JULIA PILET

MODELISATION DE PARCOURS D'ENSEIGNEMENT DIFFERENCIE APPUYES SUR UN DIAGNOSTIC EN ALGEBRE ELEMENTAIRE

juliapilet@gmail.com

ESPE, Université Paris 12, LDAR, Université Paris 7

Résumé.
Ma thèse de doctorat a consisté en la conception de parcours d'enseignement différencié visant à aider les enseignants à prendre en charge, dans la classe, l'hétérogénéité des apprentissages des élèves en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire. Dans le projet de recherche PépiMeP, nous avons implémenté ces parcours dans une plateforme en ligne de l'association Sésamath pour les rendre accessibles aux enseignants. Après avoir présenté notre problématique et notre méthodologie, nous exposons la conception du modèle des parcours d'enseignement différencié.

Contexte de la recherche et problématique

La gestion de l'hétérogénéité des apprentissages des élèves et la différenciation de l'enseignement

La gestion de l'hétérogénéité des apprentissages des élèves et la différenciation de l'enseignement sont deux sujets au cœur des politiques éducatives actuelles. Elles stipulent que, pour « assurer la réussite de tous les élèves », l'École apporte des réponses différenciées aux difficultés des élèves[56]. Ces politiques multiplient les injonctions à la mise en place de dispositifs de re-médiation, d'accompagnement personnalisé, d'individualisation et de personnalisation de l'enseignement hors du temps scolaire ou de pédagogie différenciée. Mais les enseignants éprouvent des difficultés à mettre en place ces dispositifs. Ils peuvent se trouver en difficulté pour repérer et exploiter les manifestations des connaissances des élèves et ne pas trouver des ressources appropriées pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages. Ils s'appuient le plus souvent sur des catégories d'élèves du type « les bons, les moyens, les faibles, les rapides », supposées situer leur niveau en mathématiques. Mais ces catégories, insuffisamment caractérisées par rapport aux contenus enseignés, semblent peu exploitables pour organiser la régulation des apprentissages en classe. Des études de didactique et de sciences de l'éducation (par exemple, Bolon, 2002 ; Charnay, 1995) mettent en évidence des limites de ces dispositifs lorsqu'ils ne prennent pas suffisamment en compte le *contenu*

[56] Se référer par exemple à http://www.education.gouv.fr/cid48653/les-dispositifs-d-accompagnement-des-collegiens.html, consulté le 4 janvier 2014.

enseigné et *l'évaluation des élèves*. Les chercheurs du réseau RESEIDA[57] (Rochex & Crinon, 2011) estiment que le « souci de faciliter la tâche aux élèves », se traduit par un «glissement de l'activité intellectuelle vers des activités à faible enjeu cognitif». Selon eux, la trop faible prise en compte des finalités du contenu enseigné pour évaluer les besoins d'apprentissage des élèves, la proposition de tâches avec un trop faible enjeu cognitif et la tendance à orienter l'enseignement vers l'individuel plutôt que le collectif conduiraient les dispositifs de différenciation proposés par les enseignants à construire des inégalités plutôt qu'à les réduire. Les modes de faire des enseignants, leur langage ou la succession de tâches isolées les unes des autres laisseraient à la charge des élèves certains apprentissages sans que les enseignants s'en aperçoivent et conduiraient à l'émergence de processus différenciateurs et à des inégalités entre les élèves.

Cet écart entre les injonctions des politiques éducatives et leur mise en œuvre par les enseignants dans les classes met en avant un besoin d'études et de recherches pour accompagner les enseignants dans la prise en compte de la gestion de l'hétérogénéité des apprentissages des élèves. Nous abordons cette problématique dans le contexte spécifique du projet de recherche PépiMeP.

Le projet PepiMeP

Notre travail de thèse se situe dans le cadre du projet pluridisciplinaire PépiMeP[58] (Grugeon et al, 2014) qui vise à la conception d'Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain (E.I.A.H.). Il est le fruit d'une collaboration entre des chercheurs en didactique des mathématiques du laboratoire L.D.A.R. de l'université Paris 7, de chercheurs en informatique du L.I.P.6 de l'université Paris 6 et d'une communauté d'enseignants de mathématiques, structurée autour de l'association Sésamath[59] et d'un groupe I.R.E.M. de l'université Paris-Diderot sur l'algèbre et la différenciation de l'enseignement. Cette association développe des ressources en ligne diversifiées, libres et gratuites, en particulier la plateforme LaboMeP et les exercices interactifs de MathenPoche. Le projet PépiMeP fait suite aux projets Pépite (Prévit et al., 2007) et Lingot (Delozanne et al., 2010) qui ont donné lieu à un logiciel, nommé *Pépite*, de diagnostic des compétences des élèves en algèbre élémentaire fondé sur une analyse épistémologique, cognitive et didactique de ce domaine (Grugeon, 1997). Chaque élève passe un test composé de dix exercices. Le logiciel analyse automatiquement les réponses à partir du modèle didactique de la compétence algébriques définie par Grugeon pour construire un profil cognitif de l'élève.

Le projet PépiMep a eu trois principaux objectifs. Premièrement, diffuser le logiciel de diagnostic Pépite sur la plateforme LaboMeP de l'association Sésamath sous la forme de séances de test diagnostic. Deuxièmement, concevoir et de diffuser, sur cette plateforme, les parcours d'enseignement différencié sous la forme de séances d'enseignement différencié (Pilet et al., 2013). Elles sont composées d'exercices adaptés aux spécificités des connaissances de groupes d'élèves diagnostiquées par Pépite. Troisièmement, évaluer l'utilisation des séances de diagnostic et des parcours par les enseignants et les élèves du secondaire. C'est dans les deux derniers objectifs que s'inscrit notre recherche.

[57] Le réseau RESEIDA est un regroupement interdisciplinaire de chercheurs issus de plusieurs laboratoires français et francophones. Piloté par Elisabeth Bautier et Jean-Yves Rochex, il porte sur la socialisation, l'enseignement, les inégalités et les différenciations dans les apprentissages.
[58] Projet P.I.C.R.I. financé par la région Ile-de-France.
[59] http://www.sesamath.net/

Problématique et hypothèses de travail

Notre travail a consisté à concevoir des parcours d'enseignement différencié (notés PED), articulé au logiciel de diagnostic Pépite, sous la forme d'un modèle didactique et informatique et à évaluer son écologie possible dans l'enseignement secondaire actuel. Du point de didactique, nous cherchons à déterminer quels savoirs et savoir-faire faire intervenir dans les PED pour organiser un enseignement différencié en algèbre adapté à la fois aux spécificités des connaissances des élèves repérés par Pépite et à une stratégie d'enseignement pour la classe. Du point de vue informatique, nous cherchons à formaliser le modèle de façon à caractériser les PED par des types de tâches et des variables didactiques pour automatiser leur proposition suite au passage du test diagnostique Pépite.

Le domaine mathématique considéré dans la conception du modèle de PED est celui de l'algèbre élémentaire à la transition entre le collège et le lycée. Comme l'ont déjà montré les travaux de l'équipe PépiMeP, ce domaine est particulièrement intéressant à étudier vis-à-vis de la gestion de l'hétérogénéité des apprentissages. En effet, l'algèbre élémentaire constitue un élément pivot du curriculum mathématique de l'enseignement secondaire pour pouvoir poursuivre des études scientifiques. Pourtant, il constitue un obstacle difficilement surmontable pour beaucoup d'élèves. En France, à partir de la classe de seconde, l'algèbre devient un outil au service des fonctions ce qui est en décalage par rapport à la fonction donnée à l'algèbre au collège et peut expliquer les difficultés des élèves en mathématiques à l'entrée au lycée.

De nombreux travaux en didactique des mathématiques (voir par exemple Kieran (2007) pour une synthèse) ont mis en évidence des difficultés d'apprentissage et d'enseignement de l'algèbre. Selon nous, les difficultés des élèves peuvent être renforcées par le fait que l'élève apprend dans une institution donnée, où le savoir est transmis selon certaines conditions. Nous nous appuyons sur les travaux de Castela (2008) pour qui l'existence *de savoirs et de savoir-faire ignorés par l'institution*, dans le sens où ils ne sont pas organisés institutionnellement, contribuerait à ce que certains élèves réussissent alors que d'autres échouent en mathématiques. Nous faisons l'hypothèse qu'au-delà des difficultés de conceptualisation, l'hétérogénéité des connaissances des élèves en algèbre est renforcée par des besoins d'apprentissage ignorés par les institutions. Mettre à disposition des élèves et des enseignants des PED pour organiser ces savoirs et savoir-faire peut favoriser une évolution plus idoine des rapports personnels des élèves à l'algèbre. Par ailleurs, l'identification des connaissances apprises des élèves à partir d'une évaluation diagnostique, comme le test Pépite, peut faciliter le repérage des besoins d'apprentissage des élèves et donc la proposition de types de tâches et d'une gestion didactique adaptés.

Notre problématique consiste à déterminer des savoirs et savoir-faire ignorés ou implicites au collège et au lycée en algèbre afin d'en dégager des questions génératrices à aborder dans les PED. Une question est génératrice si elle est suffisamment large pour travailler des raisons d'être des objets mathématiques considérés. Les PED sont conçus pour un enseignement au sein de la classe et non dans un dispositif d'individualisation ou de personnalisation. Pour chaque question génératrice, nous cherchons à caractériser un objectif d'enseignement commun à la classe et des stratégies différenciées (choix des types de tâches, des variables didactiques, des aides apportées par l'enseignant) pour que les tâches proposées et leur gestion didactique soient adaptées aux besoins d'apprentissage des élèves en algèbre. Enfin, nous nous interrogeons pour savoir si les PED conçus favorisent une évolution plus idoine du rapport personnel des élèves à l'algèbre.

Le cadre de théorie anthropologique s'est imposé pour concevoir les PED et faire le lien entre des apprentissages ignorés en algèbre au collège et les besoins d'apprentissage des élèves repérés par Pépite. Il nous a conduit à construire une méthodologie basée sur la définition d'une organisation mathématique de référence pour le domaine de l'algèbre élémentaire.

Cadres théoriques et méthodologie

La théorie anthropologique du didactique pour modéliser les PED et déterminer les questions génératrices à aborder dans les PED

La théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999) propose un modèle dans lequel toute activité humaine « consiste à *accomplir une tâche t* d'un certain *type T*, au moyen d'une certaine technique τ, *justifiée* par une *technologie* θ qui permet en même temps de la *penser*, voire de la *produire*, et qui à son tour est *justifiable* par une théorie Θ. En bref, toute activité *met en œuvre* une organisation qu'on peut noter [*T*/τ/θ/Θ] et qu'on nomme *praxéologie*, ou *organisation praxéologique ».* Une praxéologie mathématique ou d'organisation mathématique, notée OM, désigne un « objet de la réalité mathématique ». Toute praxéologie est constituée de deux blocs : un bloc pratico-technique [*T*/τ] et d'un bloc technologico-théorique [θ/Θ] ordinairement identifiés comme, respectivement, un savoir-faire et un savoir.

Dans une institution donnée, les praxéologies existent rarement comme praxéologies ponctuelles. Les praxéologies s'emboîtent les unes dans les autres selon les différents niveaux : ponctuel, local, régional et global. Cet emboîtement suit la hiérarchie des niveaux de codétermination didactique. Le sujet est une organisation ponctuelle, le thème est une organisation locale, le secteur est une organisation régionale, le domaine est une organisation globale et la discipline est commune à tous les domaines.

Les praxéologies circulent depuis l'institution qui les a produites vers d'autres institutions qui les perçoivent utiles à leur fonctionnement. Cette dynamique s'accompagne d'un phénomène de *transposition didactique*. La théorie anthropologique du didactique postule qu'il n'est pas possible d'expliquer les caractéristiques du « savoir appris » sans prendre en considération toutes les étapes de la transposition didactique. Selon Bosch et Gascón (2005), pour interpréter adéquatement ces étapes, le chercheur adopte un point de vue épistémologique en considérant une organisation mathématique épistémologique de référence

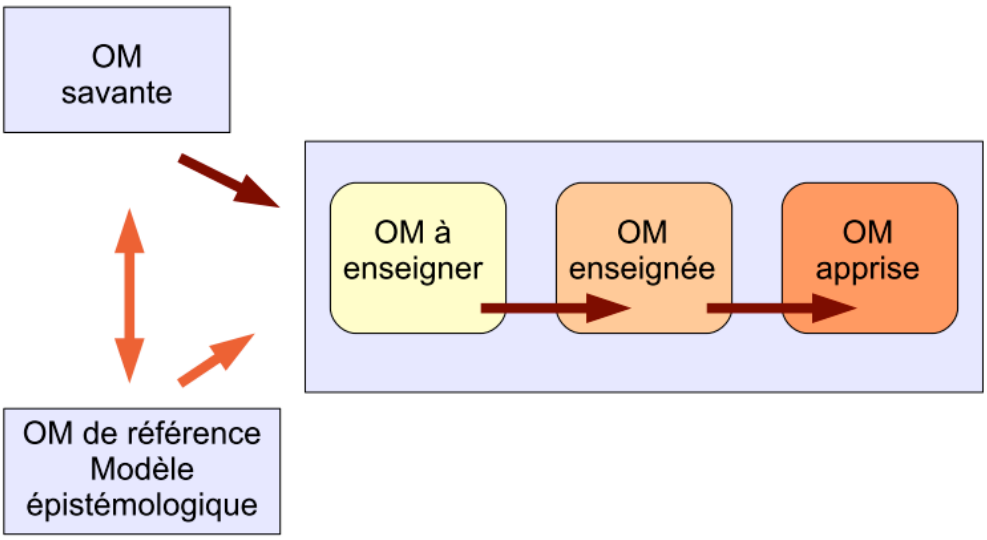

Figure 1. Schéma du processus de transposition didactique de Bosch et Gascón (2005)

Pour identifier les savoirs et savoir-faire ignorés au collège et en classe de seconde (OM à enseigner) et de faire le lien avec les difficultés des élèves en algèbre repérés par Pépite (OM apprises), nous suivons le processus de transposition didactique pensé par Bosch et Gascon. Nous définissons une OM de référence pour le domaine de l'algèbre élémentaire à partir d'une synthèse de travaux de didactique de l'algèbre (Chevallard, 1985 ; Ruiz-Munzon et al., 2012 ; Kieran, 2007). Elle est organisée en OM globales, régionales et locales. Nous nous sommes focalisés l'OM régionale de référence sur les expressions algébriques polynomiales (au maximum de degré 3 à coefficients réels en fin de collège et début de lycée) car elles sont au cœur de la résolution de problèmes mettant en jeu des formules ou des équations. Nous avons centré l'étude sur les aspects épistémologiques sous-jacents à la génération des expressions algébriques, au calcul sur les expressions et à leur utilisation dans des contextes intra- ou extra-mathématiques. Puis, cette OM est utilisée comme référence (cf. figure 2) pour analyser l'OM à enseigner au collège et en seconde à partir des instructions officielles, des manuels scolaires et des documents d'accompagnement, et, les OM apprises, à partir du test de diagnostic Pépite. L'analyse des écarts entre OM à enseigner et OM apprises conduit à définir des questions génératrices qui motivent les types de tâches et les environnements technologico-théoriques à convoquer dans les PED. Interviennent par ailleurs dans la conception des PED des éléments sur leur gestion et le rôle de l'enseignant, c'est pourquoi, en aval du choix des questions génératrices, nous avons défini une méthodologie itérative spécifique à la modélisation des PED dans le cadre du projet PepiMeP.

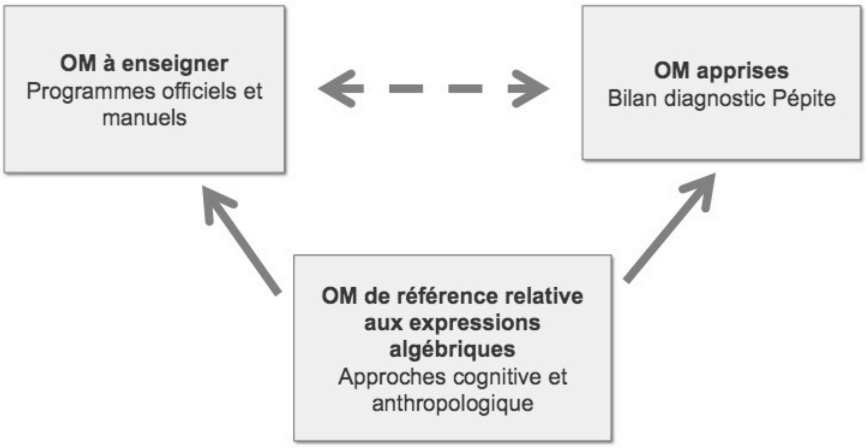

Figure 2. Méthodologie d'analyse des écarts en OM apprises et OM à enseigner à partir de l'OM de référence

Une méthodologie itérative et collaborative

Nous avons adopté une démarche itérative et collaborative avec les différents partenaires du projet PépiMeP. Au départ, à partir des analyses menées en amont, nous avons conçu des PED qui ont été proposés aux chercheurs en informatique et aux enseignants. D'un côté, le travail avec les chercheurs en informatique et les développeurs a consisté à définir, systématiser et formaliser le modèle de PED en vue d'automatiser la génération de parcours sur LaboMeP suite au passage du test de diagnostic Pépite. De l'autre, entre chercheurs et enseignants de collège et de lycée (par le biais d'un groupe IREM de l'Université Paris-Diderot), nous avons ensemble précisé le choix des énoncés, le choix des expressions algébriques, le déroulement des parcours en classe et les savoirs et savoir-faire à institutionnaliser. À ce stade, nous concevons les PED à partir d'éléments de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) pour associer le choix des types de tâches à convoquer aux besoins d'apprentissage des élèves repérés par Pépite, à leur gestion didactique et au milieu. Selon les besoins d'apprentissage des élèves, nous proposons des PED reposant sur le même type de tâches mais différenciés selon des variables didactiques (nature et complexité des expressions, forme d'énoncés, aides proposées aux élèves).

Les enseignants ont testés les parcours dans leurs classes et ont fait passer le test Pépite à leurs élèves en début et en fin d'année scolaire. Une partie de ces expérimentations a été analysée qualitativement (Pilet, 2012) en comparant analyses *a priori* et *a posteriori* afin de déterminer si les PED et la gestion didactique ont permis de travailler sur les enjeux didactiques des PED. Les résultats des élèves au test Pépite sont analysés quantitativement afin de repérer des évolutions du rapport personnel des élèves à l'algèbre suite au passage des PED. Les expérimentations et les analyses menées nous ont conduit à revenir sur les choix didactiques des parcours avec les enseignants.

Avant de présenter le modèle de PED, nous commençons par présenter dans la section suivante l'OM de référence relative aux expressions algébriques que nous avons conçue et exploitée pour l'analyse des écarts entre OM à enseigner et OM apprises.

L'OM de référence relative aux expressions algébriques

Éléments épistémologiques relatifs aux expressions algébriques

Pour définir une OM de référence sur les expressions algébriques, nous croisons des travaux de didactique de l'algèbre relevant des approches cognitive et anthropologique. Ces deux approches complémentaires permettent de situer les rapports personnels des élèves et les processus de conceptualisation de l'algèbre des élèves relativement au rapport institutionnel à l'algèbre attendu dans l'institution considérée. Des travaux relevant d'une approche cognitive proposent des modèles de l'activité algébrique des élèves. Par exemple, chez Kieran (2007), l'activité algébrique relève de trois types d'activité : activité générative, transformationnelle et globale au niveau du meta. C'est à travers ces trois activités que les élèves conceptualisent les objets de l'algèbre. Les travaux relevant d'une approche anthropologique proposent quant à eux des modèles épistémologiques de l'enseignement de l'algèbre. Ils permettent d'interroger les phénomènes didactiques et transpositifs qui déterminent la place et la fonction de l'algèbre à enseigner dans les curriculums. Chevallard (1985) et Gascón (1994) remettent en question l'algèbre comme arithmétique généralisée et introduisent la notion de modélisation. Plus récemment, Ruiz-Munzon modélise l'enseignement de l'algèbre comme un processus d'algébrisation des programmes de calcul en plusieurs étapes (Ruiz-Munzón et al., 2012).

Pour nos analyses, nous retenons les éléments épistémologiques au cœur de la génération des expressions algébriques, de la capacité d'adapter leur interprétation pour en faire des usages variés, de leur transformation à partir d'un calcul contrôlé et intelligent. Il s'agit des éléments suivants : l'équivalence des programmes de calcul (Ruiz-Munzón et al., 2012 ; Chevallard & Bosch, 2012) et des expressions algébriques, (Frege, 1971 ; Drouhard, 1992, Kieran, 2007), la dialectique entre le numérique et l'algébrique (Chevallard, 1985), les aspects structural et procédural des expressions algébriques (Sfard, 1991), leur interprétation dans d'autres registres de représentation (Duval, 1995 ; Bardini, 2003). Ces différents aspects sont selon nous constitutifs du bloc technologico-théorique de l'OM régionale autour des expressions algébrique que les élèves doivent construire pour avoir un rapport idoine au calcul algébrique. Ils nous permettent de définir l'OM régionale de référence relative aux expressions algébriques.

OM régionale relative aux expressions algébriques composée de trois OM locales

Nous organisons le domaine algébrique en une OM globale dans laquelle nous distinguons au moins trois OM régionales : une première relative aux expressions algébriques, une seconde relative aux formules et une troisième relative aux équations. L'OM régionale sur les expressions algébriques, sur laquelle nous nous focalisons dans cette étude, intègre trois organisations mathématiques locales dont nous justifions l'existence à partir des travaux Ruiz-Munzón.

Ruiz-Munzón modélise l'enseignement de l'algèbre comme un processus d'algébrisation des programmes de calcul en plusieurs étapes (Ruiz-Munzón et al., 2012). Un programme de calcul est un énoncé qu'une expression algébrique symbolise. Par exemple, l'expression algébrique E l'algèbre des polynômes qui s'appuie sur l'existence d'expressions équivalentes et porte sur le problème qui consiste à transformer une expression en une autre, équivalente. Les genres de tâches constitutifs de OM3 sont les suivants : développer une expression algébrique de type donné, factoriser une expression algébrique de type donné, réécrire un monôme de type donné, calculer une expression algébrique. Les éléments technologiques qui permettent d'expliquer et justifier la transformation d'une expression en une autre peuvent être décrits par les propriétés du calcul algébrique (distributivité, associativité, commutativité, etc.) et ses conventions d'écriture.

Les trois OM locales sont intimement liées puisque la convocation de certains types de tâches d'une OM locale implique la convocation d'autres types de tâches des OM locale ou des autres. Par exemple, le genre de tâches de OM1 « Prouver l'équivalence de deux programmes de calcul » convoque des types de tâches de OM2 et OM3 :

- T1 : Produire une expression traduisant chaque programme de calcul (OM1)

T11 : Mobiliser une variable pour produire une expression générale
T12 : Traduire P1 et P2 par une expression algébrique

- T2 : Prouver que deux expressions algébriques sont égales pour toute valeur (OM2)

T21 : Identifier la structure de l'expression pour reconnaître les propriétés à appliquer
T22 : Développer (OM3)
T23 : Réduire
Ainsi différents types de tâches sont impliqués dans la convocation du type de tâches principal. Etant donné leur caractère implicite, nous nous interrogeons sur la place qui leur est accordée dans les discours technologiques et les organisations didactiques que les élèves rencontrent au collège et au début du lycée. L'OM de référence nous donne des critères pour analyser l'OM à enseigner et les OM apprises en algèbre à la fin de la scolarité obligatoire.

Mise en perspective de l'OM à enseigner et des OM apprises sur les expressions algébriques en fin de scolarité obligatoire par rapport à l'OM de référence

Dans cette section, nous commençons par présenter les caractéristiques dominantes de l'OM à enseigner puis celles des OM apprises et nous concluons en les mettant en perspective afin de dégager des questions génératrices organisant les PED.

Caractéristiques dominantes de l'OM à enseigner

L'OM à enseigner relative aux expressions, au collège et en seconde caractérise le rapport institutionnel attendu à l'algèbre élémentaire en fin de scolarité obligatoire. Nous la déterminons à partir de l'analyse des programmes officiels, le document d'accompagnement « Du numérique au littéral au collège » de 2008[60] et les manuels scolaires (13 manuels de collège et 3 manuels de seconde). L'analyse de ces textes s'attache à dégager, en référence aux trois OM locales de l'OM de référence, les types de tâches rencontrés, les techniques

[60] Ce document est téléchargeable à l'adresse :
http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/3/du_numerique_au_litteral_109173.pdf

mathématiques développées, le discours technologico-théorique qui permet de justifier les techniques et, finalement, la place accordée aux trois OM locales, leurs raisons d'être et les liens qui sont établis entre elles. Nous présentons ici une synthèse des caractéristiques dominantes de l'OM à enseigner à l'issue de laquelle nous mettons en évidence des savoirs et savoir-faire implicites laissés à la charge des élèves.

Avec l'apparition du genre de tâches de OM1 « Produire une expressions algébrique » dans la rubrique « Organisation et gestion de données, fonctions » des programmes de 2008 en classe de cinquième, la place de l'algèbre comme outil pour généraliser, modéliser et prouver est valorisée ce qui encourage l'articulation entre les trois OM locales de référence et donne une raison d'être aux expressions algébriques. Le document d'accompagnement complète cet apport en reprenant la situation du carré bordé (Combier et al, 1995), présentée en figure 4, pour montrer comment un problème de généralisation peut permettre de motiver, d'une part, l'introduction de l'algèbre comme modèle symbolique des processus de calcul, et, d'autre part, l'introduction des propriétés du calcul algébrique à partir de l'existence de programmes de calcul et donc d'expressions équivalentes. Cependant, cet apport a peu d'impact dans les manuels scolaires qui motivent rarement les expressions algébriques et leurs propriétés.

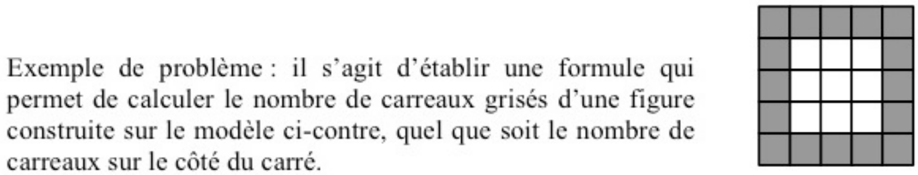

Figure 4. La situation du carré bordé dans le document d'accompagnement

OM2 est très peu présente dans les programmes et dans les manuels. Seul le type de tâche « Tester l'égalité de deux expressions en leur attribuant des valeurs numériques » est présent dans les programmes de collège. Il est rattaché au secteur des équations et non à celui des expressions algébriques ce qui place le statut de la lettre comme inconnue et non comme variable. OM2 n'est pas suffisamment liée à OM1 et à OM3. L'équivalence des expressions n'est presque jamais présentée comme un aspect central de la manipulation des expressions algébriques ni comme une aspect permettant d'organiser la vérification et le contrôle des calculs. Le fait que les propriétés du calcul algébrique permettent de transformer une expression en une autre, équivalente, et le fait qu'on puisse utiliser l'une ou l'autre en fonction du but visés sont rarement présents dans l'OM à enseigner au collège, c'est-à-dire que la dénotation et le sens des expressions sont laissés implicites. Les manuels scolaires d'éditions récentes (à partir de 2010) semblent néanmoins marquer des évolutions. Quelques manuels présente le genre de tâches « Prouver l'équivalence de deux expressions » (cf. figure 5). Les techniques et niveau technologique développés accordent une place à la dialectique algébrique-numérique et à la preuve d'un énoncé vrai ou faux. Néanmoins, ce type de tâches, lorsqu'il apparaît, est déconnecté des autres, n'est pas mis en perspective du contrôle des calculs et ne répond finalement à aucun raison d'être. Pourtant le document d'accompagnement développe ces liens et les principaux genres de tâches de OM2 apparaissent dans le document d'accompagnement. Les liens entre le contrôle des calculs et la preuve du fait que deux expressions sont ou pas équivalentes y est développé :

> « Après qu'une transformation d'expression algébrique [...] a été faite, un type de tâches doit faire l'objet d'une meilleure visibilité pour les élèves : comment contrôler qu'elle a été faite sans erreur ? […] En classe, le professeur peut montrer l'usage du tableur pour contrôler l'exactitude de l'égalité $(3x - 1)(2x + 5) = 6x2 + 13x - 5$: [...]. Si le développement est exact, en faisant varier la valeur attribuée à x [...] les valeurs numériques qui s'affichent [...] varient également, mais restent égales. » (Document d'accompagnement, p.6)

ÉNONCÉ On se demande si les expressions littérales ci-contre sont égales.

1) a) Calculer l'expression A pour $x = 0$.

b) Calculer l'expression B pour $x = 0$.

c) Les expressions A et B sont-elles égales ? Justifier la réponse.

2) a) Calculer l'expression C pour $x = 0$.

Les expressions A et C peuvent-elles être égales ?

b) Les expressions A et C sont-elles égales ? Justifier la réponse.

$A = x(5x - 3) + 6$

$B = 5x^2 + 3$

$C = 5x^2 + 3(2 - x)$

Figure 5. Prouver que deux expressions algébriques sont équivalentes dans le manuel de la collection Phare de 4e, édition Nathan, 2011

À partir de la seconde, les expressions algébriques sont travaillées au service de l'étude des fonctions ce qui nécessite un travail sur le sens des expressions et un appui sur l'intelligence du calcul et l'anticipation des transformations à effectuer. Par exemple, le genre de tâches « Choisir l'expression la plus adaptée en fonction du but » sollicite le sens des expressions, aspect qui est peu présent au collège. Le rapport institutionnel à l'algèbre en seconde met en jeu une pratique algébrique appuyée sur des éléments technologiques et théoriques qui sont implicites dans les programmes du collège.

Les genres de tâches de OM3 relatifs à la transformation d'expressions algébriques dominent dans les programmes et dans les manuels mais majoritairement à travers des tâches simples et isolées. Le discours technologique qui accompagne les techniques de développement ou de factorisation a davantage recours aux ostensifs (Bosch & Chevallard, 1999) qu'aux non-ostensifs (cf. figure 6).

$H = 7x(x - 6) + (3x - 2)(4x + 5).$	$\longrightarrow$ On développe.
$H = 7x \times x - 7x \times 6 + (3x \times 4x + 3x \times 5 - 2 \times 4x - 2 \times 5)$	
$H = 7x^2 - 42x + 12x^2 + 15x - 8x - 10$	$\longrightarrow$ On supprime les parenthèses.
$H = 7x^2 + 12x^2 - 42x + 15x - 8x - 10$ $H = (7 + 12)x^2 + (-42 + 15 - 8)x - 10$	$\longrightarrow$ On regroupe les termes en x et en x^2.
$H = 19x^2 - 35x - 10$	$\longrightarrow$ On simplifie en ordonnant.

Figure 6. Utilisation de flèches et couleurs pour outiller le développement dans le manuel Sésamath de 4e de 2011

Ce recours aux ostensifs est marqué par un jeu de couleurs, l'apparition de flèches pour appliquer la règle de distributivité ou des verbes d'action qui conduisent à la reconnaissance de signes plutôt que de structures (par exemple « On observe trois termes précédés du signe + » ou encore « On supprime les parenthèses »). Il est probablement accentué en classe par des ostensifs oraux et gestuels de l'enseignant. Ce n'est pas l'appui sur les ostensifs qui nous interpelle mais le faible lien fait avec les non-ostensifs. La convocation des types de tâches impliqués comme la reconnaissance de la structure et de la propriété à appliquer est souvent pris en charge implicitement par l'énoncé (par exemple, le titre d'un exercice de factorisation avec uniquement des expressions du type pressions algébriques. Nous présentons ces OM apprises comme mobilisant des technologies de façon dominante, c'est-à-dire des éléments technologiques et théoriques utilisés majoritairement et relevant de la mobilisation d'objets mathématiques et de propriétés associées, des modes de discours, d'utilisation des ostensifs et de validation des calculs. Selon nous, seule une description des OM apprises au niveau des technologies donne accès à une vue d'ensemble de la cohérence des modes de fonctionnement et de raisonnement des élèves. Les technologies dominantes permettent de faire des hypothèses sur les techniques utilisées (attendues, erronées ou inadaptées) par les élèves et le fait que certaines classes d'erreurs puissent vivre dans les pratiques algébriques des élèves. Nous présentons celles du groupe C dans la figure 7.

Nos choix de regroupement nous permettent donc, premièrement, d'interpréter les niveaux sur les composantes des stéréotypes en technologies dominantes utilisées par les élèves et, deuxièmement, de faire des hypothèses sur le type d'articulation des trois OM locales pour chaque groupe. Nous mettons maintenant en évidence la part des implicites de l'OM à enseigner dans les OM apprises afin de dégager les questions à aborder dans les parcours.

<table>
<tr><th colspan="2">Groupe C</th></tr>
<tr><td colspan="2">Les élèves articulent insuffisamment les OM ponctuelles de OM2 et OM3. La transformation des expressions dans OM3 ne donne pas de raisons d'être à la reconnaissance de la structure. La conduite des calculs s'appuie davantage sur la reconnaissance d'ostensifs (signes « +, -, =, etc.) et rarement, au niveau technologico-théorique, sur la hiérarchie des opérateurs, les propriétés du calcul algébrique et le rôle des parenthèses. Les écritures algébriques ou numériques en ligne sont rarement interprétées selon leurs aspects procédural et structural ce qui se traduit par un calcul non contrôlé et un appui sur des démarches arithmétiques. Cela conduit à un manque d'acceptation d'un résultat contenant un signe opératoire et donc à des règles de transformation et de formation incorrectes du type concaténation ($3 + 2a \to 5a$) ou linéarisation ($a^2 \to 2a$). Les modes de raisonnements s'appuient rarement sur l'équivalence des expressions (OM2) et sur la dialectique entre l'algébrique et le numérique et privilégient des formulations d'ordre légal (« On a le droit de »).</td></tr>
<tr><th>Groupe C-</th><th>Groupe C+</th></tr>
<tr><td>Les élèves articulent insuffisamment OM1 avec OM2 et OM3 et donnent peu de raisons d'être à l'algèbre. L'algèbre comme outil de résolution de problèmes est immotivée et peu adaptée. Les élèves ont majoritairement recours à des démarches arithmétiques et mobilisent rarement les lettres. Ils ont des difficultés à mobiliser la hiérarchie des opérateurs dans la production d'expressions.</td><td>Les élèves articulent OM1 avec OM2 et OM3 et commencent à donner des raisons d'être à l'algèbre comme outil de résolution de problèmes.</td></tr>
</table>

Figure 7. Technologies dominantes du groupe C

Ces trois entrées étant fixées, les PED se caractérisent par des questions et sous-questions génératrices déterminées en amont, des types de tâches pour aborder ces questions et des tâches différenciées adaptées aux besoins d'apprentissage de chaque groupe. Les questions génératrices et les types de tâches qui leur sont associés définissent un objectif commun d'enseignement à la classe. Une organisation didactique commune guide, à un niveau plus fin, les différentes phases individuelles (temps de recherche, apport d'aides par l'enseignant) et collectives (processus de dévolution, phases de débat, institutionnalisation) dans la mise en œuvre du parcours en classe. Les tâches différenciées relevant de l'objectif commun sont adaptées aux technologies dominantes à partir d'un jeu sur des variables didactiques comme la structure et la complexité des expressions algébriques, le découpage des énoncés, les cadres et les registres de représentation en jeu. Suite aux échanges avec les enseignants du groupe IREM, l'explicitation d'un objectif commun d'enseignement s'est avérée être un point crucial de la conception des PED. Tous les groupes d'élève travaillent ainsi sur le même objectif ce qui maintient le groupe-classe dans les institutionnalisations et dans l'avancée du temps didactique.

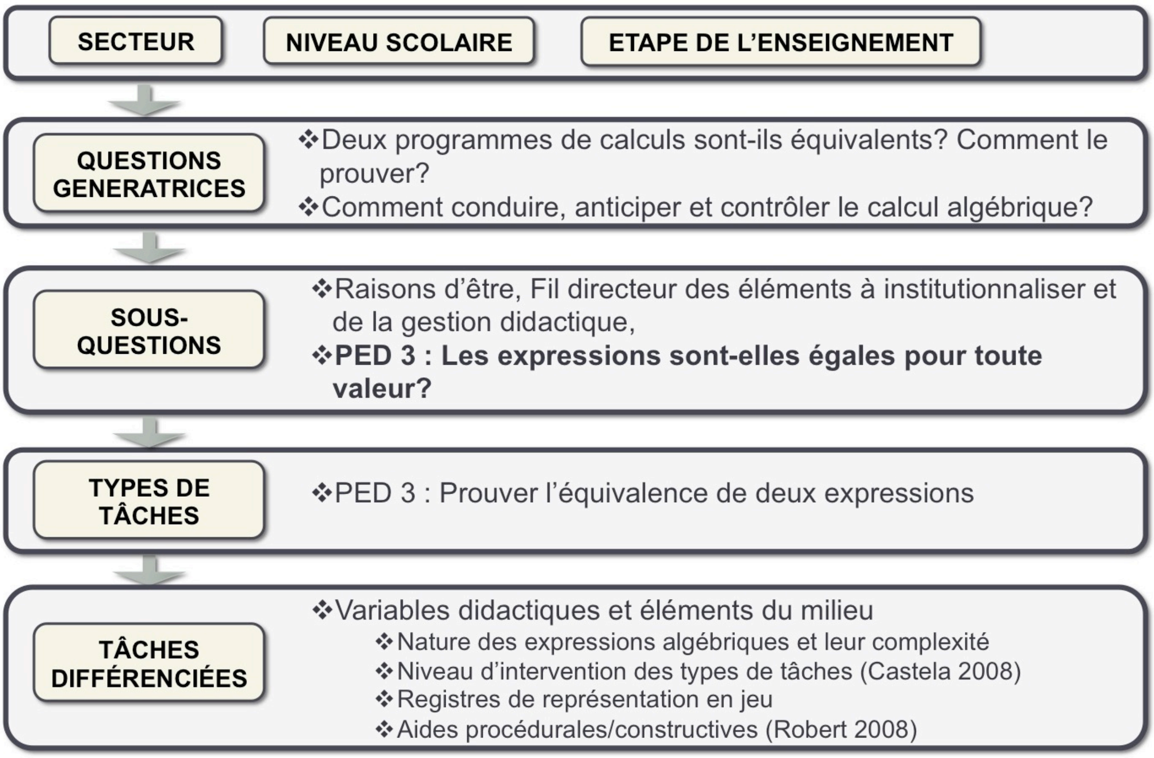

Figure 8. Modèle didactique des PED

Rappelons que, des caractéristiques de l'OM à enseigner, émergent deux questions génératrices. La caractérisation des technologies dominantes de chaque groupe nous a permis de les préciser en sept sous-questions qui correspondent à autant de PED. Nous définissons pour chacun l'objectif commun d'enseignement, les types de tâches à convoquer et les milieux auxquels confronter les élèves pour aborder ces questions et leur permettre de valider les réponses attendues. Nous précisons notre démarche à partir de l'exemple du PED intitulé « Prouver l'équivalence de deux expressions ».

Nous avons conçu un PED pour la troisième sous-question « Les expressions algébriques sont-elles égales pour toute valeur ? ». L'objectif commun à la classe est d'étudier des expressions équivalences et le type de tâches commun aux groupes est prouver l'équivalence de deux expressions algébriques.

D'après les caractéristiques de l'OM à enseigner, l'équivalence des expressions est une notion ignorée au collège et en seconde dans le sens où, peu présente dans les programmes et les manuels scolaires, son enseignement est peu pris en charge dans ces institutions. Ainsi les technologies dominantes du groupe C révèlent que ces élèves sont démunis pour guider et contrôler les transformations algébriques car ils ont peu conscience de la possibilité d'écrire une même expression sous plusieurs formes. Dans le parcours étudié ici, il s'agit, d'une part, d'amener les élèves à appréhender le fait que deux expressions peuvent dénoter le même nombre et, d'autre part, qu'en fonction du but visé dans l'énoncé, il est préférable d'utiliser l'une ou l'autre. La séance comporte deux phases. La première consiste à étudier si des expressions sont équivalentes. La deuxième consiste à choisir l'expression la plus adaptée en fonction du but visé.

Les tâches sont différenciées entre le groupe A et les groupes B et C. Comme les élèves du groupe A s'appuient sur l'équivalence des expressions, les exercices proposés demandent de prouver l'équivalence des expressions algébriques par le calcul algébrique, puis de mobiliser la forme la plus adaptée pour résoudre un problème ou calculer astucieusement. Comme les élèves des groupes B et C prennent peu en compte l'équivalence des expressions pour guider et contrôler les transformations algébriques, l'enjeu premier est de donner du sens au fait que deux expressions peuvent être égales pour toute valeur de la lettre. L'équivalence entre plusieurs expressions est conjecturée à partir de substitutions numériques ou de la comparaison des courbes représentatives des fonctions définies par les expressions (à partir de la classe de seconde) puis elle est prouvée algébriquement. Ensuite, l'équivalence des expressions est utilisée dans le but de calculer astucieusement une expression numérique et de choisir la forme la plus adaptée au calcul de la valeur de l'expression pour un nombre donné. Pour ce PED, la différenciation entre les groupes porte à la fois sur la complexité des expressions à étudier et sur la décomposition de l'énoncé en sous-questions. Les figures 9 et 10 présentent, à titre d'exemple, une tâche et sa déclinaison en un exercice pour chacun des groupes A, B et C.

On se demande si les trois expressions suivantes sont égales pour tout x :

Groupe B

- $A(x)=(x-1)^2-4$
- $B(x)=(x+1)(x-3)$
- $C(x)=x(x-2)-x^2-2$

x	A(x)	B(x)	C(x)
1			
-1			
0			

Groupe C

- $A(x)=(x+2)^2-4$
- $B(x)=x(x+4)$
- $C(x)=9x-6$

x	A(x)	B(x)	C(x)
2			
3			
0			

1. Complète les deux premières lignes du tableau ci-dessus. Que peux-tu conjecturer sur l'égalité des expressions ?
2. Complète la troisième ligne du tableau ci-dessus. Confirmes-tu ta conjecture ? Sinon, formule une nouvelle conjecture.
3. Les trois expressions sont-elles égales pour toute valeur de x ? Justifie. Ta conjecture est-elle vérifiée ?
4. Utilise les questions précédentes pour calculer mentalement 98x102.

Figure 9. Exemple d'exercices à proposer aux groupes B et C pour le parcours « Prouver l'équivalence de deux expressions »

L'exercice des groupes B et C comporte quatre questions. Les trois premières concernent la première phase. La dernière concerne la seconde phase. Trois expressions A, B et C sont données. A et B sont équivalentes mais pas C. Dans les deux premières questions, l'énoncé demande de conjecturer l'équivalence des expressions afin d'amener les élèves à comprendre que deux expressions différentes peuvent être égales pour toute valeur. Dans la question 1, les élèves testent les expressions pour deux valeurs numériques choisies de telle sorte qu'elles retournent la même valeur numérique. Dans la question 2, un troisième test numérique fournit un contre-exemple à l'équivalence de l'expression C avec A et B. La présence d'un tableau de valeurs est centrale dans ces questions. Dans la troisième question, un contre-exemple est attendu pour prouver que C n'est pas équivalente à A et B. Une preuve algébrique de l'équivalence de A et B est attendue. Les élèves doivent déterminer la structure des expressions et les règles de calcul à appliquer pour les développer. L'enseignant joue un rôle important pour amener les élèves à comprendre les limites des tests numériques pour prouver l'équivalence et produire une preuve algébrique. Si les élèves suggèrent des raisonnements erronés du type «si les expressions sont égales pour deux valeurs alors elles sont égales », il est prévu que l'enseignant utilise la quantification pour les déstabiliser : « nous voulons une preuve pour toute valeur ». La dernière question consiste à déterminer l'expression la plus adaptée pour calculer astucieusement (expression A avec x=98 pour le groupe C et avec x=101 pour le groupe B). Le déroulement du parcours prévoit, pour chaque question, des temps de travail individuel et de débat collectif au sein de la classe. Le fait que les groupes travaillent sur des expressions différentes est une opportunité pour décontextualiser la tâche et revenir sur l'objectif de la séance. En fin de séance, l'institutionnalisation prévue porte sur le fait que deux expressions algébriques peuvent être égales pour toutes les valeurs et que la transformation de l'une en l'autre est contrôlée par les règles du calcul algébrique. Dans le paragraphe suivant, nous présentons succinctement la modélisation informatique des PED.

Modélisation informatique des PED

La modélisation informatique a consisté à formaliser le modèle didactique pour automatiser la génération de parcours sur LaboMeP. Nous avons cherché à caractériser les parcours et les exercices y intervenant afin que ces derniers puissent être automatiquement attribués à chaque groupe d'élève suite au passage du test Pépite et au choix d'un parcours par l'enseignant. Ce travail a permis la réalisation d'une indexation de la centaine d'exercices qui intervient dans les parcours et du logiciel PépiPad pour automatiser les parcours sur LaboMeP.

L'indexation des exercices est réalisée à partir des critères suivants : le niveau scolaire pour lequel il a été conçu, les types de tâches convoqués, le chapitre et le thème mathématique auxquels l'exercice est rattaché (par exemple le thème expression algébrique du chapitre « Calcul littéral »), les objets mathématiques en entrée et en sortie (par exemple, expression algébrique, programme de calcul, arbre, figure, etc.), les cadres mathématiques en entrée et en sortie ainsi que le niveau de complexité de la tâche. Ce dernier critère englobe le niveau de mise en fonctionnement des connaissances, la structure des expressions algébriques ou encore le découpage des énoncés. Le critère d'indexation sur les types de tâches convoqués repose sur une ontologie du domaine de l'algèbre élémentaire que nous avons définie. L'ensemble des types de tâches intervenant dans les programmes scolaires à la fin de la scolarité obligatoire y sont répertoriés. Chaque parcours est caractérisé par les types de tâches, les objets mathématiques et les cadres en jeu ainsi qu'un niveau de complexité pour chaque groupe d'élève.

Le logiciel PépiPad intègre quatre types d'informations pour déterminer les exercices à proposer à chaque groupe d'élève. Il prend en entrée le diagnostic cognitif établi par Pépite pour chaque élève, l'indexation de la centaine d'exercices qui interviennent dans les parcours, le niveau scolaire des élèves, les choix de l'enseignant relatifs au secteur d'étude, l'étape du déroulement ainsi que les caractéristiques du parcours retenu par l'enseignant. Le résultat obtenu sur LaboMeP est présenté en figure 10.

Le modèle est peuplé d'une centaine d'exercices : des exercices « papier-crayon » conçus dans le cadre de notre thèse mais aussi des exercices interactifs présents dans LaboMeP. Notre travail a ainsi conduit à la conception de seize PED et à leur dissémination sur LaboMeP.

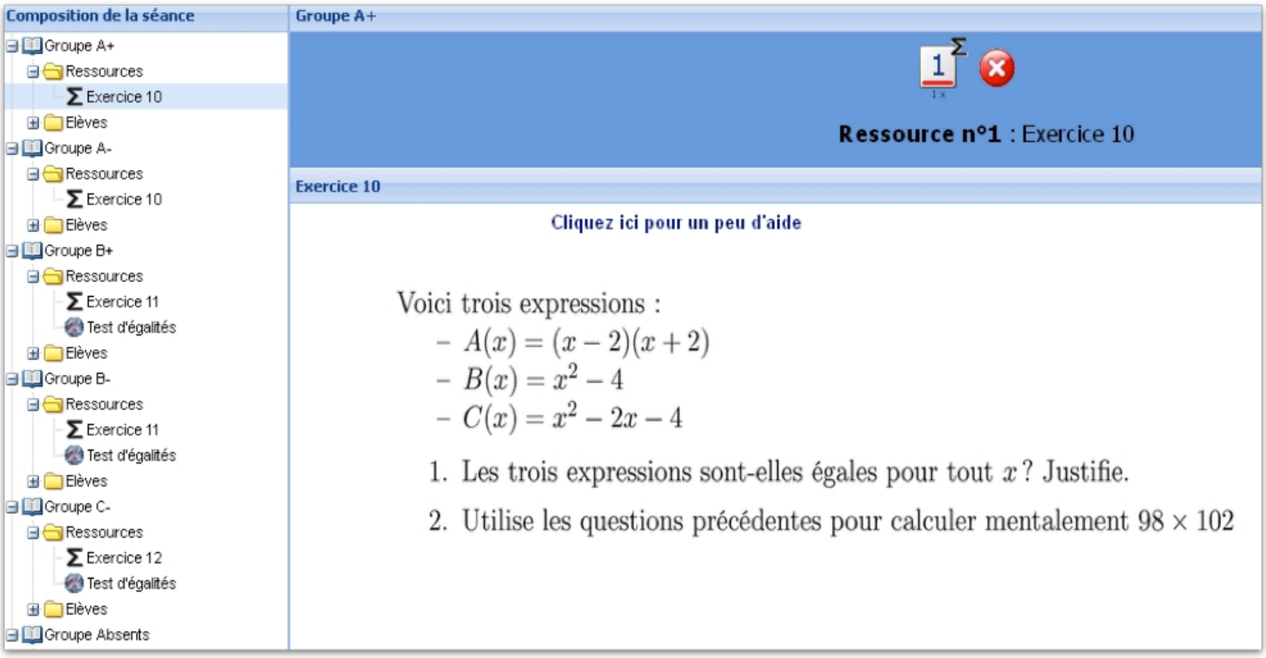

Figure 10. Interface « Enseignant » de présentation d'un parcours sur LaboMeP

Conclusion

Nous avons présenté la démarche de recherche que nous avons menée pour la conception d'un modèle de parcours d'enseignement différencié. Nous avons défini une OM de référence autour des expressions algébriques. Cette référence est un outil conceptuel et méthodologique central pour analyser les organisations mathématiques à enseigner et celles apprises et mettre en évidence des savoirs et savoir-faire institutionnellement ignorés. Les OM mathématiques et didactiques des PED sont organisés à partir de ces analyses. Dans le modèle, un parcours est défini par rapport à un thème d'enseignement, un niveau scolaire, une étape du déroulement de l'enseignement en algèbre et un objectif d'enseignement commun à la classe. Les tâches ainsi définies sont adaptées aux niveaux technologiques dominants de chaque groupe d'élève à partir d'un jeu sur des variables didactiques comme la complexité des expressions algébriques, le découpage des énoncés et les registres de représentation en jeu.

Notre démarche de recherche comprend la validation de ce modèle. D'un point de vue interne, le modèle a été validé à la fois par la méthode de conception pluridisciplinaire (didactique, informatique, enseignant) et par le fait que son implémentation informatique conduit à une génération automatique valide des parcours. En effet, le logiciel conçu génère automatiquement les exercices prévus pour chaque PED. D'un point de vue externe, les analyses qualitatives des expérimentations menées avec l'un des enseignants du groupe IREM (Pilet, 2012, Pilet et al., 2013), que nous n'avons pu présenter dans ce texte, montrent que la mise en œuvre des parcours en classe a permis de travailler les enjeux didactiques prévus. Si ces analyses valident la pertinence des parcours d'un point de vue didactique, l'étude de cas de cet enseignant montre que leur mise en œuvre efficace des parcours peut s'avérer délicate, notamment parce que certains aspects épistémologiques des expressions algébriques intervenant dans les parcours sont parfois éloignés du rapport personnel des enseignants à l'algèbre et à son enseignement.

Enfin, dans le cadre du projet PepiMeP, nous avons disséminé le test diagnostic Pépite et des parcours d'enseignement différencié que nous avons conçus sur la plateforme LaboMeP. Des usages de ces outils, indépendamment de toute intervention de l'équipe de conception, montrent qu'ils correspondent à un besoin des enseignants. Entre septembre 2012 et juin 2013, 2700 élèves ont passé le test de diagnostic Pépite et près de 130 parcours ont été créés sur LaboMeP. Ces chiffres ouvrent des nouvelles perspectives de recherche sur les pratiques des enseignants ordinaires utilisant le test diagnostic Pépite et les parcours.

Remerciements

Le projet PépiMeP a été financé en partie par la région Ile-de-France. Je remercie Brigitte Grugeon-Allys pour son soutien et sa disponibilité dans l'encadrement de ma thèse, Élisabeth Delozanne, Françoise Chenevotot-Quentin, Naïma El-Kechaï pour leur collaboration dans la conception du modèle, les enseignants du groupe IREM qui ont accepté ma présence dans leurs classes, Arnaud Rommens, Dominique Prévit, Aso Darwesh, Josselin Allys, Yvonnick Labed Veydert, Aous Karoui pour leur participation active à l'implémentation des séances de diagnostic et de différenciation sur LaboMeP.

Références

Bardini, C. (2003). *Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique*. Thèse de doctorat, Université Paris 7 Denis-Diderot, Paris.

Bolon, J. (2002). Pédagogie différenciée en mathématiques : mission impossible ou défi ? *Grand N*, 69, 63-82.

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 77-124.

Bosch, M., & Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques : cours de la 12e École d'été de didactique des mathématiques*. Corps (Isère), du 20 au 29 août 2003 (p. 107-122). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Castela, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissages ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques*, 28(2), 135-182.

Charnay, R. (1995). De la diversité. In R. Charnay et al. (Eds.), *Chacun, tous... Différemment ! Différenciation en mathématiques au cycle des apprentissages* (p. 9-29). Lyon : I.N.R.P.

Chenevotot, F., Grugeon, B., Pilet, J., & Delozanne, E. (2012). De la conception à l'usage d'un diagnostic dans une base d'exercices en ligne. In J.-L. Dorier (Ed.), Actes du colloque Espace Mathématique Francophone, Enseignement et contrat social : Enjeux et défis pour le 21ème siècle, EMF 2012, Genève, février 2012 (p. 808-823). Disponible sur http://www.emf2012.unige.ch/index.php?option=com_content&view=article&id=57

Chevallard, Y. (1985) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. L'évolution de la transposition didactique., *Petit x*, 5, 51-94.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19 (2), 221-265.

Chevallard, Y., & Bosch, M. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. *Recherches en didactique de mathématiques. Enseignement de l'algèbre, bilan et perspectives*, hors-série, 19-40.

Combier, G., Guillaume, J.-C., & Pressiat, A. (1995). *Calcul littéral : Savoirs des élèves de collège*. France : INRP.

Delozanne, E., Prévit, D., Grugeon, B., & Chenevotot, F. (2010). Vers un modèle de diagnostic de compétences, *Revue Techniques et Sciences Informatiques*, 29 (8-9), 899-938.

Drouhard, J.-P. (1992). *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire*. Thèse de doctorat, Université Paris 7 Denis-Diderot, Paris.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Bern : Perter Lang.

Frege, G. (1971). *Écrits logiques et philosophiques*, Éditions du Seuil, Paris.

Gascón, J. (1994). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». *Petit x* , 37 , 43-63.

Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17(2), 167-210.

Grugeon, B., Pilet, J., Chenevotot, F., & Delozanne, E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique de mathématiques, Enseignement de l'algèbre, bilan et perspectives*, hors série, 137-162.

Grugeon, B., Chenevotot, F., Delozanne, E. (2014). *De la conception aux usages de ressources dédiées à l'enseignement différencié en algèbre élémentaire*. In S.Coppé & M.Haspekian (dirs.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, Paris, octobre 2013. Paris : IREM de Paris7.

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra At the Middle School Through College Levels. Building Meaning for Symbols and Their Manipulation. In J. Lester F. K. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, p. 707-762). Charlotte, NC : I.A.P.

Larguier, M. (2009). *La construction de l'espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde : un problème de la profession*. Thèse de doctorat, Université de Montpellier II, Montpellier.

Pilet, J. (2012). *Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation.* Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot, Paris. Disponible en ligne http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00784039, lien consulté le 4 janvier 2014.

Pilet, J., Delozanne, É., Chenevotot, F., Grugeon-Allys, B., Prévit, D., El-Kechai, N. (2013). Identifier des besoins d'apprentissages des élèves pour réguler l'enseignement : les outils Pépite sur LaboMeP, *MathémaTICE*, 37. Disponible en ligne http://revue.sesamath.net/spip.php?article557, lien consulté le 4 janvier 2014.

Prévit, D., Delozanne, É., et Grugeon, B. (2007). Génération automatique d'exercices de diagnostic, Actes de la conférence *EIAH2007, Environnements Informatiques pour l'apprentissage humain*, Lausanne, 27-29 juin 2007, INRP, 545-556.

Rochex, J.-Y., & Crinon, J. (2011). *La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement*. Rennes : P.U.R.

Ruiz-Munzón, N., Matheron, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (2012). Autour de l'algèbre : les entiers relatifs et la modélisation algébrico-fonctionnelle. *Recherches en didactique des mathématiques, hors série, Enseignement de l'algèbre, bilan et perspectives*, Hors-série, 87-106.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.