BRIGITTE GRUGEON-ALLYS

brigitte.grugeon@orange.fr , **LDAR, université Paris Diderot, ESPE, UPEC**

FRANÇOISE CHENEVOTOT-QUENTIN

chenevotot.francoise@neuf.fr , **LDAR, Université Paris Diderot, ESPE, Université d'Artois**

ELISABETH DELOZANNE

elisabeth.delozanne@upmc.fr , **LIP 6, UPMC-Paris-Universitas**

De la conception aux usages de ressources dédiées à l'enseignement différencié en algèbre élémentaire

Résumé.
Cet article porte sur la problématique et les résultats issus de projets pluridisciplinaires en EIAH (Environnement Informatique d'Apprentissage Humain), les projets Pépite, Lingot et PépiMep[17], fruits d'une longue collaboration entre chercheurs en didactique des mathématiques du LDAR (Université Paris Diderot – Paris 7), chercheurs en informatique du LIUM (Université du Maine) et de l'équipe Mocah du LIP6 (UPMC-Sorbonne Universités), enseignants et formateurs des IUFM de Créteil, Rennes et d'Amiens, du groupe IREM de Paris Diderot « Différenciation de l'enseignement de l'algèbre » (Delozanne & al, 2010). Ces projets visent d'une part à concevoir des outils à destination des enseignants pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages des élèves en algèbre élémentaire, en fin de scolarité obligatoire et, d'autre part, à en évaluer les usages réels en classe par les enseignants et leur influence sur l'activité des élèves en algèbre. Après un historique rapide des travaux, nous aborderons les fondements théoriques de nos recherches. Puis nous illustrerons, par des exemples précis, la démarche de conception itérative et participative de PépiMep, montrant ainsi l'apport et l'importance des échanges entre les communautés de chercheurs en didactique, en informatique, les développeurs de l'association Sésamath18 et les enseignants.

Introduction

Cet article propose une synthèse d'une recherche pluridisciplinaire en EIAH, menée depuis 1995, sur l'enseignement de l'algèbre élémentaire dans la transition entre le collège et le

[17] Le projet *Pépite* a débuté à la fin des années 1990. Le projet *Lingot* a suivi de 2002 à 2005. Puis le projet *PépiMep* a bénéficié du soutien financier de la région Ile de France de 2010 à 2012.
[18] Site de l'association Sésamath : http://mathenpoche.sesamath.net/

lycée. Les objectifs globaux de cette recherche concernent, d'une part, la conception d'environnements informatiques à destination des enseignants pour faciliter la gestion de la diversité cognitive des élèves en classe, en particulier grâce à des outils de diagnostic et de régulation et, d'autre part, l'évaluation de leurs usages réels en classe par les enseignants et leur influence sur l'activité des élèves en algèbre. Ces travaux se situent au croisement des recherches en Didactique des Mathématiques, en Interaction Homme Machine (informatique) et ont mis en oeuvre une démarche de recherche spécifique en EIAH : une démarche itérative de conception. Il s'agit de s'appuyer sur l'expertise de chercheurs en didactique (L.D.A.R., université Paris Diderot-Paris 7)[19], en informatique (L.I.U.M, université du Maine[20] puis L.I.P.6, université Pierre et Marie Curie, Sorbonne universités)[21] mais aussi en psychologie et ergonomie cognitive (Laboratoire Cognition et Activités Finalisées, Université Paris 8)[22], de l'expertise de communautés de pratique (d'enseignants d'un Groupe IREM et de l'association Sésamath, de formateurs d'IUFM), pour concevoir des modèles informatiques en appui sur des modèles didactiques et développer des logiciels, tester les prototypes obtenus dans des classes réelles et en retour enrichir l'expertise didactique, l'expertise des communautés, l'expertise de conception d'EIAH. Cette démarche vise à obtenir des retombées tant sur les pratiques des professeurs que sur les apprentissages des élèves. Trois axes de recherche structurent les projets de recherche Pépite[23], Lingot[24] et PépiMep[25] : l'axe diagnostic, l'axe apprentissage et l'axe instrumentation de l'activité de diagnostic et de régulation.

L'enjeu de cet article est d'éclairer le jeu dialectique entre modélisations didactiques et modélisations informatiques et réciproquement en quoi une démarche itérative de conception en EIAH et des expérimentations en classe ont permis de faire évoluer les questions posées à la didactique des mathématiques. Nous dégageons des résultats de ces apports réciproques, tant en ce qui concerne la modélisation du diagnostic (tâches diagnostiques, profil de l'élève, géographie de la classe) que celle de familles de situations d'apprentissage ou de parcours d'enseignement différencié. Pour cela, nous présentons d'abord le positionnement scientifique, puis nous définissons quatre cycles de recherche liés à l'évolution des questions de recherche portant sur la conception du diagnostic et de parcours que nous illustrons, puis nous terminons par une conclusion et des perspectives de recherche.

Positionnement théorique

Nous commençons par définir notre positionnement scientifique à la fois pour le champ de la didactique des mathématiques et pour celui de l'informatique. Tout d'abord, nous précisons nos choix concernant l'évaluation diagnostique.

Pratiques d'évaluation et diagnostic

Qu'entend-on par évaluation diagnostique ? Quels types de pratiques d'évaluation fournissent des informations permettant un diagnostic plus opérationnel des connaissances mobilisées par les élèves pour résoudre des problèmes dans un domaine mathématique donné ?

---

[19] F. Chenevotot-Quentin, B. Grugeon-Allys, M. Artigue, C. Cazes, J. Pilet
[20] E. Delozanne, P. Jacoboni, D. Prévit
[21] E. Delozanne, N. El Kechaï
[22] J. Rogalski
[23] Projet *Pépite* mené en collaboration entre le L.I.U.M. de l'université du maine et le L.D.A.R. (ex DIDIREM) de l'université Paris Diderot-Paris 7 à partir de 2000
[24] Projet *Lingot* réalisé suite à l'appel à projet *Ecole et sciences cognitiques* 2003 "Les apprentissages et leur dysfonctionnement" de 2002 à 2005.
[25] Projet *PépiMep* réalisé suite à l'appel à projet PICRI 2009 soutenu par la région Ile de France de 2010 à 2012.

Une évaluation multidimensionnelle

L'article de Ketterlin-Geller, Leanne et Yavonoff (2009) compare les pratiques d'évaluation diagnostique portant sur l'analyse des procédures et des erreurs. Les auteurs en distinguent deux types : d'une part, des analyses de solutions d'élèves à des tests dédiés et, d'autre part, des évaluations diagnostiques cognitives utilisant des méthodes plus standardisées et des méthodes psychométriques. La première approche, unidimensionnelle, est peu propice à une analyse de la complexité de l'apprentissage et des relations entre les connaissances mobilisées. La seconde fournit des informations sur des attributs multidimensionnels caractérisant les processus cognitifs. Dans les deux cas, les pratiques d'évaluation s'appuient sur l'étude locale de conceptions erronées sur des tests isolés dans le but de les déstabiliser. Ces pratiques ne mettent pas en jeu une étude globale des cohérences de fonctionnement des élèves dans un domaine donné, ce qui nécessiterait l'analyse de réponses d'élèves à des tâches dans un champ conceptuel organisé (Grugeon, 1997).

Le diagnostic développé dans le cadre des projets pluridisciplinaires *Pépite*, *Lingot* et *PépiMep* vise au contraire une analyse globale multidimensionnelle des connaissances et de l'activité des élèves dans le domaine de l'algèbre élémentaire. Il s'appuie sur un diagnostic cognitif global et une évaluation des réponses des élèves (erreurs et procédures). Il n'utilise pas de modèles psychométriques mais se fonde sur une étude cognitive, épistémologique de l'algèbre élémentaire élargie à des études empiriques (Cf. § 1.2).

Instrumentation de l'activité de l'enseignant

Pour étudier les usages possibles d'un outil de diagnostic, nous nous situons dans le cadre de l'instrumentation et des travaux développés autour de la théorie de l'activité (Rogalski, 2008). Pour analyser l'instrumentation de l'activité de l'enseignant et les usages possibles d'outils de diagnostic en classe, nous envisageons deux contextes d'usage possibles : soit le diagnostic organisé par l'enseignant concerne la classe comme entité, soit il concerne les élèves en tant qu'individus ou en tant que groupes. Selon le contexte, le but du diagnostic est différent.

Lorsque le diagnostic est orienté vers la classe, sa visée concerne la régulation de l'activité de l'enseignant relativement au savoir à enseigner, soit dans la temporalité courte de la séance, soit dans la temporalité longue de la séquence.

Lorsque le diagnostic est orienté vers les élèves, sa visée concerne l'évaluation des apprentissages des élèves et le choix de situations d'apprentissage ou de remédiation, de parcours d'enseignement, adaptés aux besoins repérés de l'élève ou de groupes d'élèves. Le diagnostic articule alors une évaluation globale de la classe et une évaluation différentielle des élèves qui prend soit la forme d'une catégorisation d'élèves en sous classes "faibles", "moyens", "forts", soit la forme de notes.

Dans le cadre de la recherche présentée, nous nous situons dans le cas d'un diagnostic orienté vers les élèves.

Analyse du diagnostic

L'étude instrumentale distingue différents aspects du diagnostic qui correspondent à des étapes de l'élaboration et de l'exploitation du diagnostic :

- Définition des items du test de l'évaluation diagnostique et recueil des réponses des élèves,
- Analyse des réponses des élèves pour modéliser leurs connaissances et les cohérences de leur activité dans un domaine mathématique donné,
- Présentation des résultats du diagnostic en lien avec le but visé.

Au début de la recherche, nous avons privilégié un outil de diagnostic qui présente les principales caractéristiques de l'activité de l'élève appelé profil cognitif dans un domaine mathématique donné : nous parlons alors de diagnostic individuel. Par la suite, au vu des limites de ce choix pour sélectionner des situations dans le contexte d'une progression au sein de la classe, nous avons développé un diagnostic collectif avec deux objectifs :

- Situer l'activité d'un élève par rapport à l'activité de référence dans un domaine mathématique donné, à un niveau scolaire donné,
- Catégoriser le profil des élèves au sein d'une classe pour constituer des groupes ayant des besoins d'apprentissage proches. En effet, pour le professeur, le but du diagnostic est d'organiser des parcours d'enseignement prenant appui sur les besoins d'apprentissage repérés des élèves.

Nous allons montrer comment la collaboration de recherche entre des informaticiens et des didacticiens des mathématiques rend possible l'expérimentation des prototypes dans des classes "ordinaires" avec des enseignants et permet de faire évoluer les modélisations retenues pour organiser des parcours d'enseignement différencié adaptés aux besoins d'apprentissage d'élèves.

- Comment modéliser une évaluation diagnostique en algèbre élémentaire, en fin de scolarité obligatoire, sur les connaissances et cohérences de l'activité algébrique d'un élève, pour permettre à un enseignant son exploitation en classe ?
- Comment présenter le diagnostic à l'enseignant en fonction de son but ?
- Comment accompagner les enseignants à organiser un enseignement prenant en compte des outils de diagnostic et des ressources de régulation ?

Positionnement en didactique des mathématiques

Quels éléments théoriques mobiliser en didactique des mathématiques pour modéliser les connaissances et les cohérences de l'activité d'un élève en algèbre élémentaire, en fin de scolarité obligatoire ?

Une double approche cognitive et anthropologique

Prenons appui sur l'analyse de la tâche diagnostique ci-dessous.

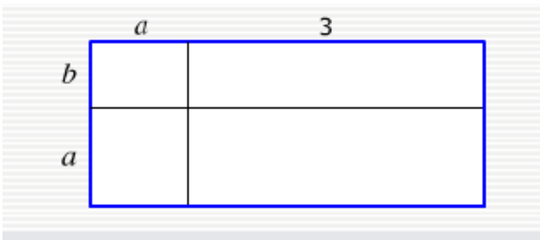


Figure 1 : calcul de l'aire d'un rectangle

L'objectif de cette tâche est d'étudier comment un élève exprime l'aire d'un domaine plan au moyen d'une expression algébrique. L'analyse des réponses correctes ou erronées donne accès aux règles de traduction et de transformation utilisées par les élèves pour passer d'une représentation géométrique à une expression algébrique. La pertinence de cette tâche diagnostique dépend des programmes et donc du niveau scolaire. Les réponses : $3a^2b$, $ab \times 3a$, $a+3 \times a+b$, $(a+b)(a+3)$ et $a^2+3a+ab+3b$ dénotent clairement des pratiques de calcul qui ne mettent pas en jeu les mêmes connaissances ni la même activité "algébrique".

Nous situons l'étude d'abord dans une approche cognitive dans la lignée des travaux de Vergnaud (1991). Pour étiqueter des aspects du développement conceptuel des objets de l'algèbre chez les élèves et organiser le diagnostic de leur compétence algébrique (Grugeon, 1997), nous postulons que ces objets appartiennent au champ conceptuel de l'algèbre élémentaire caractérisé par les types de problèmes donnant du sens aux concepts, les propriétés des objets (en particulier le double aspect sémantique et syntaxique des objets, leurs aspects procédural et structural) et leurs différentes représentations sémiotiques. Nous nous appuyons sur une synthèse des travaux internationaux de didactique de l'algèbre pour spécifier les caractéristiques du champ conceptuel (Cf. § 2.2).

Nous inscrivons aussi la recherche dans le cadre de la théorie anthropologique et les travaux de Grugeon (1997) qui visaient à étudier les difficultés des élèves lors de la transition entre deux institutions. Chaque élève apprend dans une institution donnée et le savoir, ici le savoir algébrique, lui est transmis à l'intérieur de celle-ci. Les rapports personnels que chaque élève développe vis-à-vis de l'algèbre élémentaire dans une institution donnée sont le résultat de divers assujettissements liés aux emplois (Chevallard, 1989) du calcul algébrique développés dans cette institution et reflètent les rapports institutionnels à l'algèbre élémentaire qui peuvent être différents d'une institution à une autre. L'approche anthropologique à travers l'étude de la transposition didactique de l'algèbre (Chevallard 1985, 1989) vise à caractériser le champ de problèmes algébriques du domaine algébrique privilégiés dans une institution donnée et donc les emplois de l'algèbre, dans des contextes intra ou extra mathématiques, l'algèbre n'étant pas une arithmétique généralisée (Gascon, 1995).

Nous postulons que la pratique de diagnostic doit tenir compte de l'institution dans laquelle l'élève apprend et des praxéologies mathématiques (Chevallard, 2002) impliquées dans la résolution des problèmes proposés dans l'institution[26]. Les évaluations doivent permettre de situer l'activité algébrique des élèves lors de la résolution des types de tâches travaillés à un niveau scolaire donné et les éléments technologiques investis dans leur résolution par rapport à ceux attendus. Pour étudier le rapport personnel d'un élève à l'algèbre, nous montrerons la nécessité de construire une référence indépendante des institutions (Cf. § 2.2).

De nouveaux éléments théoriques et méthodologiques en cours de recherche

Au cours de l'avancée des projets depuis la thèse de Grugeon (1995), l'usage de nouveaux éléments théoriques développés dans la communauté après 1995 nous a permis de faire évoluer le questionnement sur le modèle de l'élève, sur l'organisation de parcours d'enseignement différencié au sein du collectif classe et sur les modélisations didactiques et informatiques impliquées.

En didactique de l'algèbre, nous nous sommes appuyées sur le modèle G.T.G.[27] (Kieran 2007) distinguant trois types d'activité en algèbre élémentaire pour étayer notre choix du modèle de géographie de la classe (Cf. § 4.2), puis sur le modèle de l'algèbre élémentaire comme processus d'algébrisation des programmes de calcul (Bosch 2012) pour justifier certaines étapes des parcours d'enseignement différencié (Cf. § 5.2).

En ce qui concerne l'approche anthropologique, la mobilisation du modèle des praxéologies mathématiques (T, τ, θ, Φ) (Chevallard, 1999) a joué un rôle important dans la formalisation du modèle didactique des tâches diagnostiques et celle du profil puis des

[26] Les praxéologies sont définies à partir de l'étude des programmes, des documents d'application et des principaux manuels utilisés dans les classes.
[27] Generational / Transformational / Global-meta level

modèles informatiques correspondants. La référence au niveau de convocation des types de tâches (Castela, 2008) a permis d'étendre le modèle du diagnostic en algèbre de 3ème en 5ème et 4ème (Cf. § 4.3.1). La référence à l'incomplétude des praxéologies (Bosch, Fonseca & Gascon, 2004) et aux besoins d'apprentissage ignorés par l'institution (Castela, 2008) a conduit Pilet (2012) à problématiser les parcours d'enseignement différencié en fonction des besoins d'apprentissage repérés des élèves (Cf. § 5.4).

Réciproquement les nouveaux questionnements nous ont amenées à réinterroger des cadres théoriques mobilisés.

Positionnement en Informatique

Quels sont les éléments méthodologiques sur lesquels repose une démarche de conception itérative et participative en informatique ?

Une démarche de conception itérative et participative

Delozanne (Delozanne, Prévit, Grugeon-Allys & Chenevotot-Quentin, 2010) s'appuie sur les travaux de Mackay et Fayard (1997) pour définir la démarche de conception itérative et participative utilisée.

Un cycle de recherche débute par l'étude d'un objet de recherche, ici le diagnostic en algèbre élémentaire dans l'environnement papier-crayon, puis la modélisation didactique en lien avec les cadres théoriques mobilisés pour le diagnostic. Une modélisation informatique est ensuite conçue en interprétant le modèle didactique, ce qui permet de développer un prototype. Le(s) prototype(s) est (sont) ensuite évalué(s) au cours d'expérimentations dans différents contextes : en laboratoire puis en classe. L'analyse des données recueillies conduit à poser de nouvelles questions et à faire évoluer les modélisations didactiques. Un cycle de recherche se termine donc en interrogeant l'évolution des modélisations didactiques relatives au diagnostic.

Pour montrer l'évolution des modélisations didactiques définies au cours de cette recherche, nous présentons les quatre cycles de recherche développés sur une période de quinze ans. Nous organisons la présentation de chaque cycle à partir du plan ci-dessous : 1. Questions de recherche ; 2. Eléments théoriques en didactique ; 3. Modélisation intermédiaire : didactique, informatique, prototypes ; 4. Expérimentations : en laboratoire, en classes puis recueil des données et résultats ; 5. Reformulation des questions.

Quatre cycles de recherche

Chaque cycle de recherche a permis de développer et de faire évoluer des prototypes informatiques fondés sur des modèles didactiques intermédiaires. Dans le cadre du projet *Pépite*, nous avons centré nos questions de recherche sur la modélisation du diagnostic individuel ; dans le cadre du projet *Lingot*, sur la modélisation du diagnostic générique et collectif ; dans le cadre du projet *PépiMep*, sur la modélisation de groupes d'élèves et de parcours d'enseignement différencié.

Nous allons montrer que les changements de point de vue liés à la convocation de différents cadres théoriques et au poids relatif de chacune des approches cognitive et anthropologique ont joué un rôle important dans l'évolution des modèles. C'est le cas, en particulier, pour le passage de tâches diagnostiques spécifiques à des tâches génériques puis à des tâches prédictives, pour le passage du profil de l'élève à la géographie de la classe, pour le passage de situations d'apprentissages à des parcours d'apprentissage.

Diagnostic individuel Papier / Crayon

Nous exposons dans ce paragraphe les travaux de recherche conduits durant le premier cycle de recherche, c'est à dire les modalités du diagnostic individuel Papier / Crayon (P/C) pour décrire les rapports personnels de l'élève à l'algèbre élémentaire.

Questions de recherche

Nous nous appuyons sur les travaux de Grugeon (Grugeon, 1997) qui visaient à étudier les problèmes de transition institutionnelle dans le système éducatif. Plus précisément, il s'agissait d'étudier les rapports institutionnels et personnels à l'algèbre élémentaire qui se développent dans la transition entre les filières d'enseignement professionnel et les filières correspondantes de l'enseignement général de lycée. Deux questions de recherche ont émergé. Tout d'abord, comment identifier et mettre en relation le rapport personnel d'un élève et le rapport institutionnel à l'algèbre élémentaire (Q1.1) ? Puis, comment déterminer des leviers pour l'apprentissage (Q1.2) ?

Eléments théoriques

Les éléments théoriques articulent les approches cognitive et épistémologique d'une part et l'approche anthropologique d'autre part.

Grugeon (1997) a défini une référence, consistant en un modèle multidimensionnel de la compétence algébrique pour mettre en relation les rapports personnel et institutionnel à l'algèbre au niveau de la fin de la scolarité obligatoire en France. Ce modèle prend en compte différents aspects de la compétence algébrique. En particulier, les connaissances algébriques sont structurées selon deux principales dimensions, dépendantes l'une de l'autre et partiellement hiérarchisées, les dimensions *outil* et *objet*, termes pris selon l'acception de (Douady, 1986).

La dimension *objet* comprend d'une part les objets de l'algèbre (incluant les expressions, les formules, les équations) et d'autre part les systèmes de représentation associés à ces objets (le système de représentation symbolique algébrique en articulation avec d'autres systèmes de représentation tels que les registres du langage naturel, des écritures numériques, des figures, des représentations graphiques).

La dimension *outil* de l'algèbre est mobilisée comme outil de résolution de problèmes *via* leur modélisation (problèmes arithmétiques formulés en langue naturelle, modélisés sous forme d'équations et d'inéquations, problèmes intra ou extra mathématiques, modélisés sous forme de relations fonctionnelles entre données et variables), comme outil de généralisation et de preuve dans le cadre numérique, comme outil de calcul dans les cadres algébrique et fonctionnel.

Modèle didactique

Le test

Le modèle didactique utilisé pour produire le diagnostic individuel P/C s'appuie sur la structure d'analyse multidimensionnelle de l'algèbre qui a permis de construire à la fois les items du test diagnostic et leur analyse *a priori*.

Le test diagnostique fait intervenir les différents types de problèmes du domaine algébrique. Il est constitué de 22 tâches « figées ». A titre d'exemple, nous suivrons l'évolution, au fil des trois premiers cycles de recherche, de la tâche diagnostique 3 (figure 1 en annexe) du test déjà étudiée au paragraphe 1.2.1. C'est une tâche de production d'expression visant à étudier si un élève sait exprimer l'aire d'un domaine plan par une expression algébrique.

Dans notre approche, les réponses des élèves ne sont pas seulement analysées en termes de réussite/échec mais aussi codées en termes de cohérences définies par une analyse *a priori*. En effet, nous recherchons les cohérences en ce qui concerne la mobilisation des objets de l'algèbre pour résoudre les problèmes du domaine, le niveau technique et d'adaptabilité pour le calcul algébrique, le niveau de flexibilité pour l'articulation entre les différents registres de représentation et le niveau de la rationalité algébrique. Le profil cognitif d'un élève résulte ensuite du codage de ses réponses au test selon deux niveaux d'analyse.

L'analyse a priori du test

Le premier niveau d'analyse concerne le codage des réponses de l'élève par tâche. Tout d'abord, le codage évalue la validité de la réponse de l'élève et le type de traitement algébrique (codage T). Ensuite, le codage évalue la cohérence de la réponse de l'élève selon plusieurs dimensions :

- les types d'utilisation des lettres (codage L) ;
- les types de manipulation formelle des expressions algébriques (codage M) ;
- les types de conversion pour traduire des expressions d'un registre à un autre (codage C) ;
- les types de rationalité mathématique (codage R).

Pour la tâche 3 citée ci-dessus, deux démarches correctes (figure 2 en annexe) sont possibles selon que l'élève procède en appliquant la définition de l'aire d'un rectangle comme le produit $(a+3) \times (a+b)$, ou en sommant les aires de chacun des quatre rectangles qui composent le grand rectangle pour obtenir $ab+3b+a^2+3a$. Les démarches incorrectes (figure 2 en annexe) peuvent résulter de l'omission de parenthèses $a+3\times a+b$, d'une confusion entre aire et périmètre $2(a+3+a+b)$, de la production d'une expression abréviative du type $3a\times ab$ *ou* $3a^2b$ soit au cours de la conversion ou au cours de l'application des transformations lors du calcul. L'analyse des réponses à la tâche 3 donne accès à la validité de la réponse ainsi qu'aux règles de traduction et/ou de transformation utilisées par les élèves pour passer d'une représentation géométrique à une écriture algébrique.

Le deuxième niveau d'analyse consiste en une analyse transversale des réponses de l'élève sur l'ensemble des tâches dans le but de repérer des cohérences de fonctionnement de son activité algébrique.

Profil cognitif en algèbre

Le résultat du diagnostic constitue le profil cognitif de l'élève et s'appuie sur trois types de description :

- Une description quantitative (1er type) correspondant à un résumé des compétences algébriques en termes de réussite et d'échec par rapport au niveau attendu et sur les différentes catégories de tâches (technique, mathématisation, reconnaissance[28]) ;
- Une description qualitative (2ème type) des cohérences de fonctionnement selon l'usage des lettres, le calcul algébrique, la traduction, les types de justification ;
- L'articulation entre différents registres de représentation (3ème type) en termes de flexibilité.

Deux figures (Grugeon, 1997, p 97) présentent le profil cognitif en algèbre élémentaire de Mérième, une élève scolarisée en classe de Première d'adaptation (15/16 ans). Concernant le

---

[28] Le réseau RESEIDA est un regroupement interdisciplinaire de chercheurs issus de plusieurs laboratoires français et francophones. Piloté par Elisabeth Bautier et Jean-Yves Rochex, il porte sur la socialisation, l'enseignement, les inégalités et les différenciations dans les apprentissages.

traitement algébrique, Mérième manipule des expressions très simples. Pour la rationalité algébrique, Mérième a recours à des preuves pragmatiques et des raisonnements peu élaborés. Le profil cognitif de Mérième indique aussi sa faible flexibilité dans l'articulation entre les différents registres de représentation (numérique, algébrique, graphique, géométrique).

Expérimentations

Des expérimentations ont été réalisées en 1995 auprès de 600 élèves. Nous avons obtenu un riche spectre de réponses permettant de caractériser les profils. Concernant les usages des enseignants, elles ont révélé des difficultés importantes pour coder les réponses et pour les interpréter transversalement en termes de profils (Lenfant, 1997). Par ailleurs, l'outil fournit des informations nouvelles sur l'activité algébrique et sur les erreurs des élèves, informations didactiques inhabituelles que les enseignants ne sont pas habitués à traiter. Enfin, l'outil est apparu trop complexe pour une utilisation habituelle en classe, ce qui conduit à la nécessité d'une automatisation.

Résultats du premier cycle de recherche

Au cours de ce premier cycle de recherche, nous avons mené une analyse didactique des cohérences de fonctionnement d'un élève en algèbre élémentaire (question de recherche Q1.1).

Les informaticiens ont perçu l'intérêt de ces résultats du point de vue des Environnements Informatique d'Apprentissage Humain (EIAH). En effet, cette modélisation du profil cognitif d'un élève en algèbre, en appui sur la didactique des mathématiques, présente des descriptions ayant un niveau de structuration qui rend possible la modélisation informatique. Ainsi, les deux niveaux d'analyse produisent respectivement, pour le codage des réponses par tâche, un vecteur de codes et, pour l'analyse transversale sur l'ensemble des tâches, une agrégation de codes, qui constituent une modélisation didactique « semi-formalisée » du diagnostic P/C exploitable par les informaticiens.

Diagnostic individuel informatisé

Les expérimentations réalisées au cours du premier cycle de recherche ont montré la nécessité d'une automatisation. Mais peut-on passer d'un modèle descriptif à un modèle exécutable ? Cette question soulève le difficile problème de l'analyse automatique des réponses des élèves et de leurs raisonnements. En effet, le test diagnostic comprend des questions fermées mais aussi des questions ouvertes.

Questions de recherche

De nouvelles questions de recherche émergent. Le recueil des réponses avec un logiciel va-t-il limiter le spectre de réponses aux questions ouvertes ? Seront-elles suffisamment fiables et riches pour détecter les cohérences de fonctionnement mises en évidence par Grugeon (Q2.1) ? Est-il possible d'automatiser au moins partiellement le codage des réponses des élèves pour élaborer leurs profils en algèbre (Q2.2) ? L'usage des profils élaborés par le logiciel aide-t-il les enseignants à réguler leur enseignement (Q2.3) ?

Eléments théoriques

Les fondements didactiques restent inchangés : l'analyse didactique a permis d'élaborer un profil cognitif d'un élève au moyen d'un codage structuré qui rend envisageable l'informatisation.

La démarche en EIAH repose sur une méthodologie de recherche itérative fondée sur l'utilisation de prototypes. Un prototype est un outil méthodologique qui joue le rôle de modèle intermédiaire manipulable à la fois par des utilisateurs et par des chercheurs. Il rend possible la modélisation informatique car son implémentation en machine exige qu'il soit explicite et contraint donc à formuler les implicites. Cette démarche permet alors d'entrer dans un cycle de perfectionnement du prototype, *via* des expérimentations, conduisant à « pousser à bout » les modèles didactiques pour les rendre opérationnels en machine. C'est cette mise à l'épreuve des modèles qui permet alors d'avancer sur les questions de recherche.

Le prototype Pépite

Le prototype informatique *Pépite* (Jean, 2000) constitue un modèle didactique intermédiaire exploitable par les informaticiens. Il s'articule autour de trois logiciels (figure 3).

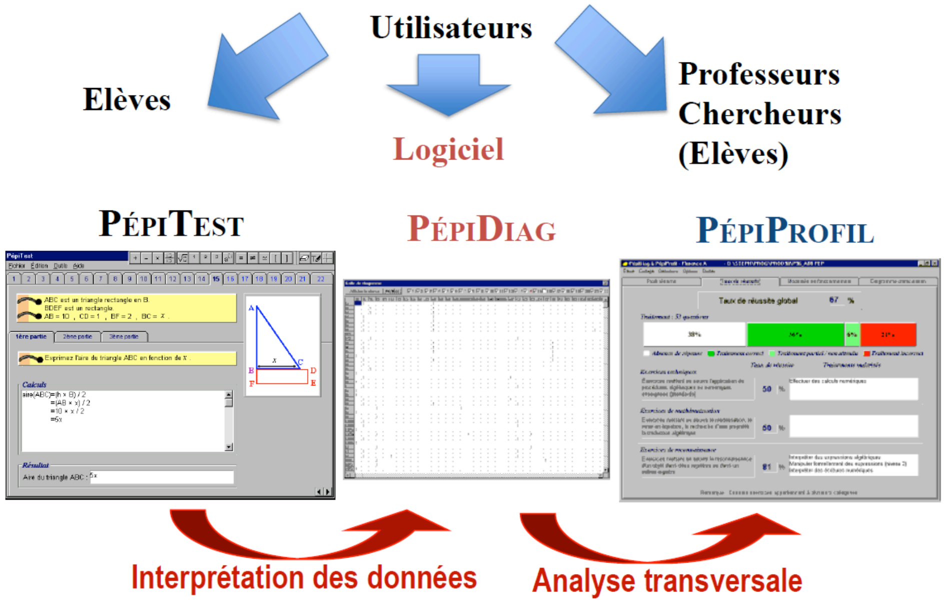


Figure 3 : Prototype Pépite développé par Stéphanie Jean en 2000

Le logiciel *PépiTest* propose le test aux élèves. Celui-ci comprend les 22 tâches diagnostiques « figées » composées aussi bien de QCM que de questions ouvertes.

Le logiciel *PépiDiag* réalise une automatisation partielle de la construction du profil cognitif de l'élève. Il procède tout d'abord au codage des réponses par tâche. Pour les QCM, la démarche est complétement identique à l'outil P/C. En revanche, l'analyse des réponses aux questions ouvertes s'effectue par comparaison avec des réponses anticipées. Pour les réponses en langage naturel, des techniques de recherche de mots clés sont utilisées. PépiDiag procède ensuite à l'analyse transversale sur l'ensemble des tâches.

Le Logiciel *PépiProfil*, destiné principalement aux chercheurs et aux professeurs, présente le profil cognitif selon les trois types de description indiqués au paragraphe 2.3.3.

Le profil cognitif d'un élève proposé par le logiciel *PépiProfil* comprend tout d'abord une description quantitative en termes de taux de réussite et de traitements maîtrisés (1er type de description, figure 4 en annexe). Dans la partie supérieure figure la réussite de l'élève en pourcentage. La barre horizontale donne une description de la réussite globale de l'élève sur le test entier. En dessous figure la réussite seulement pour les questions traitées. Dans la partie inférieure apparaissent les taux de réussite puis les traitements maîtrisés par l'élève par types d'exercices.

PépiProfil propose ensuite une description qualitative en termes de modes de fonctionnement (2ème type de description, figure 5 en annexe). La présentation s'appuie ici sur les critères évaluant la cohérence de la réponse de l'élève (premier niveau d'analyse) : utilisation des lettres (codage L) ; manipulation formelle des expressions algébriques (codage M) ; conversion pour traduire des expressions d'un registre à un autre (codage C) ; rationalité mathématique ou justification (codage R).

Enfin *PépiProfil* présente le diagramme d'articulation entre les différents cadres (3ème type de description, figure 6 en annexe). Le diagramme montre la flexibilité dans l'articulation entre les différents cadres. Celle-ci est également faible ici comme en témoignent les flèches en pointillés.

Expérimentations

Des expérimentations ont été conduites à partir de 2000 dans différents contextes allant de classes ordinaires à des situations de formation initiale d'enseignants ou de formation de formateurs.

Une équipe composée de psychologues et d'ergonomes (Rogalski, 2005) a mené une étude approfondie de l'activité d'enseignants utilisant *Pépite*. Les expérimentations ont d'abord permis de préciser la terminologie. Les expérimentations montrent que le test (composé de 22 tâches) est trop long et que le temps de passation est trop important. Cette équipe a relevé des usages de *Pépite* comme support à des situations d'apprentissage en classe et en formation. Par ailleurs, l'utilisation du logiciel créé deux tâches nouvelles pour les enseignants : coder les réponses aux questions ouvertes non analysées par le logiciel et interpréter le profil de l'élève.

Mais l'interface de *PépiProfil* reste peu exploitée par les enseignants car elle donne une description complexe du profil de l'élève en algèbre, inadaptée aux pratiques enseignantes bien qu'elle soit utile aux chercheurs. Elle n'est pas du tout conforme à la façon dont les enseignants expérimentés regardent leurs élèves. En particulier, le 3ème type de description (articulation entre les différents registres de représentation) est rarement utilisé par les enseignants même s'il apporte des informations importantes pour les didacticiens. Cela pose la question de la prise en compte des pratiques enseignantes dans la conception des outils pour l'enseignant.

Résultats du deuxième cycle de recherche

Pépite permet de repérer des compétences et des fragilités en algèbre chez les élèves. L'ensemble des réponses aux questions ouvertes, recueillies par *Pépite*, couvre de façon analogue le spectre des réponses prévues par l'analyse didactique *a priori* ; le logiciel ne diminue donc pas l'éventail des réponses. *Pépite* permet de construire des profils cohérents par rapport à l'outil P/C même si cela reste à confirmer sur une étude systématique (question de recherche Q2.1).

Malgré les difficultés dans la saisie et l'analyse des questions ouvertes, le logiciel *Pépite* analyse automatiquement (question de recherche Q2.2) les réponses aux questions fermées (42% des items du test) ainsi que les expressions algébriques simples (23% des items du test). Les réponses en langage naturel (3% des items du test) sont très partiellement analysées par des techniques de recherche de mots clés. Enfin, les raisonnements algébriques ne sont pas analysés dans le premier prototype *Pépite* de 2000 mais le seront dans les versions postérieures à 2002.

Diagnostic collectif et diagnostic générique

Les expérimentations du prototype *Pépite* ont permis de pointer les besoins des enseignants concernant le diagnostic et son usage.

Le test *Pépite*, figé, est spécifique pour le niveau fin de $3^{ème}$ / début de 2^{nd}. Comment adapter ce test à différents moments de l'année scolaire et à d'autres niveaux scolaires ? Comment réduire le temps de passation du test ?

Les enseignants soulignent qu'une géographie cognitive de la classe serait plus opérationnelle qu'une description du profil cognitif de chaque élève. Comment effectuer des regroupements d'élèves ? Selon quels critères ?

En fonction des profils diagnostiqués, quelles situations d'apprentissage proposer pour faire évoluer les compétences des élèves ou pour remédier aux difficultés repérées ?

Questions de recherche

Les expérimentations réalisées avec le premier prototype informatique *Pépite* ont fait émerger de nouvelles questions de recherche. Est-il possible de gérer la variété des profils potentiels en regroupant des profils voisins pour leur associer le même objectif d'apprentissage commun (Q3.1) ? Quelle modélisation du diagnostic permettrait d'effectuer des diagnostics à différents moments de la scolarité et à d'autres niveaux scolaires (modèle générique) (Q3.2)? Quelles situations d'apprentissage proposer aux élèves en fonction de leurs profils individuels (Q3.3) ? Nous allons garder le fil conducteur du diagnostic et c'est pourquoi la $3^{ème}$ question ne sera pas abordée ici (Grugeon-Allys, Pilet, Chenevotot-Quentin & Delozanne, 2012) ou (Grugeon, Coulange & Larue, 2003).

Eléments théoriques

Nous empruntons des éléments théoriques issus des approches cognitive et épistémologique. Grugeon a défini le modèle de la compétence algébrique en fin de scolarité obligatoire, référence pour y organiser un diagnostic. Ce modèle est réifié par le modèle GTG (Generational / Transformational / Global-meta level) de Kieran (Kieran, 2007) qui différencie trois aspects complémentaires de l'activité algébrique. L'activité générative concerne la génération des différents objets de l'algèbre : expressions algébriques (généralisant des règles numériques), formules (traduisant des relations entre des variables dans différents cadres) et équations (à une ou plusieurs inconnues modélisant un problème), identités. L'activité transformationnelle concerne l'utilisation de règles de transformation (règles relatives à la substitution de valeurs numériques dans des expressions, à la factorisation, au développement, à la résolution d'équations et d'inéquations). L'activité globale au niveau méta concerne la mobilisation et l'usage de l'outil algébrique pour résoudre différents types de problèmes (de modélisation, de généralisation, de preuve).

Nous nous appuyons aussi sur l'approche anthropologique. L'approche cognitive mentionnée ci-dessus ne prend pas en compte l'institution dans laquelle l'élève apprend et les praxéologies mathématiques (Chevallard, 2002) impliquées dans la résolution des problèmes proposés dans l'institution. Pour une institution donnée, nous cherchons à décrire le rapport institutionnel à l'algèbre à partir des praxéologies (T, τ, θ, Φ) convoquées dans l'institution. Au-delà de la recherche des conceptions sur les notions en jeu, les pratiques d'évaluation doivent permettre de situer la praxis (T et τ) des élèves dans la résolution des types de tâches travaillés à un niveau scolaire donné et les éléments technologiques investis dans leur résolution par rapport aux praxéologies mathématiques idoines. Plus précisément, nous allons faire le lien avec nos questions de recherche.

Modélisation du diagnostic générique

Disposer de tests génériques est un enjeu fort pour dresser le profil cognitif d'un élève à différents moments de la scolarité afin de suivre son évolution. Nous illustrons notre démarche en prenant appui sur la tâche 3 (figure 7 en annexe) « Expression littérale de l'aire d'un rectangle » déjà abordée précédemment.

Modélisation didactique des tests génériques

La mobilisation des outils de l'approche anthropologique permet de passer d'un test diagnostic figé à un test générique en paramétrant le test diagnostic et son analyse en termes de types de tâches et d'objets en jeu. La modélisation didactique des tâches des tests génériques consiste à instancier les variables didactiques identifiées selon le niveau scolaire considéré :

- Nature du type de tâches : liée à ceux intervenant dans l'Organisation Mathématique (OM) globale de l'algèbre des programmes ;
- Technique(s) attendue(s) : celle(s) du niveau scolaire ;
- Nature et complexité des expressions en jeu ;
- Niveau de convocation des types de tâches ;
- Cadres et registres de représentation.

Concernant la tâche 3, le codage des réponses (figure 8 en annexe) ressemble fort à ce que nous avons déjà présenté pour les deux premiers cycles de recherche. Cette démarche produira d'abord un nouveau prototype P/C de diagnostic pour le niveau scolaire 5$^{\text{ème}}$/4$^{\text{ème}}$ (Chenevotot, Grugeon & Delozanne, 2009). Cette modélisation didactique permettra aussi la réduction du nombre de tâches composant le test (passage d'un test composé de 22 tâches à un test composé de 10 tâches) reposant sur une analyse didactique et une analyse combinatoire.

Le test initial composé de 22 tâches a volontairement été conçu avec des redondances. Ainsi, la détermination de chaque élément du profil repose sur les réponses de l'élève à plusieurs tâches. Cette stratégie présente des avantages évidents pour la fiabilité du diagnostic. Mais, en raison de sa longueur excessive, le test initial peut ne pas être complètement renseigné par les élèves. Grâce à l'analyse *a priori* des tâches composant le test initial de 22 tâches, l'analyse didactique a permis de quantifier les potentialités de chaque tâche sur le plan du diagnostic et de retenir celles qui ont une valeur prédictive importante. L'analyse combinatoire (Darwesh, 2010) repose sur la comparaison des stéréotypes obtenus, d'une part, avec le test complet composé de 22 tâches et, d'autre part, par des combinaisons de 15 tâches, sur un corpus de 361 élèves. Darwesh a ensuite déterminé les 13 tâches qui interviennent le plus souvent dans les meilleures combinaisons composées de 15 tâches. L'analyse didactique (Chenevotot & al, 2011) a validé la pertinence du choix de ces 13 tâches et a permis d'estimer que leur nombre pouvait être réduit à 10 tâches. La comparaison des stéréotypes obtenus, d'une part, avec le test complet composé de 22 tâches et, d'autre part, avec le test réduit composé de 10 tâches, donne un pourcentage d'égalité de 74%.

Modélisation informatique des tests génériques

La modélisation informatique des tests génériques s'appuie sur le modèle conceptuel de classes de tâches paramétrées développé par Dominique Prévit (Prévit, 2008). Cette modélisation résulte d'une démarche ascendante pour généraliser les tâches de *Pépite* en produisant un modèle de classes paramétrées de tâches de diagnostic.

Elle repose sur la conception de deux logiciels. Le logiciel *PépiGen* (système auteur) permet de générer automatiquement la tâche et sa grille de codage (raisonnements corrects ou erronés fréquemment observés et la grille d'analyse multidimensionnelle des réponses). Le logiciel *Pépinière* (composant de calcul formel) traite les expressions algébriques nécessaires à la génération des exercices, à la génération automatique des réponses anticipées et à l'analyse automatique des réponses des élèves.

Nous revenons sur l'exemple de la tâche 3. Celle-ci fait partie de la classe de tâches « expression littérale de l'aire d'un rectangle ». L'indexation didactique de cette classe de tâche (figure 9 en annexe) précise :

- Les objectifs de la tâche : rechercher si un élève sait associer une expression algébrique à un domaine plan qui a pour aire cette expression ;
- La composante : traduire algébriquement dans différentes représentations (algébrique, arithmétique et en langage naturel) en lien avec le diagnostic collectif et le modèle des stéréotypes qui seront présentés dans le paragraphe suivant ;
- La capacité : traduire une expression algébrique comme une aire d'une surface ;
- Les types de tâche : calculer l'aire d'un domaine plan ; associer une expression algébrique à l'aire d'un domaine plan ;
- Les critères de validation : codage des réponses de la tâche.

Les codes utilisés ici pour le 3$^{\text{ème}}$ cycle de recherche (T pour la validation, C pour la conversion et M pour les manipulations algébriques) sont très légèrement différents de ceux présentés pour deux premiers cycles (V pour la validation, T pour la traduction et EA pour le calcul avec des expressions algébriques).

Jusqu'ici, le logiciel de diagnostic *Pépite* analysait correctement les réponses des élèves aux questions fermées mais beaucoup plus aléatoirement aux questions ouvertes pour lesquelles il procédait par comparaison avec une liste de solutions anticipées. L'enjeu est d'améliorer les performances d'analyse des réponses aux questions ouvertes par typage (figure 10 en annexe). Les réponses anticipées ont été typées en respectant des concordances entre les différentes tâches. Si nous retrouvons les grandes lignes du codage des réponses précédemment exposé, il s'agit néanmoins d'une avancée importante visant à une description plus fine permettant d'optimiser la catégorisation des réponses ouvertes des élèves. L'amélioration des performances de l'analyse des questions ouvertes résulte de l'enrichissement successif de la base des solutions anticipées grâce aux chercheurs en didactique des mathématiques et en informatique. Ces solutions bénéficient au préalable de l'analyse de *Pépinière*, logiciel de calcul formel qui compare les expressions algébriques.

Modélisation du diagnostic collectif

Pour les enseignants, dont l'objectif est d'exploiter le diagnostic pour réguler les apprentissages des élèves, une photographie de groupes d'élèves ayant des praxis voisines en algèbre semble plus opérationnelle.

Modélisation didactique du stéréotype

Le passage d'un diagnostic individuel à un diagnostic collectif pour la classe repose sur l'approche cognitive et épistémologique. Plus précisément, en situant l'activité algébrique de chaque élève, repérée grâce au diagnostic individuel, selon trois composantes directement en lien avec les trois aspects de l'activité algébrique déjà présentés, nous avons construit un nouveau modèle, le modèle des stéréotypes.

Un stéréotype est défini comme une classe de profils « équivalents », c'est-à-dire un ensemble de profils pour lesquels les compétences algébriques des élèves peuvent être jugées suffisamment proches pour bénéficier de situations ayant les mêmes objectifs prioritaires d'apprentissage. Classer un élève selon un stéréotype revient à lui attribuer un niveau sur une échelle de développement conceptuel comportant trois composantes.

La première composante (4 niveaux) concerne l'Usage de l'Algèbre (UA). Il s'agit d'étudier la capacité de l'élève à mobiliser l'algèbre pour traduire algébriquement les différents types de problèmes via les équations ou via des relations fonctionnelles, les problèmes pour généraliser, prouver ou démontrer.

La deuxième composante (3 niveaux) concerne la Traduction d'une représentation Algébrique dans une autre (TA). Il s'agit d'étudier la capacité de l'élève à interpréter des écritures algébriques en articulation avec les autres registres de représentation (langage naturel, graphique, figure géométrique).

La troisième composante (3 niveaux) concerne le Calcul Algébrique (CA). Il s'agit d'évaluer le degré de maîtrise en calcul algébrique et la nature des techniques de calcul mises en jeu par l'élève.

Christian Vincent (Vincent & al, 2005) a développé le prototype informatique *PépiStéréo* qui met en œuvre les stéréotypes.

Bilan cognitif d'un élève

Le bilan cognitif d'un élève comprend deux éléments.

Le premier élément consiste en le stéréotype de l'élève qui représente le niveau de son activité algébrique selon les trois composantes. Ce stéréotype est obtenu grâce à un algorithme calculant le niveau de compétence algébrique sur une échelle de développement conceptuel relatif aux trois composantes définies ci-dessus. L'algorithme de calcul a émergé d'un consensus issu des analyses des profils construits par *Pépite*, sur le corpus des réponses recueillies, menées de façon indépendante à partir de stratégies distinctes, par trois didacticiens (Grugeon-Allys, 2008).

Le deuxième élément consiste en les caractéristiques personnelles de l'élève dont ses leviers d'apprentissage (compétences déjà construites sur lesquelles s'appuyer : « les pépites »), ses fragilités (connaissances non construites ou à consolider en priorité) et ses erreurs récurrentes (à déstabiliser).

Voici, à titre d'exemple, le bilan cognitif de Jules (tableau 1), un élève de seconde.

Usage de l'Algèbre UA Niveau 3	UA3 Mobilisation de l'outil algébrique sans cohérence entre le modèle et la situation.	Exercices de mathématisation Taux de réussite : **18 %** **Fragilités** Encore des démarches arithmétiques
Traduction d'une représentation à une autre TA Niveau 2	TA2 Traduction ne prenant pas en compte la reformulation des relations.	Exercices de reconnaissance et de traduction Taux de réussite : **50 %** **Leviers** Traduction algébrique correcte pour modéliser (e=6P ; x-2=y+2)
Calcul Algébrique CA Niveau 3	CA3 Traitement s'appuyant sur une conception pseudo-structurale, mettant en jeu des règles de formation et de transformation incorrectes du type concaténation.	Exercices techniques Taux de réussite : **14 %** **Fragilités** Rôle des opérateurs non maîtrisé ($4a^3+3a^2=7a^5$) Utilisation de règles de transformation fausses ($(a+2)^2=a^2+4$; $a^ma^n=a^{m.n}$; $ax=b \rightarrow x=-b/a$)

Tableau 1 : Bilan cognitif de Jules

Nous pouvons voir que Jules est en difficulté en calcul algébrique (il est classé en CA3). En effet, des fragilités ont été repérées concernant le rôle non maîtrisé des opérateurs et l'utilisation de règles de transformation fausses. Jules est également en difficulté dans l'usage de l'algèbre dans la résolution de problèmes (il est classé en UA3). Il présente une fragilité : il utilise encore des démarches arithmétiques. En revanche, Jules traduit algébriquement, sans reformulation, des relations mathématiques entre variables dans un cadre donné (il est classé en TA2) ; c'est un levier d'apprentissage.

Expérimentations

Les expérimentations réalisées pour le diagnostic collectif ont été conduites en 2005 et portent sur un corpus de 361 élèves. La restitution du stéréotype aux enseignants a donné lieu à de nombreux échanges concernant la terminologie employée. Parmi les trente six stéréotypes possibles, on relève au plus 13 stéréotypes différents dans une classe et bien souvent moins de six. Cela reste cependant un nombre trop grand pour permettre à un enseignant de mettre en place des stratégies d'enseignement différencié. Ceux-ci souhaitent disposer d'un faible nombre de groupes (3 ou 4 groupes) d'élèves qui travailleraient sur des situations d'apprentissage adaptées.

Par exemple, la géographie cognitive de cette classe de seconde (figure 11), établie en début d'année, témoigne d'une classe homogène mais faible avec plus des deux tiers de la classe en UA3-TA3-CA3.

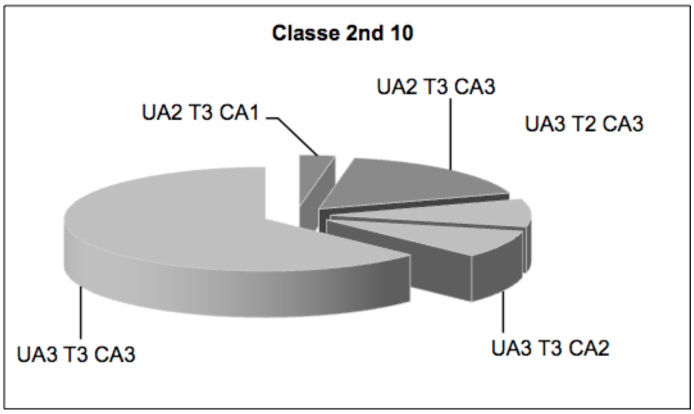


Figure 11 : Géographie cognitive de la classe de seconde 10

Résultats du troisième cycle de recherche

Le troisième cycle de recherche a produit, d'une part, un modèle de tâches diagnostiques génériques (question de recherche Q3.2) qui permet de disposer de plusieurs tests diagnostiques (clones), à différents moments de la scolarité et, d'autre part, un modèle de stéréotypes (question de recherche Q3.1) pour permettre aux enseignants de disposer d'un diagnostic collectif afin de situer l'activité de chaque élève par rapport à l'ensemble des élèves de leur classe.

Il a également produit deux logiciels : un logiciel permettant de générer les tâches et leur grille de codage (*PépiGen*) ainsi qu'un logiciel de calcul formel permettant le traitement des expressions algébriques (*Pépinière*) puis l'analyse automatique des réponses de l'élève (Prévit, 2008, Delozanne & al., 2010). Le logiciel de calcul formel *Pépinière* a permis d'améliorer considérablement les performances du diagnostic. Pour les questions ouvertes, sur un corpus de 361 réponses au test *Pépite*, nous codons actuellement entre 70 et 92% des réponses selon les tâches.

Modélisation des groupes et des parcours d'enseignement différencié

Ce quatrième cycle de recherche a pour objectif le transfert de l'outil de diagnostic, conçu et développé en laboratoire puis expérimenté dans des classes, sur la plateforme en ligne *LaboMep* développée par l'association Sésamath. Ce transfert vise à étendre la recherche à grande échelle, dans des conditions réelles d'enseignement. Un premier enjeu est de fiabiliser l'outil de diagnostic pour passer à l'échelle et d'étudier son utilisabilité, son utilité et son acceptabilité par les enseignants (Tricot & Plégat-Soutjis, 2003). Un autre enjeu concerne l'accès à de vastes données par le biais de la plateforme en ligne *LaboMep* pour tester la validité des modèles didactiques et informatiques de diagnostic en algèbre, en particulier le modèle de stéréotype, à partir d'analyses statistiques complétant les analyses qualitatives *a priori* déjà réalisées. Ce quatrième cycle vise aussi à développer une démarche collaborative et participative avec un groupe d'enseignants du groupe IREM[29] et de l'association Sésamath pour concevoir et expérimenter les ressources de diagnostic et de différenciation en classes « ordinaires ».

Questions de recherche

Le transfert sur une plateforme en ligne a confronté l'équipe pluridisciplinaire des chercheurs à de nouvelles questions.

Sur le plan du transfert : quelles sont les conditions permettant d'assurer la viabilité du transfert du diagnostic vers une plateforme en ligne largement utilisée par les enseignants de mathématiques de collège (Q5.1) ?

Sur le plan de l'usage du diagnostic : comment réduire le nombre de groupes d'élèves d'une classe ayant des besoins d'apprentissage proches en algèbre (Q5.2) ? Pour un objectif d'apprentissage donné, comment concevoir, modéliser, développer, des exercices adaptés aux besoins d'apprentissage des élèves (Q5.3) ?

Sur le plan de l'analyse des usages : quels usages les enseignants font-ils de ces ressources et quels sont les impacts sur l'activité algébrique des élèves (Q5.4) ?

Eléments théoriques

Nous précisons les choix théoriques qui fondent la catégorisation en groupes d'élèves et la modélisation des parcours d'enseignement différencié.

Au-delà du point de vue cognitif, nous interrogeons le processus de transposition didactique pour intégrer les conditions et les contraintes sous lesquelles les élèves apprennent en tenant compte de l'hétérogénéité des apprentissages. Quelle est la complétude des praxéologies apprises ? Comment s'y agrègent les organisations mathématiques ponctuelles ? Quels sont les praxis et niveaux technologiques envisageables du côté élève dans la résolution des tâches ? Il s'agit de faire des hypothèses sur les éléments technologiques mobilisables par les élèves pour résoudre les tâches diagnostiques convoquant les types de tâches représentatifs de l'organisation praxéologique en algèbre dans une institution donnée.

En reprenant la méthodologie utilisée par Bosch et Gascon (2005), Pilet a construit une praxéologie de référence relative aux expressions algébriques pour la fin de la scolarité obligatoire (Pilet, 2012) comme unité d'analyse. L'objectif est de caractériser les besoins

[29] Groupe IREM « Enseignement différencié de l'algèbre élémentaire dans la transition 3$^{\text{ème}}$ / 2$^{\text{nde}}$ » de l'université Paris Diderot.

d'apprentissage ignorés (Castela, 2008) dans les programmes, en mettant en relation les écarts entre les praxéologies à enseigner ou enseignées et les praxéologies apprises. Au delà des technologies développées du côté des institutions, il s'agit aussi de caractériser des catégories de « justifications inadaptées », repérées de façon régulière dans les données expérimentales, qui laissent vivre des classes d'erreurs récurrentes lors de l'activité algébrique des élèves.

On dépasse les usages classiques de la TAD qui en sont faits à travers d'une part la prise en compte du cognitif et d'autre part l'étude de la différenciation des apprentissages. Ces choix théorique et méthodologique permettent de :

- Catégoriser les praxéologies apprises *a priori* selon des niveaux technologiques et théoriques dominants dans une institution donnée et des classes d'erreurs identifiés en relation avec les besoins d'apprentissages ignorés,
- Modéliser des parcours d'enseignement différencié en lien avec des questions et sous questions génératrices identifiées pour travailler les savoirs et savoir-faire implicites.

Modélisation didactique de groupes d'élèves ayant des besoins d'apprentissage proches

Au cours de ce quatrième cycle de recherche, nous avons transféré le diagnostic sur *LaboMep*. La présentation a bénéficié de la collaboration entre les chercheurs et les enseignants du groupe IREM utilisant cet outil informatique dans leur classe. Les tâches diagnostiques conservent la présentation existante mais l'interface prend en compte la gestion des interactions inhérentes à *LaboMep* (figure 12).

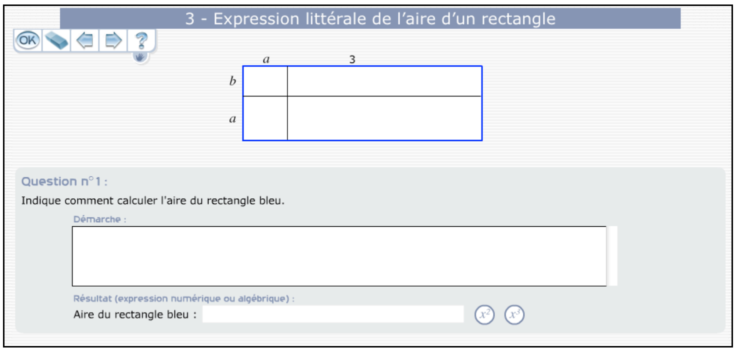


Figure 12 : Tâche diagnostique 3 – Production d'une expression littérale

De plus, nous sommes passés d'une modélisation de type « diagnostic individuel » conduisant à proposer à des élèves des situations d'apprentissage ou de remédiation « isolées » (Grugeon, Coulange, Larue, 2003), à une modélisation de type « diagnostic collectif » visant à organiser des parcours d'enseignement différencié au sein d'une séquence d'enseignement donnée, pour des groupes d'élèves ayant des praxis et des besoins d'apprentissage proches. Nous avons aussi mis en cohérence le modèle du profil cognitif décrit en termes de stéréotypes avec le modèle de tâche diagnostique décrit en terme praxéologique.

Pour ceci, nous regroupons d'abord les stéréotypes à partir des niveaux sur la composante « Calcul Algébrique ». Nous distinguons trois groupes, A, B, C, correspondant à des « technologies élèves » dominantes mobilisées dans la résolution de tâches diagnostiques de calcul algébrique (développement, factorisation, résolution d'équations mais aussi reconnaissance d'expressions algébriques en articulation avec d'autres registres de représentation sémiotique) :

Groupe C : usage de démarches arithmétiques, laissant vivre des erreurs liées à des règles de concaténation $a+b \rightarrow ab$ ou de duplication $a^2 \rightarrow 2a$ (CA3 : niveau 3 sur la composante CA) ;

Groupe B : usage d'arguments syntaxiques formels faiblement articulés au numérique, laissant vivre l'usage incorrect des parenthèses, l'usage de règles fausses, par exemple du type $(a+b)^2 \rightarrow a^2+b^2$ (CA2 : niveau 2 sur la composante CA) ;

Groupe A : usage d'arguments sémantiques et syntaxiques, prenant en compte la structure et l'équivalence des expressions et la technologie attendue (CA1 : niveau 1 sur la composante CA).

Chaque groupe est subdivisé en deux sous-groupes selon la composante « Usage de l'Algèbre » : un sous-groupe « - » pour les niveaux UA3 et UA4 et un sous-groupe « + » pour les niveaux UA1 et UA2. Ce modèle est une réponse à la question Q5.2.

Nous illustrons cette modélisation pour le groupe C. Le groupe C est caractérisé par : un calcul encore peu ou pas guidé par l'équivalence des expressions algébriques et la dialectique entre numérique et algébrique et vice versa ; s'appuyant fortement sur une technologie arithmétique laissant vivre des erreurs liées à des règles de concaténation $a+b \rightarrow ab$ ou de duplication $a^2 \rightarrow 2a$; peu de raisons d'être sont données aux objets de l'algèbre. Le groupe C se subdivise en deux sous groupes C- et C+ :

C- : peu ou usage inadapté de l'outil symbolique et mobilisation majoritaire de démarches arithmétiques ;

C+ : faible mobilisation de l'outil symbolique conduisant à l'usage de règles de conversion abréviatives.

Dans l'exemple présenté en figure 12, les bilans cognitifs des élèves de la classe se répartissent selon deux groupes.

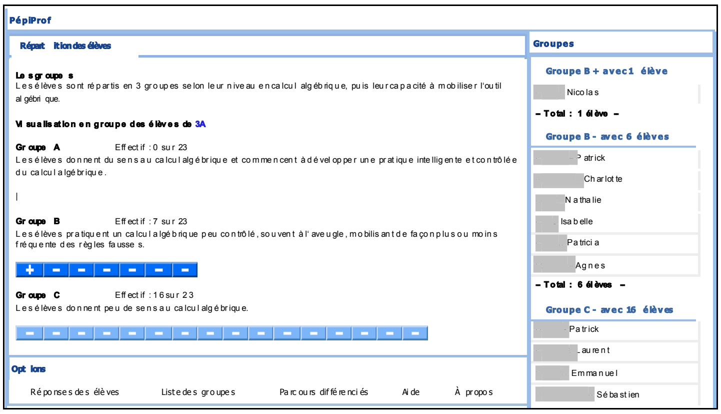
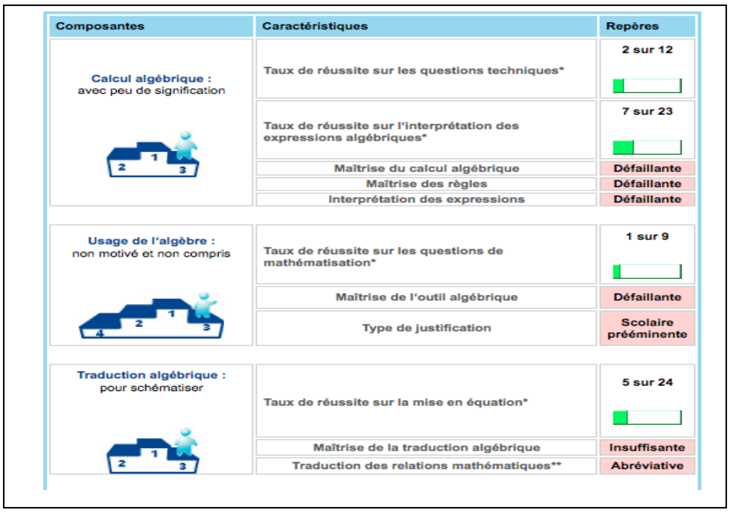


Figure 12 : Bilan de la classe

La liste des élèves de chaque groupe est affichée à droite. En cliquant sur le nom d'un élève, l'enseignant a accès à son bilan (figure 13) cognitif présenté en trois parties : le niveau sur chaque composante du stéréotype (cf. § 4.4.2), les caractéristiques personnelles, des repères quantitatifs quant à la réussite de chaque genre de tâches. Cette présentation est le résultat d'une négociation avec les enseignants du groupe IREM : le langage utilisé pour présenter le diagnostic de l'élève est simplifié et adapté aux pratiques des enseignants.



Composantes	Caractéristiques	Repères
Calcul algébrique : avec peu de signification	Taux de réussite sur les questions techniques*	2 sur 12
	Taux de réussite sur l'interprétation des expressions algébriques*	7 sur 23
	Maîtrise du calcul algébrique	Défaillante
	Maîtrise des règles	Défaillante
	Interprétation des expressions	Défaillante
Usage de l'algèbre : non motivé et non compris	Taux de réussite sur les questions de mathématisation*	1 sur 9
	Maîtrise de l'outil algébrique	Défaillante
	Type de justification	Scolaire prééminente
Traduction algébrique : pour schématiser	Taux de réussite sur la mise en équation*	5 sur 24
	Maîtrise de la traduction algébrique	Insuffisante
	Traduction des relations mathématiques**	Abréviative

Figure 13 : Bilan cognitif d'un élève

Modélisation des Parcours d'Enseignement Différencié (PED) (Pilet, 2012)

Un des enjeux du projet *PépiMep* a été de concevoir des ressources de régulation pour l'apprentissage de l'algèbre, en fin de scolarité obligatoire, afin d'outiller les enseignants à gérer l'hétérogénéité des connaissances et compétences algébriques des élèves.

Modélisation didactique

Pilet a défini un modèle didactique de parcours d'enseignement différencié visant une avancée collective du temps didactique pour le groupe classe. Pour un objectif d'enseignement commun à la classe, il s'agit de caractériser une question génératrice visant à travailler les principales propriétés de notions algébriques, ici les expressions algébriques[30] et de proposer :

- des tâches différenciées qui relèvent de cet objectif d'enseignement commun et sont adaptées aux besoins d'apprentissage des élèves repérés au préalable par un diagnostic dans un domaine donné,
- une gestion didactique visant à organiser un contrat didactique adapté aux objectifs visés et une institutionnalisation des savoirs en jeu.

Ce modèle didactique s'appuie sur l'identification préalable de questions génératrices qui fondent les objectifs à travailler dans les Parcours d'Enseignement Différencié (PED) en croisant les besoins d'apprentissage ignorés par l'institution et les besoins d'apprentissage repérés par le diagnostic (Pilet, 2012).

Pour compléter la réponse à la question (Q5.3), Pilet a spécifié un modèle didactique d'exercices de PED. Une tâche est caractérisée par :

- la composante (UA, TA, CA) travaillée,
- le type de tâche mis en jeu,
- le genre de tâche (mise en relation avec les capacités dans les programmes),
- l'objet de d'algèbre,
- la nature et la complexité des expressions en jeu (en lien avec le groupe A, B ou C auquel l'élève est affecté),

[30] Des exemples de questions génétraices relatives aux expressions algébriques (Pilet 2012) :
Deux programmes de calculs sont-ils équivalents ? Comment le prouver ?
Comment conduire et contrôler le s transformations dans le calcul algébrique ?

- les cadres d'entrée et de sortie en jeu (numérique, algébrique, langage naturel, géométrique, grandeurs, graphique, fonctionnel),
- la nature de la tâche (t-convoqué ou r-convoqué) (Castela, 2008).

Nous illustrons ce modèle à partir d'un exemple développé par Pilet (2012). Une des questions génératrices identifiée par Pilet concerne l'équivalence de programmes de calcul qui conduit à l'étude de l'équivalence des expressions algébriques. Pour cet objectif d'apprentissage, l'enseignant propose des tâches aux élèves des groupes A, B et C. Ces tâches diffèrent par le choix des variables didactiques : nature des programmes de calcul et des expressions algébriques résultats, forme des énoncés qui conduit soit à une tâche guidée (travailler la dialectique entre le numérique et l'algébrique), soit à une tâche dont la résolution revient à la charge de l'élève. Des aides sont prévues pour chaque parcours. Voici un exemple en classe de troisième :

L'enseignant peut cliquer sur le bouton « parcours différenciés » (figure 12) pour définir les exercices d'une séance de parcours d'enseignement différencié selon le moment de la séquence (première rencontre, introduction, entraînement, réinvestissement) et les objectifs d'apprentissage visés.

Modélisation informatique

Le quatrième cycle de recherche a permis d'automatiser la génération des parcours d'enseignement différencié dans la plateforme *LaboMep*. Quelle formalisation du modèle informatique faut-il envisager pour caractériser les parcours d'enseignement différencié, les exercices et le choix des variables didactiques ? L'équipe informatique du LIP6[31] a défini une ontologie du calcul algébrique (Delozanne & al, 2012) en adaptant des démarches développées dans le cadre du projet européen Geoskills[32] et du projet allemand ActiveMath[33]. Une collaboration entre les didacticiennes[34] et les informaticiennes a permis une indexation des exercices des parcours fondée sur une ontologie du domaine algébrique.

Groupe C

Les trois programmes de calcul suivants sont-ils égaux ?

Programme 1	Programme 2	Programme 3
- Choisir un nombre. - Multiplier ce nombre par 4. - Ajouter 3 au produit.	- Choisir un nombre.-Multiplier ce nombre par 7.	- Choisir un nombre. - Multiplier ce nombre par 4. - Ajouter au produit le triple du nombre de départ.

1. Choisis trois nombres et teste chaque programme avec chacun des nombres. Tu peux utiliser une calculatrice.
2. Quels programmes semblent égaux ?
3. Ecris une expression algébrique pour chaque programme.
4. Avec ces trois expressions, écris une égalité

Groupe B

Les trois programmes de calcul suivants sont-ils égaux ?

Programme 1	Programme 2	Programme 3
- Choisir un nombre. - Multiplier ce nombre par 2. - Elever le résultat au carré.	- Choisir un nombre. - Elever ce nombre au carré. - Multiplier par 2.	- Choisir un nombre. - Multiplier ce nombre par 4. - Multiplier le résultat par le nombre choisi au départ.

1. Choisis trois nombres et teste chaque programme avec chacun des nombres. Tu peux utiliser une calculatrice.
2. Quels programmes semblent égaux ?
3. Ecris une expression algébrique pour chaque programme.
4. Démontrer quels sont les programmes égaux ?

31 E. Delozanne, D. Prévit et N. El-Kechaï.

32 Geoskills : http://i2geo.net/comped/mainMenu.html

33 ActiveMath, développé par Melis (2008, 2010) est un environnement d'apprentissage adaptatif pour les mathématiques, appuyé sur une ontologie générale

34 F. Chenevotot, B. Grugeon-Allys, J. Pilet.

toujours vraie. Justifie.
5. Utilise cette égalité pour vérifier ta réponse à la question 2. et démontrer quels sont les programmes égaux ?

Figure 14 : Exercices différenciés pour les groupes B et C (Pilet, 2012)

L'équipe des informaticiennes a ainsi développé le logiciel *PépiPad* (Parcours d'apprentissage Différencié – figure 15) qui propose à un enseignant ayant fait passer un test diagnostic en algèbre aux élèves de sa classe de troisième ou de seconde, des séances différenciées en fonction des groupes identifiés dans sa classe et de l'objectif d'enseignement visé. Les développeurs de Sésamaths, en particulier A. Rommens, ont permis l'intégration du logiciel sur *LaboMep*.

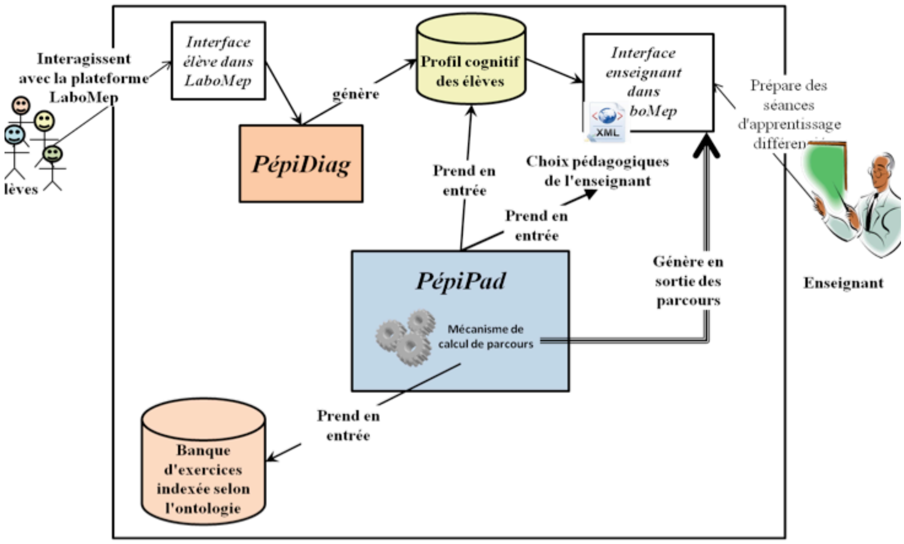


Figure 15 : Le logiciel PépiPad

Expérimentations

Pour tester les modélisations et les logiciels développés dans *LaboMep* lors du quatrième cycle de recherche, nous avons réalisé des expérimentations en 2011 et 2012. Celles-ci ont porté sur les élèves de six classes (quatre classes de troisième et deux classes de seconde) ainsi que sur des données recueillies via la plateforme *LaboMep*.

Travail collaboratif au sein d'un groupe IREM

L'expérimentation a pris appui sur le travail collaboratif entre chercheurs des équipes de recherche en informatique et en didactique, enseignants de collège et de lycée et membres de Sésamath. Le groupe IREM « Enseignement différencié de l'algèbre » a été créé à l'université Paris Diderot - Paris 7 en septembre 2010 pour permettre à cinq enseignants et trois chercheurs en didactique de travailler ensemble, à une fréquence d'environ une séance par mois.

Du côté des chercheurs en informatique, cette collaboration a permis d'analyser les interfaces sur *LaboMep* et de faire évoluer la présentation de la répartition des élèves en groupes, des bilans des élèves, de la terminologie utilisée. Ces analyses ont été l'occasion de réinterroger des outils présents dans la première version du logiciel *Pépite* (accès aux réponses des élèves par exercice).

Du côté des chercheurs en didactique, le travail accompli dans le cadre du groupe IREM a permis d'interroger les ressources d'évaluation et de différenciation d'une ingénierie didactique, d'accompagner des enseignants de collège et de lycée à sélectionner des objectifs d'enseignement peu travaillés au regard des besoins d'apprentissage repérés par le diagnostic et d'intégrer des PED relatifs aux expressions algébriques à leurs séquences habituelles d'enseignement sur le calcul algébrique. Deux doctorantes ont participé à ce groupe IREM. Pilet (Pilet, 2012) a étudié l'évolution de l'activité algébrique et des raisonnements des élèves, en lien avec les usages des ressources de régulation par chaque enseignant. Bedja a commencé l'étude des usages par les enseignants des ressources de diagnostic et de différenciation mises à disposition sur la plateforme en ligne.

Méthodologie

Dans le cadre du groupe IREM, les enseignants et les chercheurs en didactique ont travaillé autour de plusieurs questions :

- l'interprétation et la catégorisation d'erreurs en algèbre, en lien avec la méthodologie de constitution des groupes,
- le choix de séances différenciées à intégrer en cohérence avec des séquences « habituelles » dans le but de travailler des aspects implicites de l'activité algébrique (la dialectique numérique / algébrique, le rôle de l'équivalence des expressions dans le contrôle d'un calcul algébrique),
- la forme des énoncés pour les différents groupes d'élèves dans la classe,
- la gestion didactique à mettre en place, en particulier pendant les phases de travail de groupe, de mises en commun et d'institutionnalisation.

Le travail au sein du groupe IREM a permis d'organiser l'observation des séances différenciées dans la classe des enseignants et le recueil des données (productions d'élèves et vidéos). Nous avons développé plusieurs types de situations de formation à l'IREM : analyse de productions d'élèves, de l'activité et des raisonnements des élèves en algèbre, analyse de vidéos autour de la gestion des phases de mise en commun et d'institutionnalisation avec un focus sur les techniques et technologies développées au sein des interactions dans les classes.

Résultats du quatrième cycle de recherche

Ce quatrième cycle de recherche a permis d'étudier les conditions pour assurer la viabilité du transfert du diagnostic sur la plateforme *LaboMep* largement utilisée par les enseignants de mathématiques de collège. Il a aussi permis de mettre à l'épreuve la robustesse du diagnostic (Q5.1). L'usage des ressources de diagnostic sur *LaboMep* a favorisé la dissémination des résultats de recherche auprès des enseignants : 106 séances de tests diagnostiques ont été créées entre septembre et novembre 2012, plus de 1500 élèves ont effectué le test et 62 séances différenciées ont été menées sur *LaboMep*.

L'analyse comparée des stéréotypes des élèves des classes engagées dans l'expérimentation, en début et en fin d'année scolaire (grâce à l'implémentation de plusieurs versions du test sur LaboMep), a mis en évidence une évolution des praxéologies apprises des élèves, pour 30% sur la composante « Calcul Algébrique » (Pilet, 2012). Mais ces résultats sont à confirmer sur des études à plus grande échelle (Q5.2).

Le travail collaboratif au sein du groupe IREM a permis de faire évoluer les interfaces, en particulier à travers la présentation des groupes et le discours utilisé, plus adapté aux besoins des enseignants. Les enseignants du groupe IREM ont éprouvé l'intégration de séances différenciées au sein de leurs séquences habituelles d'enseignement en algèbre pendant deux ans. Ils ont modifié de façon mineure l'usage des parcours d'enseignement différencié au niveau de la sélection des objectifs d'apprentissage mais ont fait évoluer la gestion des mises en commun et d'institutionnalisation (Q5.3). Ces évolutions sont à mettre en relation avec l'analyse des préparations et des épisodes de vidéos des séances différenciées lors du groupe IREM. Au delà de l'intérêt éprouvé par les enseignants pour le dispositif de différenciation proposé, appuyé sur un diagnostic et une avancée du temps didactique au niveau du collectif de la classe, les enseignants réalisent peu de synthèses sur les objectifs d'apprentissage travaillés et décontextualisent peu les savoirs travaillés dans des exercices d'entraînement ou de réinvestissement.

Les bilans des enseignants du groupe IREM insistent sur les apports des parcours d'enseignement différencié mais aussi sur les différences avec leurs pratiques habituelles d'évaluation et de différenciation. Ils mettent en évidence la nécessité de créer des ressources complémentaires (séquences et conditions de mise en oeuvre) sur la plateforme *LaboMep* pour accompagner les enseignants dans la mise en œuvre des parcours d'enseignement différencié.

Résultats et perspectives

Nous présentons les principaux résultats obtenus au cours des différents projets.

Résultats en EIAH

Depuis une vingtaine d'années, les projets de recherche pluridisciplinaire en EIAH *Pépite*, *Lingot* et *PépiMep* témoignent de l'opérationnalité et de la richesse d'une démarche itérative et participative qui commence à disséminer des ressources de diagnostic et de différenciation à grande échelle via la plateforme *LaboMep* de Sésamath.

Cet article présente l'évolution des modélisations didactiques et informatiques au cours de quatre cycles de recherche dans le cadre d'une démarche itérative de conception en EIAH nourrie par des expérimentations en classe. La démarche de recherche itérative et participative a favorisé le jeu dialectique entre les modélisations didactiques et informatiques, le développement de prototypes, l'organisation de l'analyse des données recueillies en laboratoire puis en situation de classes réelles pour réinterroger les modélisations didactiques conçues au cours des différents cycles. Le développement des prototypes de diagnostic et de parcours d'enseignement différencié, puis leur transfert dans *LaboMep*, ont permis de valider les modèles développés.

Résultats en didactique

Cette recherche renouvelle les questions étudiées et mobilise de nouveaux concepts et outils théoriques développés au cours des années 2000. L'équipe des chercheurs en didactique a fait évoluer la prise en compte des approches cognitive et anthropologique pour étudier des questions d'évaluation et de différenciation. Pilet (2012) a ainsi construit une nouvelle praxéologie épistémologique de référence des expressions algébriques pour mettre en relation les écarts entre praxéologies à enseigner, praxéologies enseignées et praxéologies apprises. Cette recherche a étendu le domaine des usages classiques de la TAD à travers la prise en compte du cognitif et l'étude de la différenciation de l'enseignement appuyée sur les besoins d'apprentissage repérés par un diagnostic. Cette extension a permis de modéliser des groupes d'élèves et des parcours d'enseignement différencié.

Perspectives

Cette recherche montre l'intérêt d'une démarche itérative et participative que nous allons maintenant élargir à la modélisation de parcours d'enseignement différencié au-delà des expressions algébriques et dans d'autres domaines mathématiques. D'autres objectifs seront poursuivis :

- la conception d'ontologies de domaines plus larges,
- la conception de ressources interactives pour peupler les parcours d'enseignement différencié,
- l'analyse quantitative à grande échelle de l'évolution des praxéologies apprises des élèves suite à l'utilisation des parcours d'enseignement différencié à partir de l'analyse des traces recueillies sur *LaboMep*.

Cette recherche témoigne de la richesse d'une démarche collaborative dans le contexte d'un groupe IREM. La confrontation entre des ingénieries didactiques et des séquences dans des classes « ordinaires » amène à réinterroger les processus de conception de ressources, l'accompagnement des enseignants dans les usages de ces ressources pour favoriser l'évolution des pratiques enseignantes concernant l'évaluation et la différenciation. Nous pensons, en particulier, aux questions relatives aux processus de dévolution, de décontextualisation et d'institutionnalisation.

Mais cette recherche montre aussi les limites d'un tel dispositif, non inscrit dans un contexte institutionnel, pour favoriser la diffusion de nouvelles pratiques d'évaluation et de régulation. Le projet ANR « Néopraéval », retenu suite à l'appel à projet de l'ANR « Apprentissages », sera l'occasion de poursuivre ces pistes de recherche de 2014 à 2016.

Bibliographie

Bosch M. (2012). Doing research within the anthropological theory of the didactic : the case of school algebra. In *Proceedings du 12ème International Congress on Mathematical Education*, du 8 au 15 juillet 2012, COEX, Séoul, Korea.

Bosch M., Gascon J. (2005) La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier A., Margolinas C. (Eds), Balises pour la didactique : cours de la 12ème école d'été de didactique des mathématiques. Grenoble : La pensée sauvage.

Bosch M., Fonseca C., Gascon J. (2004) Incompletitud de las organizaciones matematicas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 24(2/3) 205–250.

Castela C. (2008) Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'apprentissage. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 28(2) 135–182.

Chevallard Y. (2002) Structures & fonctions. In Dorier J.-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (Eds.) *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques* (pp.3–32). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2) 221–265.

Chevallard Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Seconde partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x (19)*, 43-72.

Chevallard Y. (1985) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. L'évolution didactique. *Petit x (5)*, 51-94.

Chenevotot-Quentin F., Grugeon B., Delozanne E. (2011) Vers un diagnostic cognitif dynamique en algèbre élémentaire. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF2009, Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation* (pp.827–842). Dakar.

Chenevotot-Quentin F., Grugeon B, Delozanne B. (2009) Diagnostic cognitif en algèbre élémentaire à différents niveaux de la scolarité. In Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.-J. (Eds.) *Actes du colloque DIDIREM. Approches plurielles en didactique des mathématiques - Apprendre à faire des mathématiques du primaire au supérieur : Quoi de neuf ?* (pp. 141-149). Paris : Université Paris Diderot - Paris 7 - L.D.A.R.

Darwesh A. (2010) Diagnostic cognitif en EIAH : le système PépiMep. *Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie – Paris 6.*

Delozanne E., Prévit D., Grugeon-Allys B., Chenevotot-Quentin F. (2010) Vers un modèle de diagnostic de compétence. *Revue Techniques et Sciences Informatiques* 29(8/9) 899−938.

Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2) 5–32.

Gascon J. (1994) Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». Petit x, 37, 43-63.

E-Kechaï N., Delozanne É, Prévit D., Grugeon B., Chenevotot F., (2011), Evaluating the performance of a Diagnosis System in School Algebra, in H. Leung et al. (Eds), ICWL 2011, LNCS 7048, Springer 263-272.

Grugeon-Allys B., Pilet J., Chenevotot-Quentin F., Delozanne E. (2012) Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. In Coulange L., Drouhard J.-P., Dorier J.-L., Robert A. (Eds.) *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire : bilan et perspectives* (137-162). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Grugeon-Allys B. (2008) Quelques apports de l'analyse multidimensionnelle : activités des élèves et pratiques des professeurs de mathématiques ; Vers une modélisation. *Habilitation à diriger des recherches, Université Paris–Diderot.*

Grugeon B., Coulange L., Larue V. (2003) Familles de situations d'interactions en algèbre élémentaire : deux exemples. In IUFM de Reims (Eds) *Colloque ITEM juin 2003*. http://www.reims.iufm.fr/Recherche/ereca/itemcom

Grugeon B. (1997) Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 17(2) 167–210.

Grugeon B. (1995) Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G. *Thèse de l'Université Paris 7*.

Jean (2000) Pépite : un système d'assistance au diagnostic de compétence. *Thèse de l'Université du Maine.*

Ketterlin-Geller, Leanne R., Yovanoff P. (2009) Diagnostic Assessments in Mathematics to support Instructional Decision Making. *Practical Assessment, research and Education* 14(16).

Kieran C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels : Building meaning for symbols and their manipulation. In Frank K. Lester (Eds.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.707–762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Lenfant A. (1997) Etude sur la transposition d'un outil de recherche destiné aux enseignants. *Mémoire de DEA de didactique des mathématiques de l'Université de Paris 7.*

Mackay W.E. et Fayard A.-L. (1997) HCI, Natural Science and Design: A framework for Triangulation Across Disciplines. *In Designing Interactive Systems, ACM* (pp. 223-234). Amsterdam.

Pilet J. (2012) Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation. *Thèse de l'Université Paris Diderot-Paris 7.*

Prévit D. (2008) Génération d'exercices et analyse multicritère automatique de réponses ouvertes. *Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie – Paris 6*.

Rogalski J. (2005) Rapport d'activité sur l'axe instrumentation de l'activité des enseignants. Projet de recherche « Modélisation et mise en œuvre d'environnements informatiques pour la régulation de l'apprentissage, le cas de l'algèbre avec le projet LINGOT ». *Projet Cognitique 2002, Programme « Ecole et sciences cognitives : les apprentissages et leurs dysfonctionnements » du MRT, Rapport de fin de projet*, 91-107, mars 2005.

Ruiz-Munzon N. (2010) La introduccion del algebra elemental y su desarollo hacia la modelizacion funcional. *Thèse de l'Université Autonome de Barcelone*.

Tricot A., Plégat-Soutjis F. (2003) Compositions graphiques et parcours des pages écrans. Essai de lecture sémiotique. *Actes du 8ème Congrès International d'AIS/IASS*. Lyon.

Vergnaud G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10(2/3) 133–170.

Vincent C., Delozanne E., Grugeon B., Gelis J.-M., Rogalski J., Coulange l. (2005) Des erreurs aux stéréotypes : des modèles cognitifs de différents niveaux dans le projet Pépite. Actes de la Conférence Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain (EIAH2005) (pp.297-308). Montpellier.

Annexe

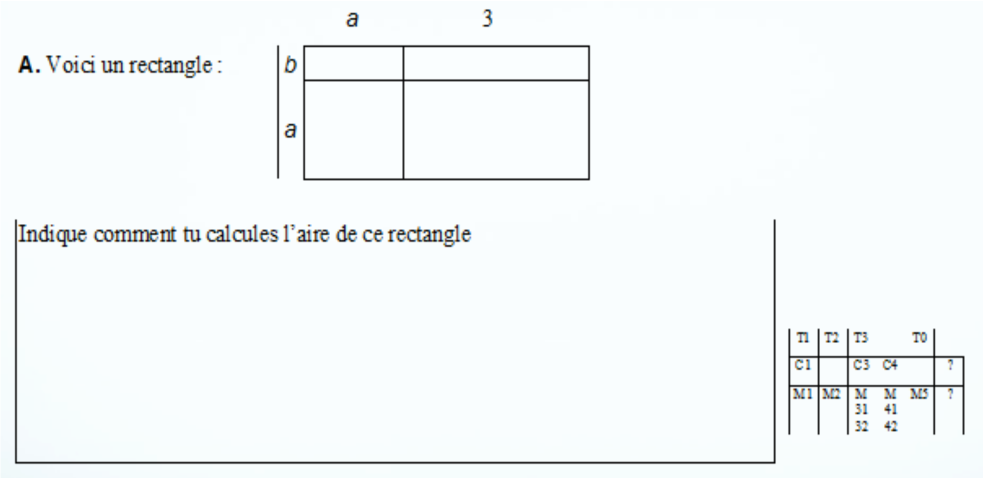


Figure 1 : La tâche 3 du diagnostic P/C

	Analyse	Codage
Solution correcte	Deux démarches sont attendues : 1) les côtés du rectangle ont pour longueurs respectives $a + 3$ et $a + b$; l'aire du rectangle est égale à $(a + 3)(a + b)$	**T1** C1
	2) le rectangle est la réunion de rectangles disjoints : l'aire du rectangle est égale à la somme des aires, soit $ab + 3b + a^2 + 3a$, soit $(a + 3) \times b + (a + 3) \times a$, soit $(a + b) \times a + (a + b) \times 3$, soit ...	**T2** C1
	Si un calcul algébrique correct est réalisé (développement ou factorisation selon les cas) pour obtenir une autre forme de l'expression	M1
Solutions incorrectes	Solutions envisageables :	**T3**
	Expression non parenthésée : $a + 3 \times a + b$	C3 M31
	Confusion entre le périmètre et l'aire : $2(a + 3 + a + b)$	C3 M41
	Expression abréviative du type : $3a \times ab$	C4 M42
	Si un calcul algébrique est réalisé (développement ou factorisation selon les cas) pour obtenir une autre forme de l'expression, on retient le type de manipulation formelle mis en jeu (cf. analyse ci-dessous)	C M (cf ci - dessous)
Absence de solution		**T0**

Figure 2 : Codage des réponses de la tâche 3

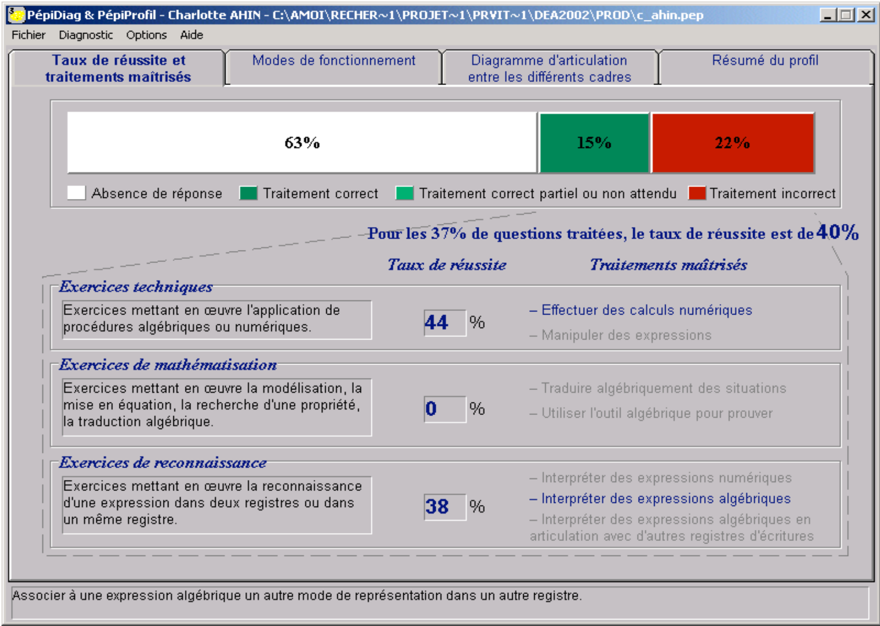


Figure 4 : PépiProfil (1) description quantitative en termes de taux de réussite et de traitements maîtrisés

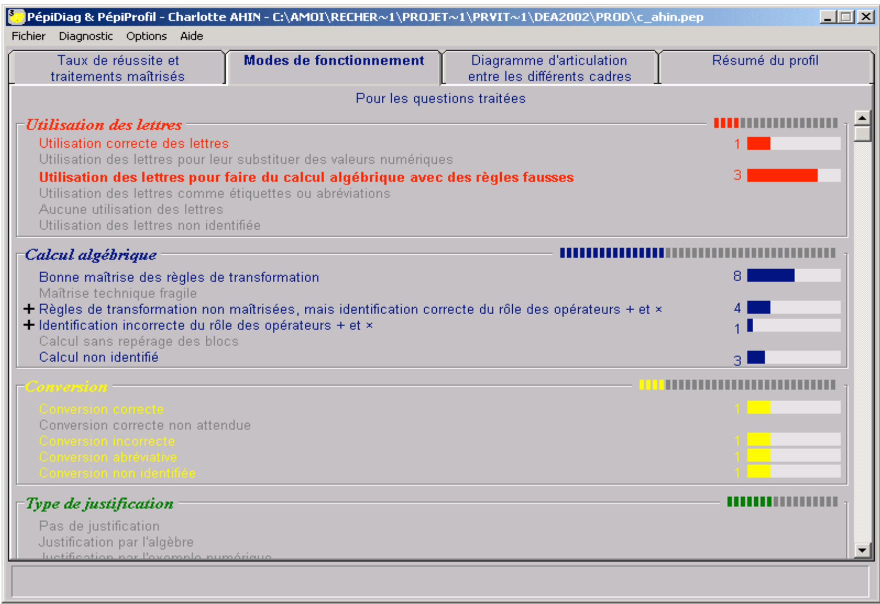


Figure 5 : PépiProfil (2) description quantitative en termes de modes de fonctionnement

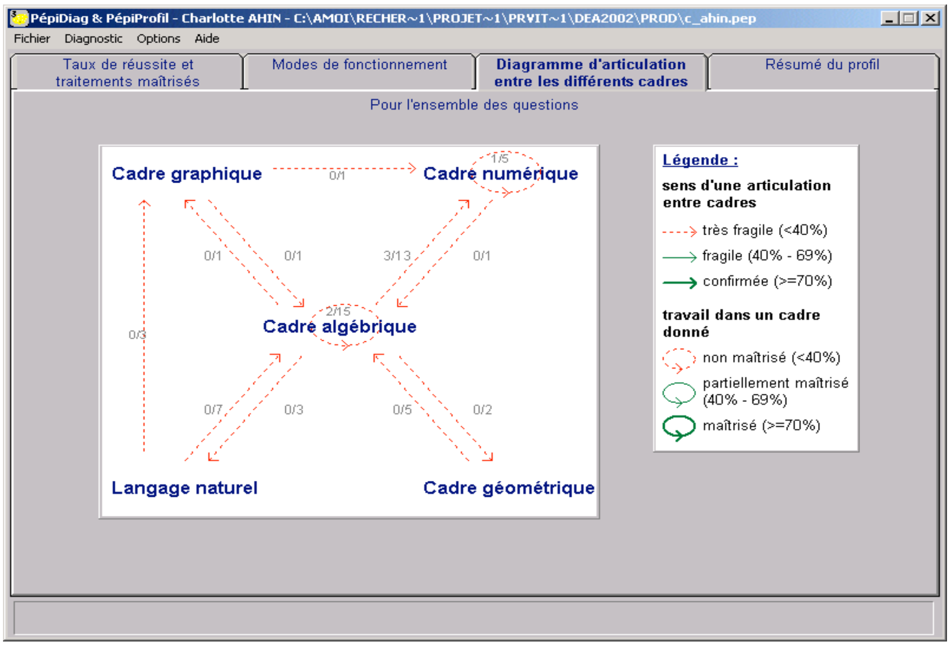


Figure 6 : PépiProfil (3) diagramme d'articulation entre les différents cadres

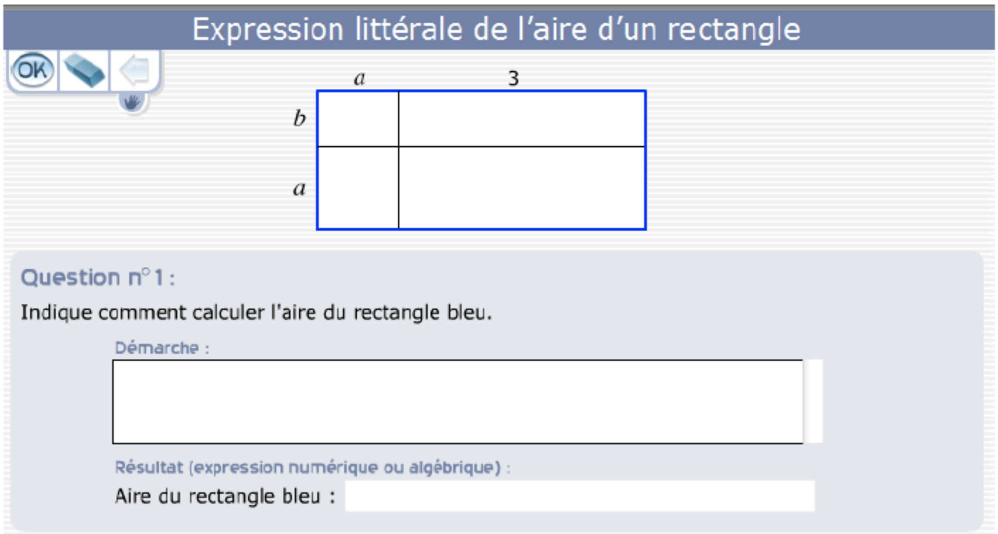


Figure 7 : La tâche « Expression littérale de l'aire d'un rectangle »

	Analyse	Codage
Solution correcte	Deux démarches sont attendues : 1) les côtés du rectangle ont pour longueurs respectives $a + 3$ et $a + b$; l'aire du rectangle est égale à $(a + 3)(a + b)$ 2) le rectangle est la réunion de rectangles disjoints : l'aire du rectangle est égale à la somme des aires, soit $ab + 3b + a^2 + 3a$, soit $(a + 3) \text{ x } b + (a + 3) \text{ x } a$, soit $(a + b) \text{ x } a + (a + b) \text{ x } 3$, soit … Si un calcul algébrique correct est réalisé (développement ou factorisation selon les cas) pour obtenir une autre forme de l'expression	V1 T1 V2 T1 EA1
Solutions incorrectes	Solutions envisageables : Expression non parenthésée : $a + 3 \text{ x } a + b$ Confusion entre le périmètre et l'aire : $2(a + 3 + a + b)$ Expression abréviative du type : $3a \text{ x } ab$ Si un calcul algébrique est réalisé (développement ou factorisation selon les cas) pour obtenir une autre forme de l'expression, on retient le type de manipulation formelle mis en jeu (cf. analyse ci-dessous)	V3 T3 EA31 T3 EA41 T4 EA42 T4 EA (cf ci - dessous)
Absence de solution		V0

Figure 8 : Codage des réponses pour la tâche 3

<table>
<tr><th colspan="4">Caractérisation didactique</th></tr>
<tr><td>Objectifs</td><td colspan="3">Rechercher si un élève sait associer une expression algébrique à un domaine plan qui a pour aire cette expression</td></tr>
<tr><td>Composante</td><td colspan="3">Traduire algébriquement dans différentes représentations (algébrique, arithmétique et langage naturel)</td></tr>
<tr><td>Capacité</td><td colspan="3">Traduire une expression algébrique comme une aire d'une surface</td></tr>
<tr><td>Type de tâche</td><td colspan="3">- Calculer l'aire d'un domaine plan
- Associer une expression algébrique à l'aire d'un domaine plan</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Critères de validation</td><td colspan="3">V1, V2, V3 : critères d'évaluation de la dimension « Validité »</td></tr>
<tr><td>V1 : correct</td><td>V2 : correct partiel ou non attendu</td><td>V3 : incorrect</td></tr>
<tr><td colspan="3">EA1, EA31, EA33, EA41, EA42 : critères d'évaluation de la dimension « Utilisation des règles d'Écriture et de réécriture Algébrique »</td></tr>
<tr><td colspan="3">EA1 : Utilisation correcte des règles de transformation
EA31 : Utilisation inadaptée des parenthèses qui conduit à un résultat correct
EA33 : Utilisation de règles de transformation fausses identifiées
EA41 : Les règles de transformation utilisées linéarisent les expressions :
EA42 : Les règles de transformation utilisées « assemblent » les termes</td></tr>
<tr><td colspan="3">T1, T3, T4 : critères d'évaluation de la dimension « Traduction »</td></tr>
<tr><td>T132 : Traduction correcte de la géométrie vers l'algèbre</td><td>T332 : Traduction incorrecte de la géométrie vers l'algèbre</td><td>T432 : Traduction abréviative de la géométrie vers l'algèbre</td></tr>
</table>

Figure 9 : Indexation didactique de la tâche « Expression littérale de l'aire d'un rectangle »

Type	Label	Code	Forme (à une Pépinière-équivalence près)
1	expressions correctes de l'aire sous la forme d'un produit Longueur × Largeur	V1, T132	$(a + 3) \times (b + a)$
2	expression de l'aire obtenue en additionnant les aires des différents rectangles	V2, T132	$ab+a^2+3b+3a$ $(a\times(a+b))+(3\times(a+b))$ $a(a+3)+b(a+3)$
3	Reconnaissance de sous-figures avec erreur de transformation		
3.1	reconnaissance de sous-figures mais erreur de traduction au niveau des parenthèses (e.g. $a+3 \times a+b$)	V3, EA3, T332	$(a+3)\times b+a$ $a+3\times(b+a)$ $a+3\times b+a$
3.2	reconnaissance de sous-figures avec transformation par assemblage	V3, EA42, T332	$(a+3)(ab)$ $(b+a)\times(3a)$ $a+3 \times ab$; $ab\times a+3$ $3a\times a+b$; $a+b\times 3a$
3.3	reconnaissance de sous-figures Avec transformation par linéarisation a^2->2a (e.g. $ab+a^2+3b+3a$ ->ab+2a+3b+3a)	V3, EA41, T332	$5a+ab+3b$ $ab+2a+3b+3a$
4	confusion entre aire et périmètre	V3, T432	$(a+b)+(a+3)$; $(a+b+a+3)\times 2$
	4.1 transformation avec assemblage	V3, EA42, T432	$6a + 4b$; a^2+3b $ab+3a$; $ab+4a$ $a(3+b)$;$2a+3b$;$2ab+3$
5	traduction par assemblage des désignations de la figure	V3, EA42, T432	$a^2 b + 3 ab$; $3a^2b$; $3a^2+3b$ $3a^2+3ab$
			$a^2+ 4 ab$; a^2+3ab $3ab$; $3+a^2+b$ $3+a^2b$; $a^2+ 7 ab$
6	traduction de l'aire avec confusion entre les opérateurs + et × (e.g. $3a \times 3b \times a2 \times ba$)	V3, EA4, T432	$3a \times 3b \times a^2 \times ba$ $ab+a^2\times 3b+3a$ $(a^2+3a)x(ba+3b)$ $ba\times b\times 3+a^2+a\times 3$
7	Erreur de formules		
	7.1 Formule partielle	V3 T332	$a(b+a)$; $3a+3b$; $b(a+ 3)$; $ba+3b$ $3(b+a)$; $ab+a^2$; $a(a+3)$; a^2+3a
	7.2 avec division, cube	V3 T432	$(a^2 3b):2$; $3b^2 + a^3 + 3a$ $(b + a)/(a + 3)$ $a+3\times b+a/2$
8	Valeur numérique	V3 L5 T432	(pas de lettres)
9	Ininterprétée	Vx	

Figure 10 : Codage des réponses de la classe de tâches « expression littérale de l'aire d'un rectangle »