CONSTRUCTION ET FONCTIONNEMENT D'ESPACES DE TRAVAIL GEOMETRIQUES PERSONNELS D'ELEVES. CAS DE LA GEOMETRIE SYNTHETIQUE DANS L'ESPACE AU LYCEE.

Fabien **SCHLOSSER**

Université de Bordeaux

fabien.schlosser@u-bordeaux.fr

Résumé

Notre recherche porte sur l'enseignement de la géométrie dans l'espace au lycée général. Plus précisément, nous étudions la manière dont les espaces de travail personnels des élèves sont constitués dans ce chapitre, ainsi que leur mise en fonctionnement lors de la résolution de problèmes de construction.

Le cadre théorique des espaces de travail prend en compte une dimension épistémologique, ainsi qu'une dimension cognitive. Nous développons la dimension cognitive des espaces de travail personnels, en définissant des facteurs internes et externes, constitutifs de différences interindividuelles. Ces facteurs permettent de caractériser différents profils d'espaces de travail, dont certains sont pilotés par le registre figural, et d'autres par le référentiel théorique. De manière fonctionnelle, la sémiotique pragmatique associée à la sémiotique triadique de Peirce, nous permet de structurer le niveau cognitif de l'espace de travail personnel de l'élève en un plan syntactique, sémantique et pragmatique. L'analyse des recherches des élèves permet alors d'identifier trois types de processus cognitifs engagés en géométrie dans l'espace: des processus qualitatifs, expérimentaux et argumentaux. Leur importance relative au sein de l'ETG personnel permet alors de distinguer les empreintes de ces ETG.

Mots clés

Géométrie dans l'espace – Espace de travail géométrique – Sémiotique – Peirce – Lycée général – Espace – Capacités spatiales.

INTRODUCTION

Plus que tout autre domaine des mathématiques, la géométrie dans l'espace dispose d'un statut spécifique dans l'enseignement de cette discipline, tant du point de vue didactique que de l'expérience personnelle de tout un chacun. En effet, la problématique de la capacité à «voir dans l'espace», associée à celle de soi-disant prédispositions innées favorisant l'apprentissage des mathématiques, focalise toutes les attentions. Ainsi, l'enseignement de la géométrie dans l'espace semble s'articuler autour de certains dualismes comme par exemple le dualisme "voir dans l'espace"/raisonner, le dualisme figural/discursif, ou encore démontrer/convaincre ... Mais qu'en est-il réellement ? En quoi consiste précisément l'apprentissage de la géométrie synthétique dans l'espace au lycée ?

Notre étude a pour objectif de répondre à ces questions générales. Pour cela, nous avons mené une étude clinique minutieuse d'une séquence de classe complète portant sur ce chapitre, et considérée du point de vue de l'élève. Nous avons placé les élèves par binômes et enregistré en format vidéo et audio l'intégralité de leurs recherches effectuées sur un logiciel de géométrie dynamique (Interesp, basé sur Geospace), pour lequel seules les fonctions de construction conformes aux procédés papier-crayon étaient possibles. Il s'agit d'une étude procédant du "bas vers le haut", du local au global dans laquelle la classe, le professeur, les élèves jouent un rôle épistémique.

Bien que nos analyses relèvent d'une « micro-didactique », nos résultats et conclusions sont générales et concernent tout autant l'enseignement de la géométrie tridimensionnelle, que la démarche d'étude et le cadre théorique didactique. Sur ce dernier point, la notion d'espace de travail géométrique (ETG) de C. Houdement et A. Kuzniak (2006) nous a procuré une structure organique pour notre recherche. Mais le cœur de notre approche, l'outil fonctionnel de notre étude, est celui de la sémiotique triadique de Peirce (1931-1935). En effet, nous prenons pour postulat que l'activité mathématique relève d'une pratique sociale de communication. Elle se traduit par un flux d'informations, véhiculées par des signes mathématiques ou non mathématiques au sein de la classe ainsi qu'au niveau de chaque élève. De là découle une étude du signe mathématique, dans ses aspects de production et d'interprétation. Ainsi, d'une approche ergonomique relativement statique à l'origine des ETG, nous nous sommes dirigés vers une conception plus dynamique, quasi génétique, de la construction et du fonctionnement des ETG personnels des élèves du lycée général.

Dans ce texte, nous abordons dans une première partie les facteurs constitutifs des ETG personnels que nous adossons localement à un type de tâche et à un milieu. En particulier, nous nous appuyons sur la sémiotique triadique de Peirce pour modéliser cet ETG et définir ses composantes sémiotiques. Dans un deuxième temps, nous montrons dans quelle mesure les capacités de visualisation et de traitement spatial génèrent des différences interindividuelles chez les élèves et dans quelle mesure elles constituent des facteurs externes aux ETG, générateurs de profils différents. Pour cela, nous définissons au préalable la notion même d'espace, d'un point de vue épistémologique. Dans une troisième partie, nous montrons au travers d'exemples d'analyses locales, les processus en jeu lors du fonctionnement des ETG.

1. LES ELEMENTS CONSTITUTIFS DU PLAN COGNITIF DES ESPACES DE TRAVAIL GEOMETRIQUES

Les espaces de travail géométriques s'articulent initialement autour du triptyque espace réel, artefacts, référentiel théorique (Houdement, Kuzniak, 2006). Depuis 2011, ces espaces sont structurés en un plan épistémologique et un plan cognitif. Les trois composantes originales sont intégrées dans le plan épistémologique, alors que le plan cognitif est quant à lui formé des processus cognitifs de visualisation, de construction et de preuve. Le principal enjeu de la didactique de la géométrie dans l'espace est par conséquent de comprendre deux types de phénomènes importants. Le premier est celui de l'interprétation des signes réceptionnés par l'élève et le second celui de la production de signes par lui-même (à partir d'autres signes). Kuzniak fait référence à des genèses dont il distingue la genèse figurale, instrumentale et discursive.

1.1 La nature trichotomique des signes mathématiques, produits et réceptionnés dans l'ETG personnel

La sémiotique de Peirce repose sur un principe philosophique qu'il nomme *phanéroscopie,* consistant en « la description de ce qui est devant l'esprit ou la conscience, tel qu'il apparaît » (Peirce, 1931-1935, 8.303). Il démontre que trois catégories exactement sont nécessaires et suffisantes pour décrire toute chose : la priméité, la secondéité et la tiercéité. Ainsi, tout objet peut être représenté par un signe appelé le representamen. Ce dernier n'est pas l'objet en question, mais bien une représentation de celui-ci produisant une idée de l'objet, un troisième signe que Peirce nomme l'interprétant. Tout objet est par conséquent pris dans une relation triadique que l'on peut schématiser de cette manière :

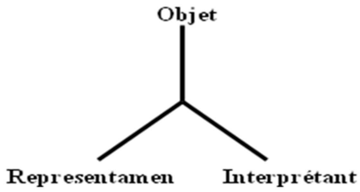
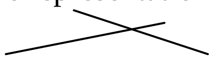


Figure 1- La triade du signe.

Ce modèle trichotomique est particulièrement efficient pour l'analyse didactique. Prenons l'exemple de l'objet « intersection de deux droites dans l'espace ». Cet objet mathématique peut être représenté par un representamen de type figural (pour reprendre la catégorisation de Duval (2005) du cadre des registres de représentations sémiotiques), de la manière suivante :



Bien sûr, ce signe n'est pas l'objet spatial lui-même mais une représentation, par exemple en perspective parallèle. Ce signe peut alors produire plusieurs interprétants dont notamment celui de droites sécantes, mais également celui de droites non coplanaires. On perçoit déjà le grand intérêt de l'apprentissage de la géométrie dans l'espace puisque le dessin est par nature polysémique dans ce chapitre: plusieurs interprétants peuvent être associés à un même signe[1], ce qui est moins systématique concrètement en géométrie du plan. De manière emblématique, l'objet droite et son représentamen figural (le trait) sont souvent fusionnés par les élèves.

Deledalle (1979) montre bien comment une pragmatique peut être construite à partir de la théorie de Peirce. Prenons le point de vue du système théorique mathématique. Dans ce système, il y a trois manières de considérer un signe mathématique. En premier lieu, le signe peut être considéré en tant que tel, pour lui-même : il s'agit de la dimension syntactique (ou grammaticale) du signe. En second lieu, il peut être vu dans sa relation avec son objet : c'est la dimension sémantique (existentielle ou pratique) du signe. Enfin, la dimension pragmatique (ou logique) du signe consiste en la prise en compte de la relation du signe à son interprétant.

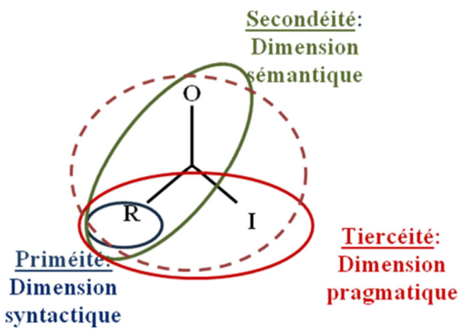


Figure 2- Principe de décomposition de l'étude du signe.

Reprenons notre exemple du tracé de deux droites sécantes sur le dessin. Dans la dimension syntactique de l'étude sémiotique de ce signe, aucune signification ne lui est attribuée. Il n'est pris qu'en tant que tel, en y adjoignant éventuellement certaines règles syntactiques du tracé géométrique, comme par exemple qu'un trait est sans épaisseur (Peirce (1931-1935) utilise le terme de légisigne dans ce cas). Dans sa dimension sémantique, ce dessin est mis en relation avec son objet. Cela peut se faire de trois façons : soit de manière iconique (le dessin s'identifie à son objet par une ressemblance en tout point, le dessin « est » l'intersection de deux droites), soit de manière seconde le dessin est considéré comme l'indice de deux droites de l'espace (la conséquence d'une action, celle d'une perspective parallèle de deux droites

[1] Bien sûr, la mise en relation avec des signes discursifs permet de lever cette polysémie.

non coplanaires par exemple), soit de manière troisième le dessin est pris comme le symbole de deux droites sécantes (les propriétés du representamen et de l'objet sont dissociées). Enfin, dans sa dimension pragmatique, le dessin peut être par exemple associé à l'interprétant « deux droites sécantes » grâce à un argument du type « les deux droites sont coplanaires ». Une étude détaillée des catégories de signes est réalisée dans notre thèse, dans le cas particulier des signes de la géométrie dans l'espace (Schlosser, 2012).

1.2 Une modélisation de l'espace cognitif des ETG personnels

Ainsi, sur la base de la sémiotique de Peirce, nous modélisons le plan cognitif de l'ETG personnel d'un élève de la manière suivante :

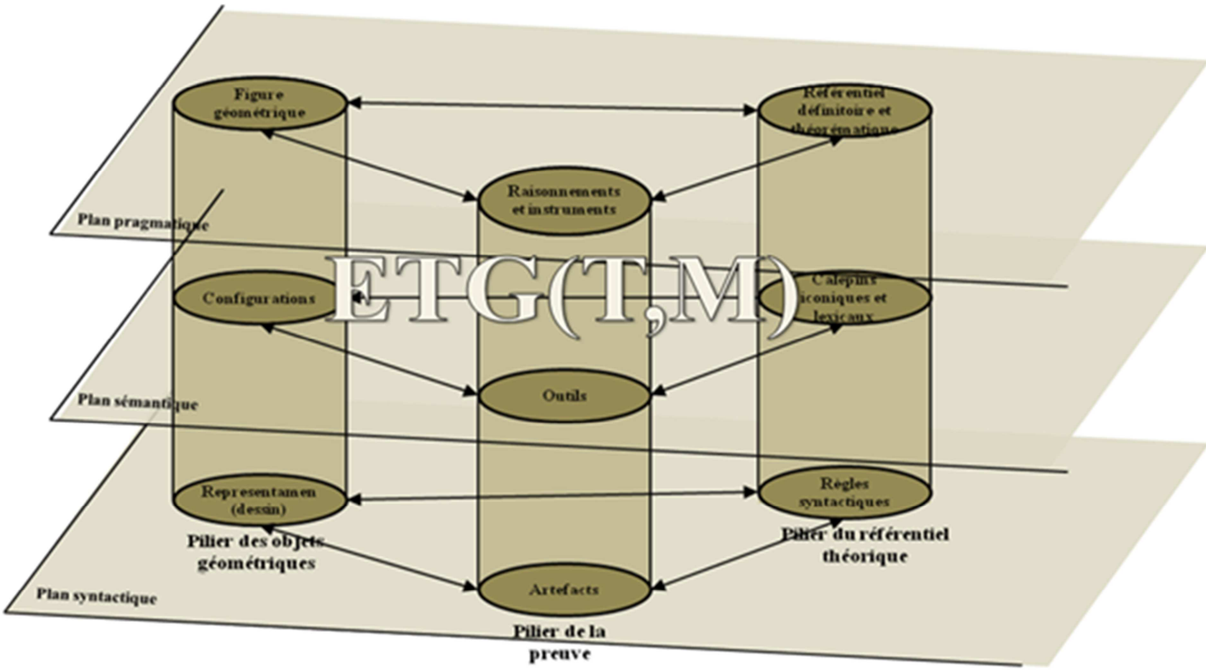


Figure 3- Modélisation de l'ETG personnel en trois plans et trois piliers.

Nous retrouvons le triptyque objet-artefact-référentiel, pris dans sa dimension première, seconde ou troisième. Le plan cognitif de l'ETG se voit donc modélisé en trois strates (syntactique, sémantique et pragmatique) et trois piliers (le pilier des objets, de la preuve et du référentiel).

La différenciation des composantes de chaque pilier est précisément basée sur le modèle triadique de Peirce, à savoir la distinction entre signe premier, second ou troisième, mais également en fonction de sa catégorisation des signes. Ainsi, comme nous l'avons vu plus haut avec l'exemple de l'objet « intersection de deux droites dans l'espace », le pilier des objets se structure en trois niveaux pour lesquels nous utilisons les termes de representamen (pouvant être de trois natures, un qualisigne, un sinsigne ou un légisigne), de configuration (iconique, indiciaire ou symbolique) et de figure (un objet rhèmatique, dicent ou argumental). Nous explicitons ces distinctions et les mettons en œuvre dans notre thèse (Schlosser, 2012), ainsi que dans les actes du symposium ETM4 (Schlosser, *à paraître*), notamment dans le cas de l'objet « plan dans l'espace ». De la même façon, nous faisons la distinction entre un artefact (le compas par exemple), un outil (l'artefact associé à une classe d'objets réalisables avec celui-ci, par exemple le compas associé au cercle) et un instrument (qui recouvre à la fois l'outil et les propriétés géométriques générales qui en sont induites, comme par exemple l'équidistance dans le cas du compas). Concernant le pilier du référentiel, sur le même principe, nous le structurons en un ensemble de règles syntactiques, un calepin iconique et lexical, et un référentiel définitoire et théorématique.

Cette structuration cognitive de l'ETG personnel permet de modéliser son fonctionnement, et donc de décrire et comprendre les démarches de résolution mises en œuvre par les élèves. Examinons par exemple la manière dont un simple representamen peut être mis en relation avec son objet de manière iconique (rhématique) (R↔O). Il s'agit d'un processus qualitatif s'appuyant sur un calepin d'icônes, un ensemble d'images mémorisées que nous appelons le calepin visuel (ou calepin iconique). Prenons le cas particulier de l'objet « représentation en perspective parallèle d'un cube ». Un des exercices du test de connaissances spatiales que nous avons réalisé et que nous présentons dans le paragraphe 2.3 de cet article[2], comportait 10 représentations distinctes, dont 8 devaient être associées à l'objet « représentation en perspective parallèle du cube ». Un élève ayant déjà rencontré et mémorisé ces 8 représentations correctes du cube, dispose d'un ensemble de representamens qui correspondent au même objet « cube ». Cet ensemble forme une « clique figurale ». Dès lors que cette clique est mémorisée, nous la nommons calepin visuel de la représentation figurale du cube. Le cardinal de ce calepin est un élément constitutif de ce que nous appelons la richesse de l'espace de travail. Il est très difficile de caractériser directement cette richesse du calepin visuel. Seul un test exhaustif permettrait de le faire, ce qui matériellement est hors de portée. Mais de la richesse $\mathrm{r}(\mathrm{Cv}_\mathrm{c})$ du calepin visuel proposé par l'enseignant dans sa classe, dépendra la richesse $\mathrm{r}(\mathrm{Cv}_\mathrm{e})$ de celui de l'élève : sans facteurs externes (années antérieures, influence de la famille, d'un professeur particulier, d'ouvrages lus en travail personnel à la maison…), on a : $\mathrm{r}(\mathrm{Cv}_\mathrm{e}) \leq \mathrm{r}(\mathrm{Cv}_\mathrm{c})$.

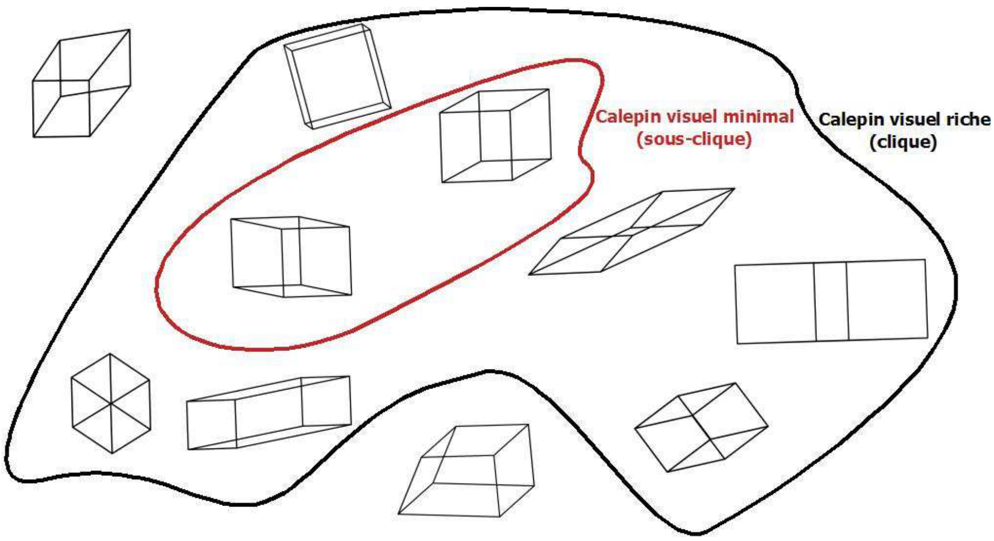
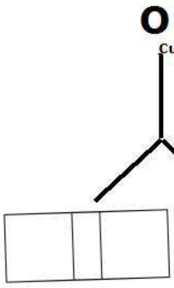


Figure 4- Calepin visuel du cube.

Un tel calepin visuel peut se construire de deux manières différentes. Suivant un premier principe, il peut y avoir agrégation de signes au sein d'une clique par le biais de désignations-nominations (formules implicites ou explicites du type : « cette figure "est" (représente) un cube, celle-ci aussi… »). Il s'agit dans ce cas d'un processus symbolique, puisque le signe figural est mis en relation avec le mot 'cube' (signe symbolique) qui est générique. Les relations consécutives à ces désignations-nominations communes se font alors entre des signes iconiques figuraux : deux signes figuraux sont mis en relation par transitivité.

[2] Cet exercice est partiellement reproduit en annexe : il s'agit du premier exemple de la partie III de cet annexe.



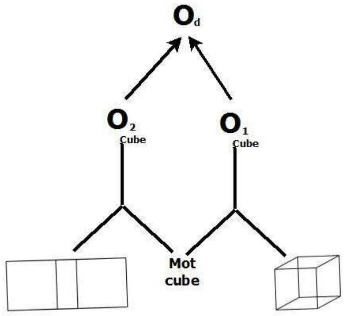


Figure 5 – Désignation-dénomination *Figure 6- Mise en relation par transitivité.*

Ainsi, deux relations triadiques peuvent être concaténées du point de vue de la représentation diagrammatique. Dans le diagramme de la figure 6, c'est le symbole rhématique 'cube' (sous sa forme discursive orale ou écrite) qui assure la liaison des deux relations triadiques. La clique formant le calepin visuel du cube produit une conceptualisation de l'objet cube. Dès l'école élémentaire, les propriétés géométriques des solides sont construites par des activités de description et de classement conduisant à des calepins visuels. Ces propriétés sont des relations que l'on peut également considérer comme des objets dynamiques, dans le sens de Peirce (1931-1935).

Suivant un second principe, le calepin visuel se construit de manière indiciaire. Le signe figural est alors directement mis en relation avec un autre signe figural par application d'une perspective : le dessin (icône bidimensionnel) devient l'indice d'un cube (en tant qu'icône tridimensionnel). Tout élève peut ainsi se construire (ou reconstruire) un calepin visuel du cube à l'aide des propriétés de la perspective parallèle, lorsqu'elles sont pour le moins partiellement connues. C'est ce qui pouvait être fait dans le test spatial, en utilisant la simple règle de conservation du parallélisme vue dans le cours.

Dans la question de notre test de connaissances géométriques, destinée à estimer le calepin visuel des élèves dans le cas des dessins en perspective parallèle du cube, le résultat médian obtenu est de 6 bonnes réponses sur 10, avec un écart-type d'environ 2, et des valeurs minimales de 4 bonnes réponses sur 10 et maximales de 9 bonnes réponses sur 10. La configuration prototypique du cube est sans surprise majoritairement reconnue.

Le calepin lexical est défini de la même manière que le calepin visuel, mais cette fois au sein du registre de représentation discursive.

1.3 Des ETG adossés à des types de tâches et à un milieu (facteurs internes)

Par définition, l'ETG est construit sur la base de tâches et de types de tâches à réaliser (dans le sens donné par Chevallard (2002)), ainsi qu'en fonction du milieu comme le définit Brousseau (1990). Ainsi, dans la séquence que nous avons étudiée, deux types de tâches étaient essentiellement sollicités : construire l'intersection d'une droite et d'un plan, et construire l'intersection de deux plans. Par ailleurs, le milieu de la classe que nous avons suivie était constitué notamment de maquettes et d'un logiciel de géométrie dynamique, qui permettait d'obtenir différents points de vue de chaque figure. L'enseignant faisait grandement usage de ces maquettes pour construire les connaissances de géométrie dans l'espace et pour offrir des aides à la réalisation des exercices. Nous avons pris pour postulat que la nature du milieu conditionnait la nature potentielle de l'ETG personnel de l'élève.

Pour cette raison, nous utilisons la notation ETG(T,M) dans le schéma général du paragraphe 1.2. Ce principe d'un adossement local à un type de tâche et à un milieu (facteurs internes) nous permet de modéliser l'ETG global par compilation de l'ensemble des ETG locaux[3] :

$$ETG_{Global} = \bigcup_{T,M} ETG_{local}[T, M]$$

2. Les facteurs externes du plan cognitif des ETG personnels.

Puisque les ETG sont dépendants du milieu, nous nous sommes attachés à étudier les liens entre les capacités spatiales et les capacités géométriques, ainsi que le concept même d'espace.

2.1 Epistémologie de l'espace

Il n'y a pas un concept d'espace mais plusieurs, dépendants du contexte disciplinaire dans lequel on travaille. Ainsi, on parlera d'espace physique, géographique, psychologique… Dans le cas de la géométrie dans l'espace, les signes mathématiques peuvent être associés à des interprétants issus de l'espace matériel, ou d'images mentales tridimensionnelles. Examinons donc tout d'abord le concept d'espace physique.

La notion d'espace physique relève de deux types d'approches différentes. Einstein les définit ainsi : « (a) l'espace en tant que propriété positionnelle du monde des objets matériels ;

(b) l'espace en tant que contenant de tous les objets matériels. » (Einstein, 1954, p.13).

La première approche est confondue avec celle de lieu et implique la présence d'un objet matériel ou d'un groupe d'objets. De là découle la conception d'un espace relatif : l'espace représente les propriétés positionnelles des objets, mais celles-ci ne peuvent être définies que relativement à d'autres objets (éventuellement par rapport à soi-même). Il s'agit d'un point de vue purement géométrique. Dans ce paradigme, un espace vide n'a par conséquent aucun fondement. La seconde acception du terme espace physique, correspond davantage à un paradigme cinématique. Cet espace ne marque plus une simple position: il s'agit d'un espace absolu à partir duquel la notion d'espace vide est cette fois possible.

Outre la problématique d'espace relatif ou absolu, la question du mouvement est particulièrement discriminante au sein des différentes approches de l'espace. Par exemple, pour Aristote (384-321), l'espace est une conséquence du mouvement. Il est défini comme la somme de tous les lieux, le lieu (topos) étant conçu comme une quantité continue, une partie de l'espace dont les « limites coïncident avec les limites du corps occupant » (Jammer, 2008, p.32).

Pour Platon (428-348), archétype de l'idéalisme, l'espace est identifié à la matière. En particulier, un corps est défini géométriquement comme délimité par une surface, et contenant de l'espace vide uniquement.

Mach décrit une construction de l'espace par le biais de nos sens, ce qui le conduit à différencier fondamentalement l'espace perçu de l'espace géométrique. Il utilise le terme d'espace physiologique : « l'espace de notre intuition sensible, que nous trouvons tout à fait au plein éveil de notre conscience » (Mach, 1908, p.327-340).

Poincaré (1914, éd 1968) a également consacré plusieurs de ses écrits à la définition de l'espace. Il introduit quant à lui le terme d' « espace représentatif », construit sur la base des espaces visuels, tactiles, et de l'espace moteur. Il démontre rationnellement sur la base de la

[3] Un exemple de définition d'un ETG global par compilation d'ETG locaux est donné dans l'appendice 10 de notre thèse (Schlosser, 2012).

notion de continuité et de coupure, que cet espace représentatif est différent de l'espace géométrique. En particulier :

- il n'est ni homogène ni isotrope ;
- « on ne peut même pas dire qu'il ait trois dimensions » (Poincaré, 1914, p.81) ;

Au contraire, l'espace géométrique est quant à lui :

- continu et infini (ce qui implique également qu'il est illimité) ;
- homogène : « c'est-à-dire que tous ses points sont identiques entre eux » (Poincaré, 1914, p.78) ;
- isotrope : « c'est-à-dire que toutes les droites qui passent par un même point sont identiques entre elles » (Poincaré, 1914, p.78), en particulier, il n'y a pas de direction privilégiée comme la droite verticale ou horizontale ;
- il a trois dimensions.

De notre étude épistémologique de l'espace, nous pouvons retenir deux résultats essentiels. Le premier est que, dès lors que l'élève met en relation l'espace géométrique avec son espace représentatif, des obstacles épistémologiques forts sont prévisibles, associés notamment au caractère illimité, d'isotropie, d'homogénéité, de continuité, et au nombre de dimensions. Concernant les rapports entretenus entre ces espaces, Poincaré soutient même que nous ne représentons pas les objets extérieurs dans l'espace géométrique, mais que par contre, « nous raisonnons sur ces corps, comme s'ils étaient situés dans l'espace géométrique » (Poincaré H., 1914, p.82).
L'espace représentatif n'aurait pas non plus de son coté la fonction de représentation de l'espace géométrique. Dès lors, la relation entre ces deux espaces ne peut être que de l'ordre d'un signe interprétant comme nous l'avons défini dans le paragraphe 1.1, avec toutes les implications didactiques que cela suppose.

Rajoutons par ailleurs, que « l'espace n'est pas présent dans la géométrie d'Euclide » d'après Vittori (2009, p.26). Autrement dit, les figures de la géométrie euclidienne ne sont pas en lien avec un l'espace, mais sont étudiées pour elles-mêmes. Cette idée est confirmée par Lombard (1994), qui établit clairement la distinction entre « géométrie dans l'espace » et « géométrie de l'espace ». La première formule fait référence à la géométrie grecque, celle d'Euclide, qui est une géométrie de la figure dans un contexte intra-géométrique. Au contraire, la seconde formule s'attache à la géométrie de la représentation de l'espace, celle de l'avènement de la perspective, dont les premiers pas ont débuté vers 1600. Deux paradigmes sont par conséquent possibles du côté des élèves :

- le paradigme dans lequel la figure géométrique est considérée comme objet symbolique à part entière, intégré dans le seul espace géométrique : il s'agit du paradigme de la géométrie d'Euclide ;
- le paradigme dans lequel la figure est mise en relation avec des objets matériels : il s'agit du paradigme de la géométrie "projective", ou plus modestement du paradigme de la perspective. Dans ce paradigme, le point de vue de l'observateur est essentiel.

Le deuxième résultat que nous dégageons de cette étude épistémologique, est une catégorisation des espaces en relation avec l'ETG géométrique construit lors de la séquence. Ainsi, nous distinguons cinq types d'espaces pouvant être engagés dans l'activité géométrique qui nous intéresse :

- **l'espace physique (EP0)** : couramment dénommé espace réel ou espace matériel, c'est celui du monde matériel, de l'existence minérale ou organique, recélant toute la complexité de ces êtres, dont certains éléments sont visibles et compréhensibles, et dont d'autres ne le sont pas (infiniment petit par exemple). L'espace euclidien est une approximation de cet espace à l'échelle terrestre ;
- **l'espace physiologique (EP1)** : constitué de la seule partie de l'EP0 accessible à nos

sens, en fonction des instruments d'observation retenus, et pouvant **potentiellement** créer une image sensorielle de l'espace, dans le sens de Mach (1908). Il n'est pas nécessairement continu et isotrope, puisqu'il dépend des instruments techniques et sensoriels utilisés;

- **l'espace représentatif (ER)** : il s'agit de l'espace représentatif défini par Poincaré (1914), dans le sens où l'espace potentiel EP1 est effectivement ressenti par un individu, et sensoriellement traité par celui-ci, le conduisant alors à un espace purement personnel. L'ER est tridimensionnel, mais fini, non isotrope et non continu.
- **l'espace cognitif (EC)** : par ce terme, nous entendons l'espace regroupant toute idée, potentielle ou élaborée par un individu ou groupe d'individus, à partir de l'espace représentatif ou à partir d'un ou plusieurs autres éléments de l'EC. Nous plaçons les images mentales tridimensionnelles dans l'EC, ainsi que l'espace lexical et grammatical, l'espace d'élaboration des processus logiques… Ces sous-espaces sont nécessairement connexes. En effet, les processus logiques, par exemple, s'élaborent le plus souvent sur la base de l'espace lexical et grammatical, ou sur des images mentales tridimensionnelles, ou sur les deux à la fois.
- **l'espace géométrique** : dans notre étude, il s'agira d'un espace euclidien à trois dimensions (bien que ce sont essentiellement les propriétés projectives et affines qui seront mises en œuvre). Il contient lui-même les sous-espaces affines, projectifs, topologiques.

Pour schématiser, nous pouvons dire qu'il y a un espace matériel (plus ou moins étendu), un espace des sensations et de la représentation, et un espace des idées. L'espace géométrique appartient évidemment à l'espace des idées. Celui-ci est très large, nous ne prenons en compte que les éléments qui nous sont utiles :

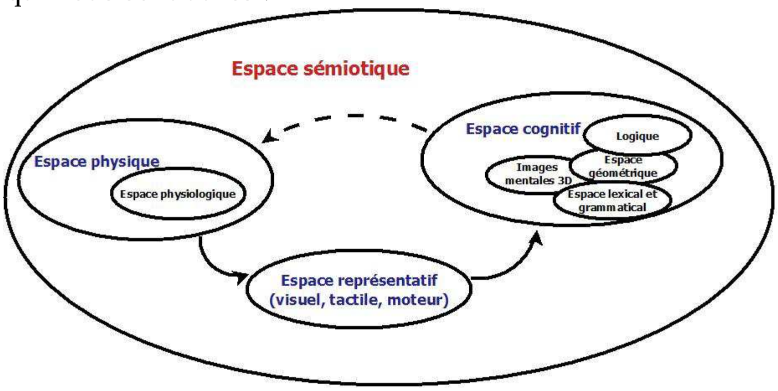


Figure 7 – Catégorisation d'espaces.

Notons que nous intégrons l'ensemble de ces espaces dans un espace commun, l'espace sémiotique, car nous nous appuyons sur le modèle de Peirce (1931-1935) pour lequel tout objet matériel, mais aussi toute pensée, toute idée, toute sensation ou sentiment est un signe.

2.2 Étude du concept de capacités spatiales

Notre objet de recherche étant la construction et le fonctionnement des ETG personnels, nous avons été amenés à étudier les facteurs externes dont ils dépendent. En particulier, l'étude du concept d'espace nous ayant conduit à une typologie, ainsi qu'à des paradigmes distincts d'ETG, nous avons dû également prendre en compte la question des capacités spatiales.

Les recherches concernant les capacités spatiales sont anciennes et relèvent initialement du domaine de la psychologie. Elles constituent une partie d'une réflexion plus générale concernant les capacités cognitives. Dès 1938, Thurstone construisit des batteries de tests d'intelligence, destinées à évaluer chaque composante des capacités intellectuelles. Son modèle de l'intelligence est structuré autour de capacités élémentaires, les « Primary Mental Abilities » (Thurstone, 1938) (PMA), au nombre de sept : les aptitudes verbales composées de la compréhension du langage et de la fluidité verbale, les aptitudes numériques (en particulier le calcul), les aptitudes spatiales composées de la visualisation spatiale et de la rapidité de perception et d'analyse des relations géométriques, les aptitudes logiques (le raisonnement) et les capacités de mémorisation (notamment la mémorisation des associations d'objets).

Krutetskii (1976) considère principalement deux modes de pensée : la pensée verbale-logique et la pensée visuelle-graphique. Il soutient que ces modes de pensée sont plus ou moins sollicités par les élèves lors de l'activité mathématique, ce qui l'amène à distinguer deux profils différents : les élèves analytiques, qui tendent plutôt à utiliser des procédures logiques et analytiques (y compris pour des problèmes pouvant être résolus par des approches visuelles relativement simples), et les élèves visuo-graphiques qui tendent à utiliser des schèmes visuels (y compris pour des problèmes qui se résolvent plus aisément avec des méthodes analytiques). Ces profils semblent trouver leur origine dans les capacités des individus. Presmeg (2008) nous rappelle que le modèle de pensée de Krutetskii, permet de positionner sur un graphique les mesures de ces deux modes de fonctionnement cognitif :

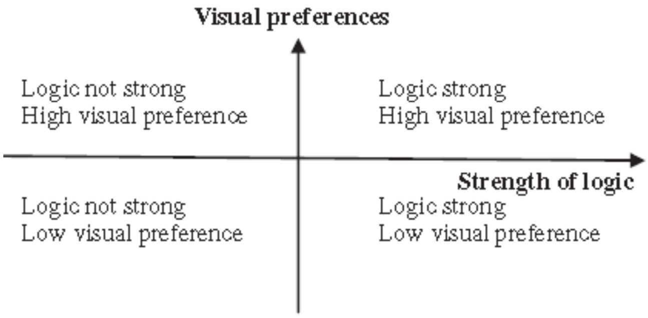


Figure 8 – Modes de fonctionnement cognitif.

Concernant plus particulièrement la définition des capacités spatiales, Lohmann (1988) les définit comme des capacités à générer, retenir, reconvoquer et transformer des images visuelles bien structurées. Il modélise ces capacités en trois composantes :

- la visualisation spatiale (Vz) : comprendre des mouvements imaginaires dans l'espace à trois dimensions (mouvements de l'objet entier ou pièce par pièce), ou manipulation d'objets mentalement ;
- l'orientation spatiale (SO) : concerne les changements de points de vue d'un même objet, ce qui requiert des capacités de rotations mentales de l'objet intégral (alors que Vz pouvait requérir des mouvements de parties de l'objet). Pour SO, l'orientation du corps du sujet observateur est essentielle, ce qui n'est pas le cas pour SR;
- les capacités de rotations spatiales (SR) : capacité à réaliser une rotation mentale d'un objet spatial, simplement et rapidement.

Maier (1996) quant à lui ajoute à ces composantes précédentes les capacités de perception spatiale et les relations spatiales mentales (sollicitées par exemple pour la construction d'un patron).

Dans le domaine de la recherche en didactique des mathématiques, Bishop (1980) retient, sur la base de certains travaux de psychologie, deux types de capacités spatiales :

- « Interpreting figural information » (IFI) : capacité de compréhension des représentations spatiales et du vocabulaire spatial, sollicitée dans les travaux de géométrie, les dessins, graphiques, et les divers diagrammes ;
- « visual processing » (VP) : plus dynamique que l'IFI, ce processus engage la

visualisation et la traduction d'informations portant sur des relations abstraites et non-iconiques, en des éléments iconiques. En particulier, la manipulation et la transformation de représentations visuelles et d'images visuelles sont des VP.

De cette étude des capacités intellectuelles et des capacités spatiales, nous retenons les facteurs externes suivants aux ETG personnels :

- la pensée verbale ;
- la pensée visuelle-graphique (elle sollicite les capacités spatiales définies plus haut) ;
- les capacités logiques ;
- les capacités de mémorisation.

2.3 Réalisation d'un test de capacités spatiales et de connaissances géométriques

Les facteurs externes des ETG sont donc notamment composés de capacités spatiales. Celles-ci mettent en relation les espaces que nous avons décrits plus haut. Afin de déterminer des différences interindividuelles et des profils d'ETG personnels, nous avons construit un test de capacités spatiales et de connaissances géométriques. Nous l'avons soumis aux élèves enregistrés sur l'intégralité de la séquence de géométrie dans l'espace, ainsi qu'à une deuxième classe afin d'avoir un échantillon plus important. Ce test a été réalisé en fin de séquence. Il est constitué de trois parties dont certains types de questions sont reproduits en annexe de cet article.

Le test comprend au total 56 questions. La première partie concerne les capacités de perception spatiale telles qu'elles sont définies par Lohmann (1988), c'est- à-dire les rotations spatiales, la visualisation spatiale et l'orientation spatiale. Les questions reprennent respectivement des parties des tests suivants : le test MRT (Mental Rotation Test) introduit par Venderberg et Kuse (1978) et reprenant les bases des figures originales de Shepard et Metzler (1971), le test MCT (Mental Cutting Test) développé dans le CEEB (College Entrance Examination Board) en 1939 du Educational Testing Service (ETS) aux Etats-Unis, et enfin le test de Guay (1976), modifié par Lippa (2002). La seconde partie du test est intitulée « capacités géométriques » et sollicite également des capacités de visualisation spatiale, mais dans un contexte de représentation de figures géométriques. Il reprend quelques questions du test de Baracs (1987). Enfin, la troisième partie porte sur des connaissances géométriques plus formelles. Certaines questions ont pour objectif d'identifier la capacité de l'élève à dépasser la représentation figurale par un raisonnement discursif (questions du type des deux premiers exemples de la partie III, donnés en annexe). D'autres questions ne fournissent aucun dessin et convoquent la capacité à créer éventuellement des images mentales, mais surtout à raisonner et à relier certaines notions entre elles (questions du type du troisième et du quatrième exemple de la partie II, donnés en annexe). L'exemple emblématique est celui dans lequel il est demandé aux élèves de qualifier l'assertion suivante : « trois plans ont un seul point en commun ». Sur un échantillon de 20 élèves, seuls trois élèves ont répondu correctement. Bien évidemment, la formulation sollicite des compétences de logique générale quant à la distinction des propositions du type « toujours vrai » et « vrai en général ». Mais cette question permet surtout d'examiner dans quelle mesure les élèves envisagent diverses situations spatiales à partir de mêmes objets géométriques. Ici, il s'agit de connaître les différentes configurations formées par trois plans de l'espace : parallèles (ou confondus), un plan sécant à deux plans parallèles, trois plans sécants en une droite ou trois plans sécants en un point. L'assertion du test que nous analysons ici, fait référence à cette quatrième configuration. Elle est intéressante, car elle montre clairement la difficulté des élèves à « raccorder par le haut » les concepts géométriques. En effet, une grande partie des activités de la séquence se fait à partir d'un tétraèdre. Or, il suffit de prendre trois plans déterminés par trois faces d’un tétraèdre pour avoir la configuration de trois plans sécants en un point. Par ailleurs, le théorème donné sous la dénomination de « théorème du toit » dans le cours, comporte deux configurations dont l’une d’entre elles représente précisément la situation de trois plans sécants en un point. Malgré cela, la plupart des élèves n’a pas su faire le lien entre ces situations et l’assertion en question.

Voici les résultats globaux obtenus aux trois parties du test par les 20 élèves de l’échantillon:

	Partie I (20 questions)	Partie II (11 questions)	Partie III (25 questions)
Médiane	12 (60% de réussite)	6,5 (59% de réussite)	11 (44% de réussite)
écart-type	2,8	1,9	2,9

On observe une baisse des performances dans la troisième partie. Par ailleurs, si l’on réunit les résultats obtenus dans les deux premières partie du test pour en former une variable aléatoire, on constate qu’elle évolue dans le même sens que celle associée aux résultats de la partie III, mais avec une corrélation faible ($r \approx 0{,}33$).

Nous indiquons dans le tableau suivant les profils synthétiques élaborés dans chaque partie du test, pour trois élèves enregistrés lors de l’ensemble de la séquence. Ces profils sont hiérarchisés de D à A+ dans un ordre croissant de performance :

Elève	Perception spatiale	Capacités géométriques	Connaissances géométriques	
			code du dessin	propriétés géométriques
Anne	B	C	A+	B
Hélène	A+	C-	A+	A
Saliha	D	C-	B-	D

Nous avons vu plus haut que Krutetskii distinguait la préférence verbale logique de la préférence visuelle-figurale, et qu’il était possible de situer chaque élève sur un « cadran » comprenant ces deux axes. Ainsi, notre test nous conduit à positionner approximativement ces trois élèves dans les cadrans suivants :

- Hélène dans le cadran « préférence visuelle-graphique et verbale logique fortes » ;
- Saliha dans le cadran « préférence visuelle-graphique et verbale logique faibles » ;
- Anne dans le même cadran qu’Hélène, mais avec des valeurs plus faibles pour la préférence visuelle-graphique.

3. LE FONCTIONNEMENT DES ETG PERSONNELS : LES PROCESSUS COGNITIFS MIS EN ŒUVRE PAR LES ELEVES AU SEIN DES ETG

Ainsi, les capacités spatiales des élèves sont inégales. Nous avons donc cherché à identifier leur influence dans le fonctionnement des ETG personnels et la manière dont ils déterminent des profils d’ETG. Pour cela, nous avons tout d’abord étudié les types de processus cognitifs en jeu dans ces ETG. Lors de la résolution d’un exercice de géométrie spatiale, trois types de processus sont engagés : des processus qualitatifs, expérimentaux et argumentaux. Tous ces processus sont susceptibles d’être mis en œuvre, de manière concomitante ou complémentaire. Mais l’analyse des séances de recherche enregistrées fait apparaître des inclinations plus ou moins fortes des ETG personnels vers certains types de processus. L’importance qui est accordée aux différents processus cognitifs dans les résolutions de problèmes détermine l’ « empreinte » de l’ETG, voire le paradigme. Ces empreintes d’ETG, sont marquées par deux fonctions : la fonction de pilotage et de la fonction de contrôle.

En effet, nous avons constaté qu'il existait des ETG majoritairement pilotés par la visualisation (préférence visuelle-graphique) et d'autres majoritairement pilotés par le référentiel théorique (préférence logique-analytique). En d'autres termes, le pilotage peut être basé sur les signes iconiques du dessin (ou de la représentation mentale tridimensionnelle), ou au contraire sur les signes symboliques (les mots, les théorèmes…). Mais les ETG ne sont jamais à pilotages exclusifs en géométrie de type II. Il y au contraire interaction entre la visualisation et le référentiel dans le sens d'un contrôle mutuel. Ainsi :

- la visualisation peut jouer une fonction de contrôle vis-à-vis d'un ETG piloté par le référentiel ;
- le référentiel peut à son tour jouer une fonction de contrôle d'un ETG piloté par la visualisation.

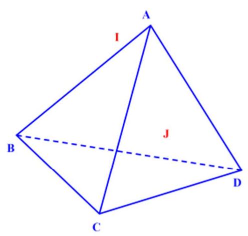
Dans tous les cas, nous avons observé que les empreintes étaient relativement stables. Par contre, un phénomène de louvoiement entre le figural et le discursif a été fréquemment constaté. Nous renvoyons le lecteur à notre thèse (Schlosser, 2012) pour une analyse détaillée de ces notions d'empreinte, de pilotage et de contrôle. Pour des raisons de format, nous nous bornons dans ce texte à la présentation des trois processus cognitifs fondamentaux identifiés chez les élèves lors de la résolution d'exercices de géométrie dans l'espace.

Notons bien avant tout que la distinction entre la dimension syntactique, sémantique et pragmatique du signe ne relève pas d'une dichotomie, mais de processus complémentaires. En particulier, un signe est nécessairement mis en relation avec un objet et un interprétant, c'est-à-dire qu'une signification lui est attribuée, mais celle-ci peut être réduite par exemple à une simple perception iconique, voire une sensation ou un sentiment (dans le cas d'un qualisigne[4]). Pour autant, il est fondamental d'identifier la manière dont cette signification est attribuée.

3.1 Des processus qualitatifs.

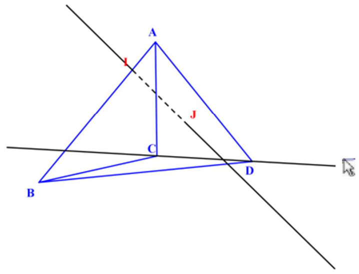
Par processus qualificatif, il convient d'entendre le fait de ne tenir compte que de l'aspect matériel du signe, de son apparence : le signe est pris en l'état. Ce type de processus ne met pas en œuvre d'artefact géométrique, mais uniquement le système visuel (pouvant certes être considéré comme un artefact, mais non géométrique). Il tient compte des règles syntactiques du dessin géométrique, ainsi que du calepin visuel présenté dans le paragraphe 1.2. Ces processus qualitatifs sont nécessairement mis en place lors des activités géométriques. Prenons un exemple observé lors de la séquence de classe de notre corpus. L'énoncé fourni aux élèves est le suivant :

> « On donne un tétraèdre ABCD, un point I sur l'arête [AB] et un point J dans la face ACD. Construire l'intersection de la droite (IJ) et du plan (BCD). »

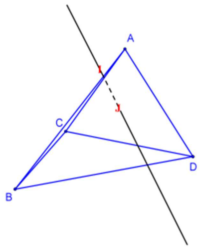


Voici un extrait de dialogue enregistré lors de la recherche :

A: Tu veux qu'on commence à faire CD?
S: Ouais, parce que j'sais pas... c'est
A: Ouais



[4] Voir pour cela Schlosser (à paraître dans les actes ETM4).



[…]
S: On va … pour voir... [rotation de la figure]

A: Elles se coupent?
S: Ben sûrement.
A: On va... fait un truc genre baisse...qu'on voit [rotation de la figure vers le bas], ouais voilà...
S: Ben ouais!
A: Après si tu vas jusqu'en bas, enfin si tu la soulèves genre [parle de la façon de tourner la figure]
S: Comme-ça?
A: Ouais, voilà .

Cet extrait montre bien que les élèves s'appuient sur la visualisation iconique de deux droites sécantes sur le dessin. Bien entendu, le logiciel est utilisé en tant qu'artefact pour modifier les points de vue, mais aucun argument n'est mis en œuvre pour savoir si les droites (IJ) et (BC) sont bien concourantes. Ce type de processus qualitatif peut donc être représenté de la manière suivante sur notre modèle d'ETG (flèche jaune) :

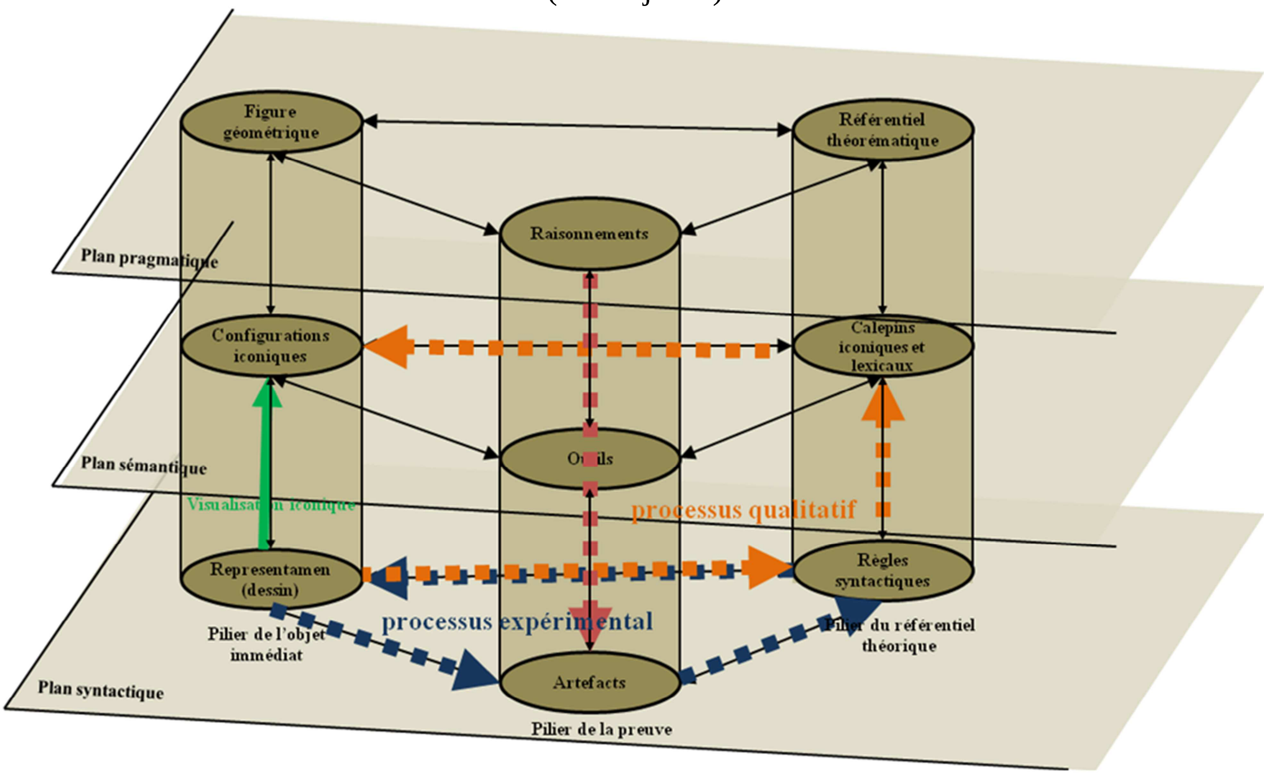


Figure 9 – Représentation d'un processus qualitatif.

Ce processus qualitatif peut être accompagné d'un processus expérimental au niveau syntactique (1ère strate de l'ETG, flèches bleues). Les ETG à pilotage iconique sont dominés par ce type de processus.

3.2 Des processus expérimentaux (au niveau sémantique).

L'élève peut chercher également à donner une dimension informative au representamen, concernant l'objet qu'il représente par le biais d'outils (notamment par des compositions ou des décompositions structurales). Cela consiste donc en une extraction d'informations portant sur l'objet, par le biais du signe qui le représente (mouvement allant du signe à l'objet). Voici un exemple tiré du même exercice que ci-dessus, mais concernant un autre binôme de la classe :

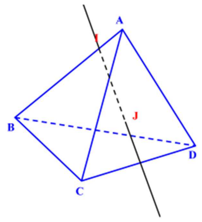
C : alors attends…[Visualisation à l'aide du curseur de la souris]

En fait, j'ai pas trop compris il faut qu'on fasse quoi là ? Qu'on trouve [inaudible] avec ça là ?

H : oui

C : mais euh, ça fait ça de toute façon. [désigne l'intersection de (IJ) avec (CD) sur le dessin 2D]

H : à mon avis on prolongerait [désignation et prolongement de (BC) à l'aide du curseur de la souris]



C : C'est hors sujet parce que c'est pas dans ce plan-là. Ils demandent ça, l'intersection, mais pas dans le plan-là

H : en fait il est pas… Comment dire, c'est pas une intersection [inaudible] c'est juste une intersection de deux lignes sur un dessin

C : ouais

H : tu vois ce que je veux dire ?

C : ouais [blanc]

H : le plan…

C : le plan, en fait c'est là le plan, le truc qui est par terre

H : ouais, par terre ?

C : oui enfin bref. Faut qu'on trouve un truc, avec ça, un point qui est dedans, eh bien c'est là

H : c'est pas là !

C : je vois trop pas les trucs

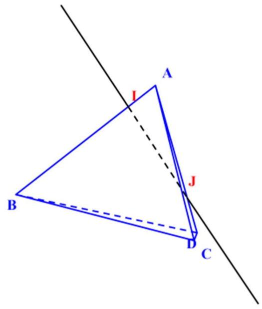
H : je vois trop pas non plus si IJ elle passa déjà là là ou si elle passe carrément à côté

C : quoi ? Mais non… Mais non…

[Rotation de la figure]

H : tiens, regarde, elle passe à côté, tu la vois la p… [mot argotique]

H : ben en fait, non en fait, non il faut pas les prolonger, si tu prolonges tu vois BC et BD, tu vois genre elle va arriver là et là, enfin elle arrive là, mais le problème c'est qu'il faut… Il faut trouver des points !



C : eh bien AD

H : pourquoi AD ?

C : je sais pas. Ah ben non je suis conne, comme je l'ai vue comme ça, je me suis dit euh

[nouvelle rotation de la figure puis replacement de celle-ci dans la position d'origine]

[blanc] [les droites (IJ), (AC), (BC) sont prolongées à l'aide du curseur de la souris].

Sur cet exemple, nous trouvons deux processus différents : le processus qualitatif pour l'élève C et expérimental pour l'élève H. En effet, tout indique que ce deuxième élève produit une image mentale tridimensionnelle (l'objet), mise en relation avec le dessin (le representamen), à partir de laquelle il travaille. Ce type de processus prend également une place importante dans les ETG à pilotage iconique.

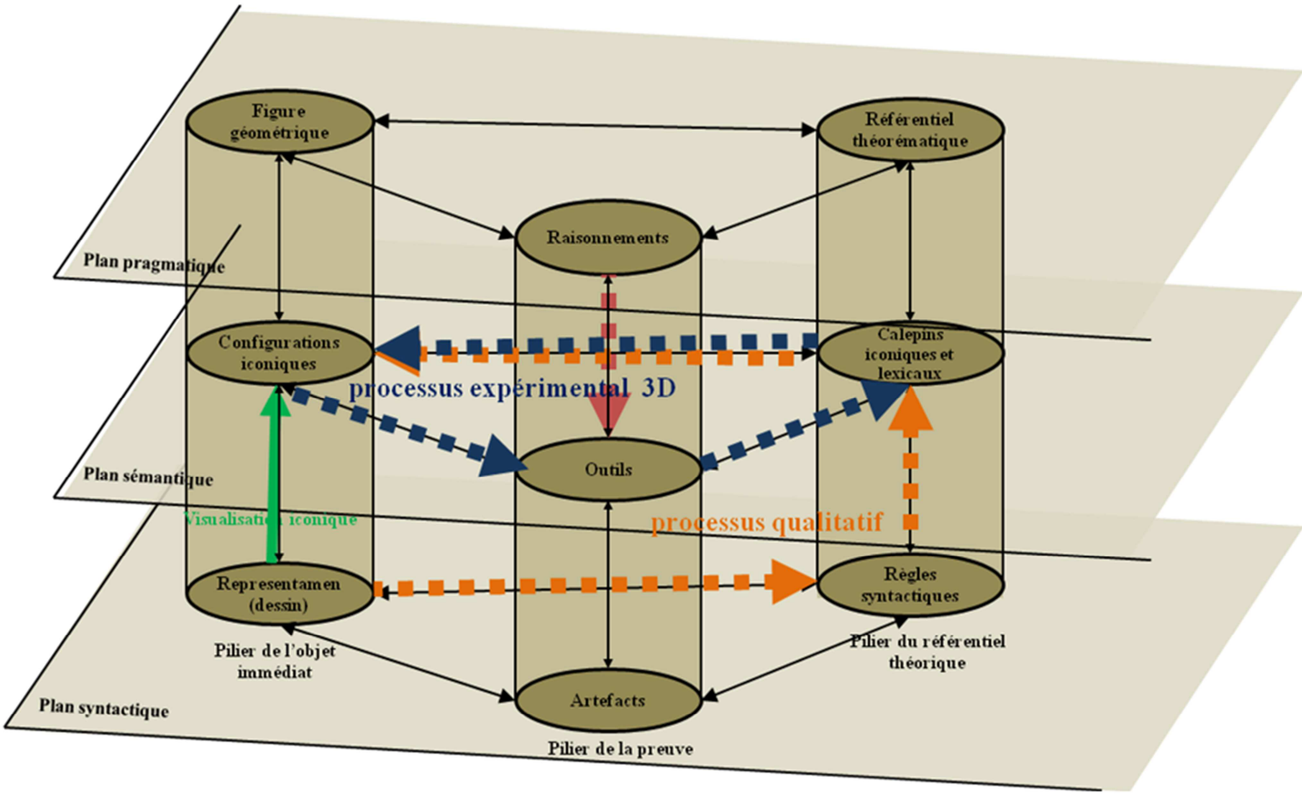


Figure 9 – Représentation d'un processus expérimental au niveau sémantique.

3.3 Des processus argumentaux

Il s'agit du processus « final » en jeu dans ce que l'on entend par « géométrie hypothético-déductive ». Ce processus fait intervenir le registre discursif, puisqu'il engage un raisonnement. Il se situe donc dans la généralité. Ce raisonnement en question peut être modélisé par les outils de la logique. Dans la logique classique, le processus argumental met en œuvre des théorèmes qui permettent de passer d'une prémisse à une conclusion.

Reprenons pour exemple notre premier binôme, lors du même exercice :

> A: IJ il est dans ACD [blanc]. On n'a pas une connerie genre il est dans ACD et c'est dans BCD, c'est deux plans ? [blanc] C'est la même chose qu'on a fait avant mais dedans…
> S: Comment ?
> A: C'est la même chose qu'on a fait avant en plus [long blanc].
> Réfléchissons, pour faire une intersection, il faut que IJ et BCD soient coplanaires [blanc].
> Quoique, quand tu regardes sur la fiche, il y a pas marqué qu'il faut que ce soit coplanaire.
> [blanc et exploration des commandes dans les menus déroulants]
> S: Tu crois pas qu'on demande de l'aide à la prof?
> A: Ouais.

Même si ce processus n'a pas pu aboutir à la solution, on voit de quelle manière l'élève A cherche à construire une heuristique discursive, notamment sur la base de l'heuristique d'un exercice précédent et de théorèmes du cours. Les ETG à pilotage symbolique sont dominés par ce type de processus.

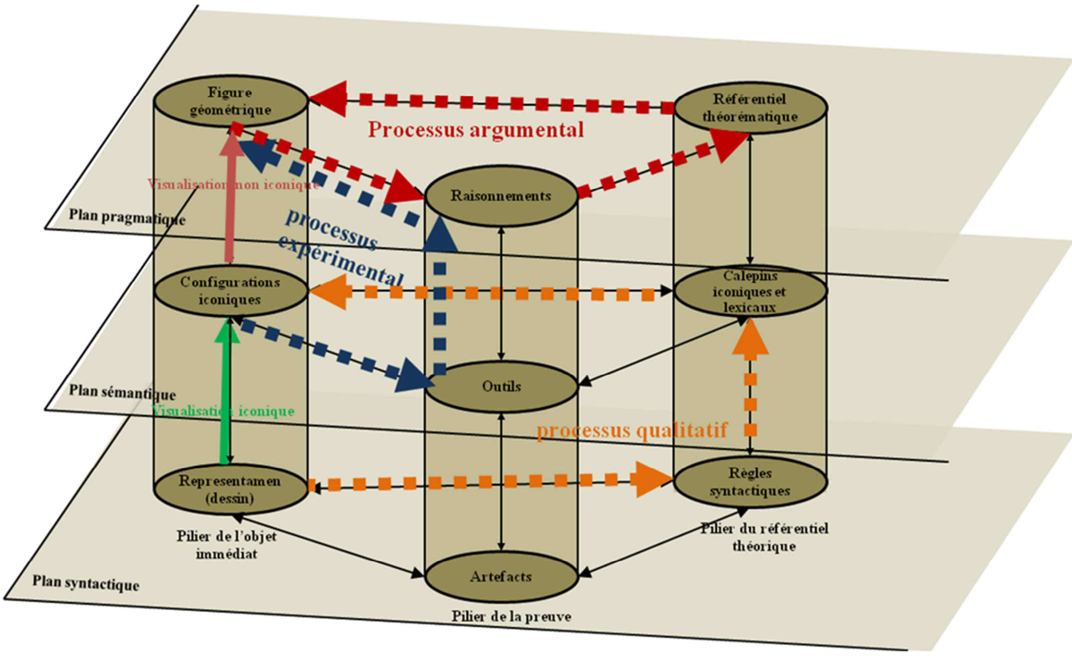


Figure 9 – Représentation d'un processus argumental.

Conclusion

L'objectif de cet article était de présenter le fonctionnement des espaces de travail géométriques personnels des élèves de lycée, dans le cas de la géométrie synthétique dans l'espace. Nous avons modélisé l'ETG personnel d'un élève en trois strates, à savoir les niveaux syntactiques, sémantiques et pragmatiques. Pour chacun de ces trois niveaux, nous retrouvons les trois piliers fondamentaux que sont les objets, la preuve et le référentiel théorique. D'un point de vue sémiotique, la résolution d'un problème de géométrie dans l'espace conduit les élèves à mettre en œuvre des processus qualitatifs, expérimentaux et argumentaux. Cette modélisation du plan cognitif de l'ETG personnel s'appuie sur la sémiotique triadique de Peirce, dont les fondements sont la distinction entre des objets premiers, seconds et troisièmes. Ainsi, concernant les objets du registre figural, nous avons été amenés à faire la distinction entre la prise en compte iconique, indiciaire ou symbolique du signe. L'exemple du dessin de deux droites sécantes montre bien ces différences de point de vue sémiotique. Il montre par ailleurs toute la richesse cognitive de la géométrie dans l'espace, dont il est selon nous préjudiciable de se passer dans la formation de tout citoyen.

Pour des raisons de format d'article, nous ne présentons dans ce texte qu'une partie de l'aspect fonctionnement des ETG personnels, et renvoyons le lecteur à notre thèse pour l'aspect construction, mais également pour les notions de treillis sémiotique, et de pilotage et contrôle des ETG (distinction entre pilotage iconique et pilotage symbolique). Les empreintes des ETG sont fortement dépendantes de facteurs externes, que sont les capacités de visualisation et de traitement spatial que nous avons pu évaluer grâce à un test complet. Ainsi, les élèves présentant de grandes capacités spatiales sont enclins de manière durable à travailler au niveau sémantique (deuxième strate du plan cognitif de l'ETG), notamment en considérant le dessin comme un signe indiciaire d'une image mentale tridimensionnelle (signe iconique) sur laquelle ils réalisent leur recherche. D'autres élèves louvoient entre un pilotage argumental et un pilotage iconique de l'ETG, au gré de leur réflexion (louvoiement entre la deuxième et la troisième strate). Ainsi, l'enseignement gagnerait à assumer des activités de visualisation spatiale dédiées, et à les distinguer des tâches de traitement argumental pur.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

AID-CREEM. *Geospace (version 2007*). http://www2.cnam.fr/creem/.

BARACS, J. (1987). Exercices de perception structural (2ème partie). *Bulletin AMQ, 1987,* 20-23.

BISCHOP, A. (1980). Spatial abilities and mathematics education - a review. *Educational Studies in Mathematics, 11,* 71-81.

BROUSSEAU, G. (1990). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9* (3), 309-336.

CHAACHOUA, H. (1997). Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Etude d'un cas : la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes. *Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier (Grenoble 1).*

CHEVALLARD, Y. (2002). *Organiser l'étude 1. Structures et fonctions.* Grenoble : La Pensée Sauvage, 3-32.

DELEDALLE, G. (1979). *Théorie et pratique du signe. Introduction à la sémiotique de Charles S. Peirce*. Paris : Payot.

DUVAL, R. (2005). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée mathématiques. *XXXII ième colloque COPIRELEM,* 67-89.

EINSTEIN, A. (1954). Préface. In M. Jammer (Ed), *Concepts d'espace, une histoire des théories de l'espace en physique* (traduction de l'ouvrage original Jammer, M. (1993 – 3e ed.) *Concepts of Space. The History of Theories of Space in Physics*). Paris : VRIN.

GUAY R. MC DANIELS E. (1976, modifié par Lippa & al. (2002)). *The Visualization of Viewpoints*. The Purdue Research Foundation.

HOUDEMENT C. & KUZNIAK, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 11*, 175-193.

JAMMER, M. (2008). *Concepts d'espace, une histoire des théories de l'espace en physique* (traduction de l'ouvrage original Jammer, M. (1993 – 3e ed.). *Concepts of Space. The History of Theories of Space in Physics*). Paris : VRIN.

KRUSTETSKII, V.A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* Chicago*:* University of Chicago Press.

KUZNIAK, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *16*, 9-24.

LOHMAN, D. (1988). Spatial abilities as traits, processes and knowledge. *Advances in the psychology of human intelligence*, *4*.

LOMBARD, PH. (1994). La « géométrie de l'espace » comme obstacle épistémologique. *Colloque Inter-IREM d'Histoire et d'Epistémologie-Cherbourg*.

MACH, E. (1908). *La connaissance et l'erreur* (traduit sur la dernière édition allemande, par le Dr Marcel Dufour). Paris : Flammarion.

MAIER, P.H. (1996). Spatial geometry and spatial ability- How to make Solide geometry solid? In *: E.* Cohors-Fresenborg & K. Reiss & G. Toener & H.G. Weigand, *Selected papers from the Annual Conference of Didactics of Mathematics 1996,* Osnabreck, 63-75.

Ministère de l'Education Nationale – CREEM. *Interesp (version 1*, 1998).

PEIRCE, C.S. (1931-1935). *Collected Papers*. Cambridge: Harvard University Press.

PEIRCE, C.S. (textes rassemblés par DELEDALLE G.(1978)). *Ecrits sur le signe*. Paris : Editions du Seuil.

POINCARE, H. (1914 ed 1968). *Science et hypothèse*. Paris : Flammarion.

PRESMEG, N. (2008). Spatial Abilities Research as a Foundation for Visualization in Teaching and Learning Mathematics. In P. Clarkson & N. Presmeg (2008). *Critical Issues in Mathematics Education* (Chapitre 6, pp.83). Springer Science & Business Media, LLC.

SCHLOSSER, F. (2012). Construction et fonctionnement d'espaces de travails géométriques personnels d'élèves. Cas de la géométrie dans l'espace en 1ère L à option mathématique. *These de l'Université Denis- Diderot Paris 7*.

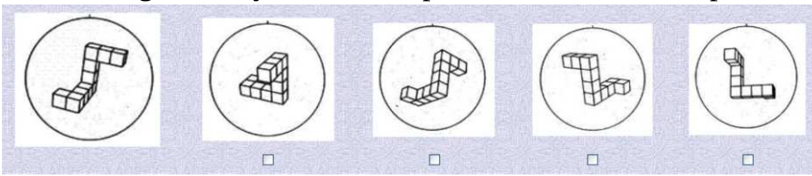
SCHLOSSER, F. (2014), Pragmatique de la construction et du fonctionnement des espaces de travail géométriques. Etude de cas en géométrie dans l'espace synthétique au lycée. *Symposium ETM4 de madrid* (*à paraître*).
SHEPARD, R.N. & METZLER, J. (1971). Mental rotation of three-dimensional objects. *Science, 171(3972),* 701-703.
THURSTONE, L.L. (1938). *Primary Mental Abilities.* Chicago: University of Chicago Press.
VANDERBERG S.G. & KUSE, A.R. (1978). Mental Rotation, a group of three dimensional spatial visualization*. Perceptual and Motor Skills, 47.*
VITTORI, T. (2009). *Les notions d'espace en géométrie – De l'Antiquité à l'Age classique*. Paris : L'Harmattan

ANNEXE

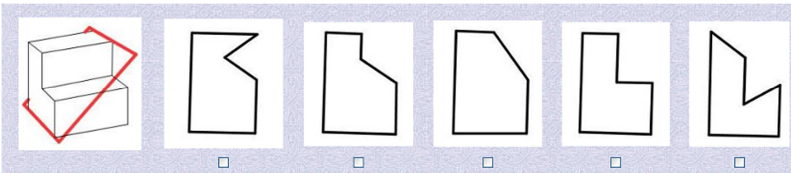
EXEMPLES DE QUESTIONS PROPOSEES DANS LE TEST DE CAPACITES SPATIALES ET DE CONNAISSANCES GEOMETRIQUES

<u>Partie I :</u> perception spatiale (20 questions)

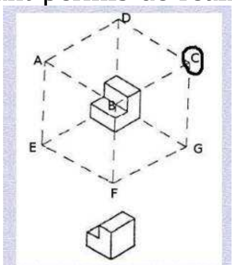
Les élèves doivent désigner l'objet modèle représenté suivant deux points de vue différents (5 questions) :



Il s'agit d'identifier la section plane correspondant à la configuration donnée (5 questions) :

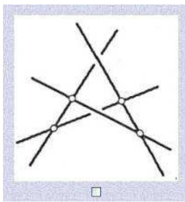


Il faut identifier le point de vue ayant permis de réaliser un nouveau dessin d'un objet donné (5 questions)

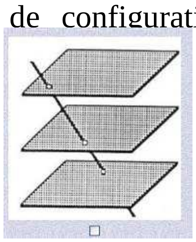


<u>Partie II :</u> capacités géométriques (11 questions)

Identifier si ce type de configuration est possible (5 questions)

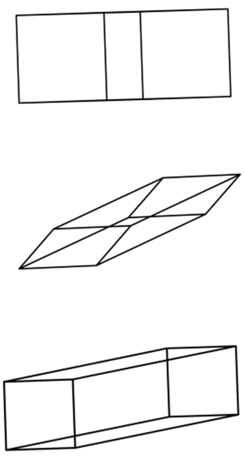


Identifier si ce type de configuration est possible (6 questions) :



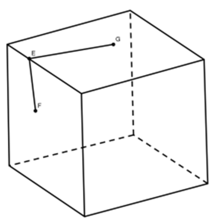
<u>Partie III :</u> connaissances géométriques (25 questions)

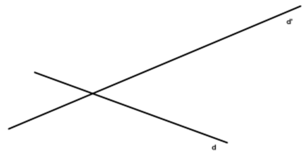
Identifier parmi 10 dessins ceux qui peuvent représenter un cube, par exemple :



Les segments [EF] et [EG] sont placés sur deux faces adjacentes d'un cube. E est sur l'arête adjacente à ces deux faces. Les segments [EF] et [EG] sont-ils perpendiculaires ?

□ Toujours vrai
□ Vrai en général
□ Faux en général
□ Toujours faux



Sans qu'aucun dessin ne soit fourni, répondre à 10 questions de ce type : Trois plans ont un seul point en commun : □ Toujours vrai □ Vrai en général □ Faux en général □ Toujours faux Si deux droites sont contenues respectivement dans deux plans sécants, alors ces droites sont sécantes : □ Toujours vrai □ Vrai en général □ Faux en général □ Toujours faux	 Les droites d et d': □ sont sécantes □ ne sont pas sécantes □ le dessin ne permet pas de répondre