concept familier dans un autre cadre »
- Catégorie 3 « Définir un nouveau concept ».

Nous avons considéré que la description des problèmes était la caractérisation de problèmes mathématiques posés à des individus non vierges de connaissances et représentations, dans une institution spécifique (non précisée ici mais qui sera à considérer ultérieurement). Ainsi, dans le but d'étudier un sujet S (qui peut être un étudiant, un enseignant, ou un chercheur) en situation de résolution d'un problème impliquant une activité de définition, nous avons étudié les différents couples (Instance(s), Question(s)) possibles avec les instances qui peuvent être des concepts. Pour les catégories 1 et 2, les problèmes portent sur la redéfinition de concepts, que ce soit dans le même cadre mathématique ou dans un nouveau cadre. La catégorie 3 concerne essentiellement les problèmes où, lors de la résolution et/ou d'une preuve en jeu dans ces problèmes, l'on est amené à définir des objets nouveaux dont on va se servir pour avancer dans la preuve. Ces objets peuvent n'avoir qu'un rôle local, mais pas nécessairement : on ne peut pas le décider *a priori*, ce seront des problèmes et utilisations ultérieures qui pourront nous renseigner sur la portée effective de ces concepts. Ce sont ces cas-là qui font le cœur de la catégorie 3.

### *3.5.3. Les couples (Instance(s), Question(s))*

Nous avons choisi de lister les instances et questions possibles pour établir les couples (I, Q) caractérisant les problèmes permettant une activité de définition. En effet, il est très difficile de concevoir une liste exhaustive des problèmes mathématiques permettant une activité de définition, indépendamment des concepts en jeu. Nous allons donc proposer, à partir de l'étude épistémologique du concept de définition (dont les trois conceptions et les quatre moments) et des entretiens avec les mathématiciens que nous avons conduits, l'ensemble des Instances et des Questions permettant de générer *a priori* des problèmes de construction de définition, sous réserve d'une étude approfondie du concept mathématique retenu, des processus de définition envisageables et d'une définition des conditions expérimentales (connaissances *a priori* des sujets, constitution du milieu, interventions du gestionnaire).

Ainsi, les problèmes (I, Q) peuvent être construits en choisissant un couple parmi les instances et questions suivantes :

- Instances :
  - Exemples et non-exemples via une ou des représentations d'un concept mathématique
  - Exemples et contre-exemples (donnés et/ou à générer)
  - Définitions partielles (voire incorrectes), en construction
  - Définitions en construction ou finalisées dans un domaine mathématique noté DM1
  - Propriété, ou théorème, et/ou conjecture
  - Preuve
  - Conjecture
  - Problème avec exploration du problème, établissement de faits expérimentaux
- Questions :
  - Définir pour délimiter ce que le concept est et ce qu'il n'est pas
  - Définir pour classer
  - Vérifier la validité d'une preuve (éventuellement : recherche d'un lemme caché) ; recherche du domaine de validité d'une preuve
  - Prouver (cela peut être une preuve d'existence ou autre)
  - Conjecturer ; recherche du domaine de validité d'une conjecture
  - Recherche de définitions équivalentes ; preuve de l'équivalence
  - Généraliser une preuve, ou une conjecture
  - Explorer les hypothèses pour rendre un théorème (même non encore complètement prouvé) plus fort (ou plus faible)
  - Plonger le concept dans un autre domaine mathématique noté DM2 : que devient-il ?
  - Construire une axiomatique locale.

### 3.6. Composante 4 de notre modélisation – Une méthodologie pour concevoir et analyser des situations de définition

La principale difficulté réside dans le choix d'un concept mathématique et dans l'exploration *a priori* de ce concept afin de déterminer des problèmes appropriés et d'envisager plusieurs zéro-définitions potentielles, voire des conjectures et preuves impliquant ce concept.

La question de la familiarité avec ce concept, familiarité et même familiarisation, est également à poser. Proposer une voie d'accès via des représentations de ce concept et/ou l'exploration de problèmes dans lesquels il est impliqué est fondamental et permet l'élaboration d'un premier *concept image*, qui servira de point d'appui pour le travail sur les zéro-définitions (voir Ouvrier-Buffet, 2013).

Les problèmes initiaux peuvent être formulés en fonction de différents choix de couples (Instance(s) ; Question(s)) qui dépendront du niveau des étudiants et des concepts considérés. Dans le cas d'un changement de cadre, le fonctionnement sera similaire et pourra impliquer la redéfinition d'une axiomatique locale.

Dans le cadre de la conception d'une situation de construction de définitions, l'étude *a priori* en termes de zéro-définitions peut être conduite en parallèle des quatre moments de l'activité de définition, et mettre ainsi en évidence des éléments pour la gestion en classe.

Quant à la gestion en classe justement, elle peut être calibrée via la connaissance des trois conceptions (artistotélicienne, lakatosienne, popérienne), qui peuvent, elles aussi, contribuer à la définition *a priori* de sous-problèmes. Le gestionnaire-observateur devra intervenir « le moins possible », et cela reste un pari. Cela pose la question de choix entre des problèmes totalement ouverts (pour l'enseignant et les étudiants) et des problèmes *open-ended* (ouverts pour les étudiants, fermés pour l'enseignant).

Dans le cadre plus large de la conception d'une situation fondamentale pour le concept de définition, la situation de « première rencontre » fera l'objet d'un travail d'institutionnalisation de l'activité de définition, qui reste à définir, tous comme les variables de la situation fondamentale.

## Conclusions et perspectives de recherche

Notre travail de recherche a permis de construire un cadre épistémologique de référence pour modéliser l'activité de définition et ainsi pour donner un accès au concept de définition en mathématiques. Ce cadre de référence est constitué des trois conceptions aristotélicienne, poppérienne et lakatosienne, de la définition des problèmes impliquant une activité de définition via des couples (Instance(s), Question(s)) (Garey & Johnson, 1979), et de la mise en évidence de quatre moments de l'activité mathématique qui permettent de donner une image globale de l'activité de définition. Une méthodologie de conception et d'analyse de situations impliquant une activité de définition vient compléter la modélisation présentée ici. La principale difficulté dans cette modélisation résidait dans le fait que le concept de définition, et l'activité de définition, en mathématiques, appartiennent à la sphère privée du mathématicien : il s'agissait donc de modéliser des conceptions appartenant à la pratique du mathématicien plus qu'à un texte du savoir savant. L'utilisation souple des µ conceptions (Balacheff, 1995) et la mise en œuvre du concept-problème nous ont permis de considérer des instanciations de la pratique du mathématicien et des problèmes impliquant une activité de définition. L'étude épistémologique donne ainsi maintenant un cadre déjà partiellement éprouvé (Ouvrier-Buffet, 2006 & 2011) pour analyser dans une perspective didactique la conception et l'implémentation en classe de situations de définition. Elle permet en particulier d'anticiper et de gérer des processus de définition, en proposant des indicateurs, balises de l'activité de définition, mais aussi des leviers pour faire évoluer un processus de définition ou un problème.

Nos perspectives de recherche se situent aujourd'hui à trois niveaux en interrelation constante qui sont développées plus précisément dans (Ouvrier-Buffet, 2013) : épistémologique, théorique, et didactique.

Nous envisageons d'approfondir encore la modélisation en enrichissant les entretiens avec des chercheurs dans d'autres champs des mathématiques que ceux explorés jusqu'à maintenant. L'étude d'autres pratiques des mathématiques est également à envisager afin d'évaluer plus précisément la portée de notre modélisation.

Nous souhaitons par ailleurs analyser plus spécifiquement le champ de recherche de la géométrie discrète contemporaine, déjà vue comme prometteuse pour des expérimentations didactiques (Ouvrier-Buffet, 2006). Le choix de la géométrie discrète se justifie à plusieurs niveaux. L'interprétation de données discrètes implique un traitement dans un espace continu (méthodes d'approximation et méthodes paramétriques – lien avec l'algorithmique) d'une part, et une définition des objets discrets sous-jacents au problème, ainsi que l'exploration de leurs propriétés (voire la construction d'une axiomatique spécifique) d'autre part. Se dégagent ainsi plusieurs problématiques, et donc plusieurs perspectives de recherche à investiguer, au sein de ce seul champ mathématique : une problématique forte de la définition des objets discrets (pour la reconnaissance et la construction de ceux-ci), la question encore vive dans la recherche de la construction d'une axiomatique pour la géométrie discrète, l'exploration des liens entre le discret et le continu.

Par ailleurs, une réflexion sur la place de la logique dans l'étude des relations entre définition et preuve peut être posée. Celle-ci n'a pas été posée dans la note de synthèse (Ouvrier-Buffet, 2013) comme objet spécifique d'étude : elle est cependant prise en compte dans l'étude des conceptions et des moments de l'activité de définition. Cela étant, la place de la logique dans la dialectique entre l'activité de définition et l'activité de preuve peut clairement devenir un objet de recherche à part entière.

Enfin, la question plus générale des fondements épistémologiques de la démarche de recherche en mathématiques est aussi un point à travailler, afin de mettre en évidence la spécificité de cette démarche au regard des démarches d'investigation en sciences par exemple.

Nous projetons également, au niveau théorique cette fois, d’engager une réflexion concernant l’utilisation du modèle de problème inspiré de Garey & Johnson (1979) et de son efficience pour de futurs travaux en didactique concernant la formation de concepts et la modélisation de conceptions. Il existe à ce jour, en didactique des mathématiques, trois cas d’utilisation de ce modèle : Giroud (2011) sur la démarche expérimentale, Modeste (2012) sur l’algorithme et notre travail sur le concept de définition. Les connexions avec les µ-conceptions sont de différentes natures et ne sont pas explicitables de la même façon. De plus, les instances et questions sont elles aussi de natures différentes dans ces travaux du fait des concepts considérés comme objet d’étude. Enfin, les liens entre problèmes et milieu restent à éclaircir. Et la question concernant la façon dont les étudiants se constituent une ou plusieurs conceptions sur un concept et comment les faire évoluer est également une problématique à traiter et à élargir à d’autres concepts mathématiques.
Par ailleurs, dans la mesure où l’étude des pratiques des mathématiciens se développe aujourd’hui dans la communauté didactique, il serait nécessaire de concevoir un cadre théorique commun qui permettrait de centraliser les différents résultats obtenus et de montrer les convergences et points de tension.

Au niveau didactique, il s’agit maintenant aussi de générer de nouvelles situations impliquant une activité de définition et d’étudier leur transmission à des enseignants. Ici, en définitive, ce n’est pas tant la question de l’enseignement d’heuristiques qui se pose, mais bien celle de la formation des enseignants en ce qui concerne la démarche mathématique, question que nous retrouvons et traitons dans le cadre des SiRC (Grenier & Payan, 2003).
Par ailleurs, la question de l’appropriation de nouveaux « savoirs » par les enseignants se pose de manière forte, à l’heure où les programmes intègrent de nouveaux contenus d’enseignement (nouveaux, y compris pour les enseignants) : comment se fait-elle ? Avec quelles ressources ? Comment les transmettent-ils ? Nous pensons ici en particulier à des savoirs notionnels, tels que les graphes ou l’algorithme, introduits ces dix dernières années dans les programmes du secondaire, ou des savoirs transversaux aux mathématiques, tels que la démarche mathématique ou l’activité de définition.
D’une manière plus spécifique, nous pouvons noter une place grandissante des mathématiques discrètes dans l’enseignement (algorithmes, graphes, arithmétique etc.), en France et à l’étranger. Elle répond à une nécessité sociétale. Ce champ des mathématiques est en fait diffus dans les institutions « enseignement », en particulier car il n’est pas identifié sous une étiquette rassemblant les concepts qui le composent comme l’est l’analyse par exemple, mais aussi car beaucoup de problèmes issus des mathématiques discrètes sont utilisés à des fin de diffusion et de vulgarisation de la culture mathématique (Fête de la Science, Rallyes mathématiques etc.). Au niveau didactique, c’est un champ plein de promesses, dont l’investigation est à approfondir (Heinze et *al.*, 2004 ; DIMACS, 2001 ; Ouvrier-Buffet, 2009), en mettant en relation didacticiens et mathématiciens. Cette branche « jeune » des mathématiques suscite l’intérêt depuis quelques années du fait des nouvelles potentialités qu’elle offre. En effet, elle permet d’engager les étudiants dans une démarche mathématique, offrant ainsi un champ à part entière pour l’apprentissage de la preuve, de la modélisation, mais pas seulement. Une autre perspective s’ouvre également : il s’agit d’appréhender, dans le discret, des concepts réputés difficiles à enseigner dans le continu (Ouvrier Buffet, 2011) Nous soutenons que les invariants en mathématiques discrètes que l’on retrouve dans le continu doivent être investigués de manière spécifique, car si le discret peut être plus facilement appréhendable et accessible que le continu, il ne faudrait pas penser que cela est toujours le cas : « (...) le continu précède ontologiquement le discret » (Thom, 1992, p. 137).

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES


ARISTOTE (1965). *Organon – Les Topiques* (traduction et notes par J. Tricot). Vrin. Paris.

ARISTOTE (1970). *Organon – Les Seconds Analytiques* (traduction et notes par J. Tricot). Vrin. Paris.

BALACHEFF, N. (1995). Conception, connaissance et concept. In: Denise Grenier (ed.) *Séminaire Didactique et Technologies cognitives en mathématiques* (pp. 219-244). Grenoble : IMAG.

BALACHEFF, N. & MARGOLINAS, C. (2005). cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds), *Balises pour la didactique des mathématiques* (p. 1-32). Grenoble : La Pensée Sauvage.

BERGER, M. (2009). *Géométrie vivante ou l'échelle de Jacob*. Cassini.

BURTON, L. (2004). *Mathematicians as enquirers: Learning about learning mathematics*. Berlin: Springer.

CARLSON, M. P., & BLOOM, I. (2005). The cyclic nature of problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 58(1), 45–75.

DIMACS (2001). Center for Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science: Educational Program. http://dimacs.rutgers.edu/Education

DORIER, J-L. et al. (1997). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.

GARDES, M-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres*. Thèse. Université Lyon 1. oai : tel.archives-ouvertes.fr:tel-00948332

GAREY, M. R., & JOHNSON, D. S. (1979). *Computers and intractability: A Guide to the theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman.

GIROUD, N. (2011) *Étude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe.* Thèse, Université Grenoble 1. oai : tel.archives-ouvertes.fr:tel-00649159

GRENIER, D & PAYAN, C. (2003). Situations de recherche en "classe", essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Actes du Séminaire National de didactique des mathématiques*, pp. 189-205. IREM de Paris 7.

HEINZE, A., ANDERSON, I., REISS, K. (Eds) (2004). Discrete mathematics and Proof in the High School. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Vol. 36 (2), 44-84 et Vol. 36 (3), 82-116.

LAKATOS, I. (1961). *Essays in the Logic of Mathematical Discovery*. Thesis. Cambridge University Library.

LAKATOS, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge: Cambridge University Library.

MARIOTTI, M.A. & FISCHBEIN, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 219–248.

MODESTE, S. (2012). *Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve*. Thèse, Université de Grenoble. oai:tel.archives-ouvertes.fr:tel-00783294

OUVRIER-BUFFET, C. (2003). *Construction de définitions / construction de concepts : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques. Étude épistémologique et didactique de la définition. Étude théorique et expérimentale de la dévolution de problèmes de construction de définitions, auprès d'étudiants de 1ère année d'université.* Thèse. Université Joseph Fourier - Grenoble 1. oai : tel.archives-ouvertes.fr:tel-00005515

OUVRIER-BUFFET, C. (2006) Exploring mathematical definition construction processes. *Educational Studies in Mathematics*, 63(3), 259-282.

OUVRIER-BUFFET, C. (2007). *Des définitions pour quoi faire ? Analyse épistémologique et utilisation didactique.* Editions Fabert.

OUVRIER-BUFFET, C. (2009). Mathématiques discrètes : un champ d'expérimentation mais aussi un champ des mathématiques. *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, pp. 31-45. IREM de Paris 7.

OUVRIER-BUFFET, C. (2011). A mathematical experience involving defining processes: in-action definitions and zero-definitions. *Educational Studies in Mathematics*, 76(2), 165-182.

OUVRIER-BUFFET, C. (2012). L'activité de définition : vers un mode de pensée spécifique ? *Colloque EMF, GT3*. Genève, Suisse.

OUVRIER-BUFFET, C. (2013). *Modélisation de l'activité de définition en mathématiques et de sa dialectique avec la preuve. Étude épistémologique et enjeux didactiques*. Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches. oai:tel.archives-ouvertes.fr:tel-00964093

POPPER, K. (1962). *La société ouverte et ses ennemies (Tome 1 - L'ascendant de Platon)*. Seuil, Ed. 1979.

POPPER, K. (1985). *Conjectures et réfutations – La croissance du savoir scientifique*. Trad. De Launay. Payot, Paris.

SCHOENFELD, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. San Diego: Academic.

THOM, R. (1992). L'antériorité ontologique du continu sur le discret. In Salanskis, JM & Sinaceur, H. (Eds) *Le labyrinthe du continu - Colloque de Cerisy*, 137-143. Springer-Verlag.

VERGNAUD, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(2/3), 133-169.

VINNER, S. (1991). The Role of Definitions in Teaching and Learning of Mathematics. In D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 65-80. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

WEBER, K. (2008). How mathematicians determine if an argument is a valid proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 39, n°4, 431-459.