

NICOLAS GIROUD

ETUDE DE LA DEMARCHE EXPERIMENTALE DANS LES SITUATIONS DE RECHERCHE POUR LA
CLASSE

nico.grd@gmail.com

Maths à Modeler

Résumé.

Cet article porte sur une partie du travail de thèse que nous avons effectué sur la démarche de recherche en mathématique et plus particulièrement sur le rôle de l'expérimental. La problématique est centrée sur la transmission aux élèves du savoir-faire « démarche expérimentale en mathématiques » et sur le rôle que celui-ci joue dans la résolution de problèmes de recherche. Nous présentons des conditions épistémologiques et didactiques favorisant la mise en pratique de la « démarche expérimentale ». Nous présentons aussi les résultats d'expérimentations que nous avons menées. Ce travail a été mené en utilisant le modèle de situation de recherche pour la classe (Grenier et Payan, 2002 ; Godot, 2005) ainsi que des éléments de la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998).

Introduction

Cet article porte sur la recherche que nous avons menée sur la démarche expérimentale en mathématiques, qui a été l'objet d'une thèse (Giroud, 2011). Ce travail s'inscrit dans les projets de l'équipe de recherche Maths à Modeler. En particulier dans celui portant sur les situations de recherche en classe (Grenier et Payan, 2002 ; Ouvrier-Buffer, 2003 ; Godot, 2005 ; Cartier 2008 ; Modeste 2012). Cette étude est centrée sur l'aspect expérimental de la démarche de recherche en mathématiques.

Un des postulats fondateur de notre recherche est que savoir faire des mathématiques, c'est savoir résoudre partiellement des problèmes de recherche, la résolution de tels problèmes nécessitant de passer par des phases expérimentales.

Notre problématique porte donc sur la transmission aux élèves du savoir-faire « démarche expérimentale en mathématiques » et sur le rôle que celui-ci joue dans la résolution de problèmes de recherche. Considérant que ce savoir-faire ne peut s'apprendre qu'à travers sa pratique en situation de résolution de problèmes, l'objectif de notre recherche a été la détermination de conditions épistémologiques et didactiques favorisant la mise en pratique de la « démarche expérimentale ». En plus de la construction d'un modèle de situation pour la « démarche expérimentale », nous avons construit, analysé et expérimenté des situations se référant à ce modèle.

Pour mener à bien notre étude, nous avons utilisé le modèle de situation de recherche pour la classe (Grenier et Payan, 2002 ; Godot, 2005), ainsi que des éléments de la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998), en particulier validation a-didactique, contrat

didactique et milieu. Nous avons aussi défini un modèle de « démarche expérimentale en mathématiques » qui a servi de référent à notre recherche.

Après avoir observé que la « démarche expérimentale en mathématiques », telle que nous l'entendons, n'est pas proposée par l'institution scolaire, les expérimentations et les analyses, que nous avons menées, ont montré que, dans une certaine mesure, il est possible de la faire pratiquer à des élèves. De plus, cette pratique a permis aux élèves de progresser dans la résolution grâce à un enrichissement des conceptions qu'ils portaient sur le problème à résoudre. Ces expérimentations nous ont aussi permis d'affiner les situations que nous avons construites.

Dans la section suivante, nous présentons un problème de mathématique qui va nous servir à illustrer notre cadre théorique.

Un problème de mathématique : chercher la frontière

Chercher la frontière est un jeu à 2 joueurs de mathématiques discrètes. Les objets du problème sont des frontières et des territoires. Un territoire est un ensemble de cases connexes (voir figure 1).

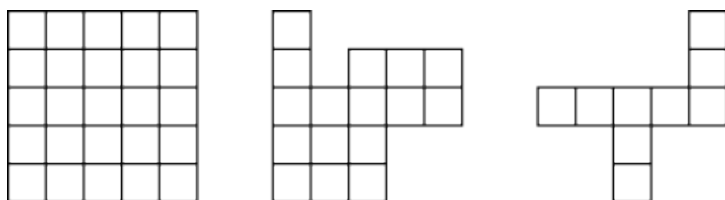


Figure 1. Exemples de territoires

Les frontières sont des segments de cases qui peuvent être horizontaux, verticaux, diagonaux ou vide (voir figure 2).

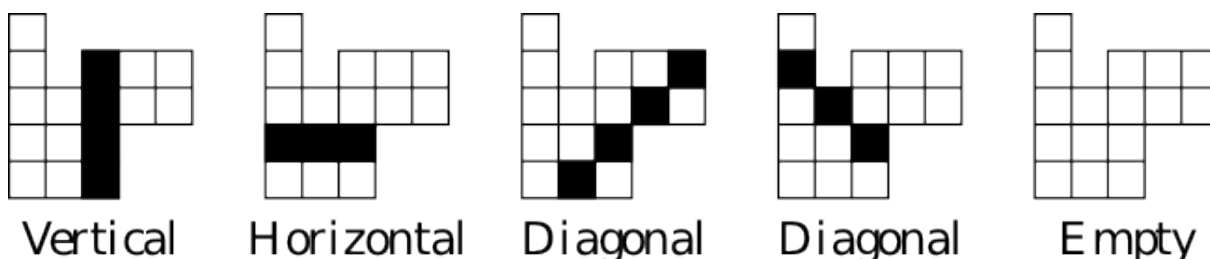


Figure 2. Les différentes frontières

De plus, une frontière sépare un territoire en deux sous-territoires: l'un avec des croix dans chaque case et l'autre avec des cercles (voir figure 3). Dans le cas de la frontière vide, le même symbole est utilisé dans toutes les cases.

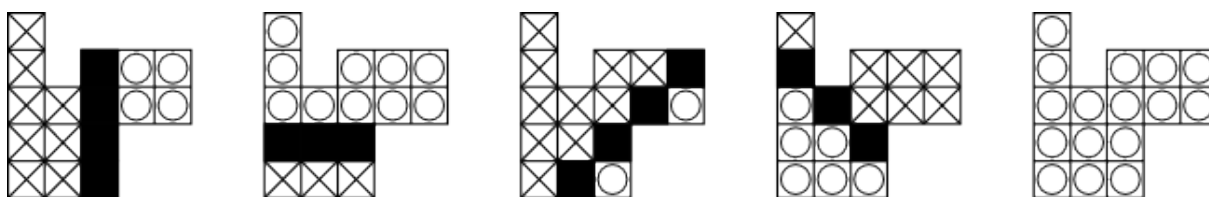


Figure 3. Exemples de séparations d'un territoire par une frontière

Règles du jeu

Etant donné un territoire vierge, l'objectif du joueur 1 est de trouver la frontière qui est cachée par le joueur 2. Les règles sont les suivantes :

- Le joueur 1 peut demander au joueur 2 la couleur de chaque case du territoire.
- L'objectif du joueur 1 est de trouver la frontière en utilisant le moins d'interrogations possibles.
- L'objectif du joueur 2 est de faire réaliser le plus d'interrogations possibles au joueur 1.

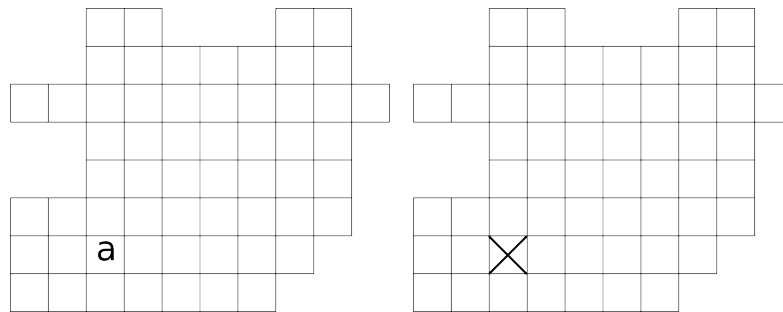


Figure 4. Joueur 1 demande la couleur de la case a, joueur 2 répond croix

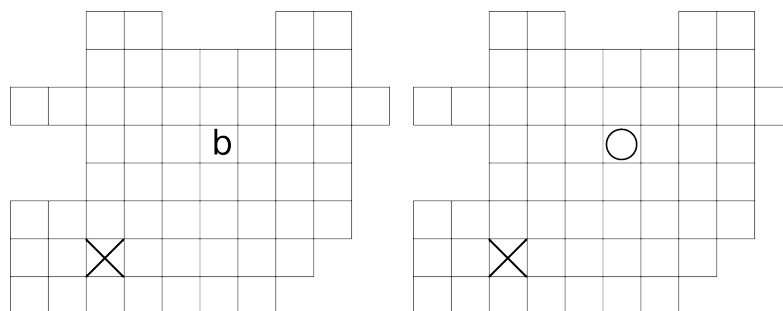


Figure 5. Joueur 1 demande la couleur de la case b, le joueur 2 répond cercle

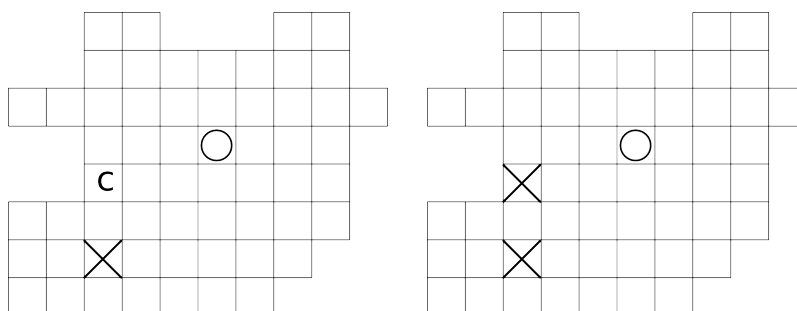


Figure 6. Joueur 1 demande la couleur de la case c, joueur 2 répond croix

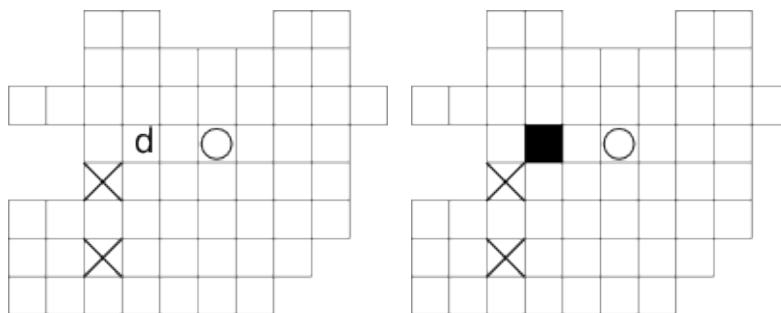


Figure 7. Joueur 1 demande la couleur de la case d, le joueur 2 répond noire

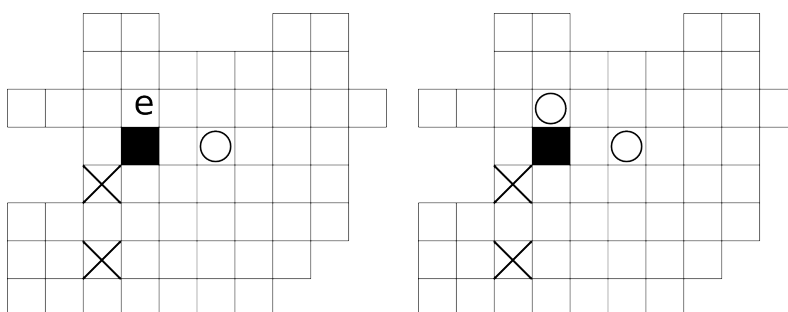


Figure 8. Joueur 1 demande la couleur de la case e, le Joueur 2 répond cercle

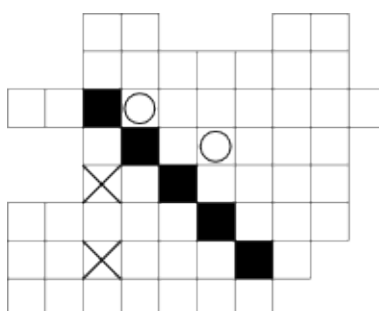


Figure 9. Joueur 1 a trouvé la frontière en 5 interrogations

Les figures de la page précédente représentent un exemple de partie durant laquelle le joueur 1 a trouvé la frontière en 5 interrogations.

Ce problème peut être décomposé en deux sous-problèmes :

- Trouver la frontière en utilisant le nombre minimal d'interrogations ;
- Maximiser le nombre d'interrogations utilisées par le joueur 1.

Dans la sous-section suivante, nous utilisons ce problème pour illustrer ce que nous entendons par démarche expérimentale en mathématiques.

Un modèle de démarche expérimentale

Nous prendrons la définition suivante de démarche expérimentale : *pratiquer la démarche expérimentale en mathématiques* consiste à essayer de résoudre un problème, qui est donc l'objet central de la démarche. Pour ce faire, des actions sont effectuées de façon non

nécessairement ordonnée et à, éventuellement, répéter. Nous distinguons les types d'actions suivants :

- Proposer de nouveaux problèmes ;
- Expérimenter-observer-valider ;
- Tenter de prouver.

Le processus de succession entre les actions s'interprète en termes d'interactions, le résultat d'une action entraînant la réalisation d'une autre action.

Cette définition reprend des éléments de Perrin (2008) et Dias (2009). Nous retrouvons l'articulation entre formulation (proposer un nouveau problème), validation (tenter de prouver et valider) et expérimentation, qui est, selon Dias (2009, p. 25), ce qui « donne du sens » à l'expérimental en mathématiques. Par rapport à Perrin, nous retrouvons le point de départ de la démarche qui doit être un « problème de mathématiques » et le côté itératif de la démarche.

Proposer de nouveaux problèmes

En référence à la théorie de la complexité (Garey et Johnson, 1979), nous utilisons la définition suivante : *un problème de mathématique* est un couple (instance, question). Nous considérons que proposer de nouveaux problèmes consiste à :

- Modifier les instances ;
- Modifier la question ;
- Modifier les instances et la question.

Nous allons illustrer cela à l'aide du problème de *chercher la frontière*. Le joueur 1 peut être confronté au problème suivant : étant donné une coloration de cases, quelles sont les cases dont on peut déduire la couleur ? (voir la figure 9). Ici, nous posons un nouveau problème avec une nouvelle question. Ce problème est lié à la convexité, ce qui peut nous amener à étudier la convexité générée par les frontières.

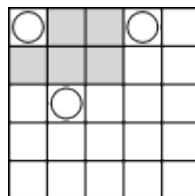


Figure 9. Les cases grises sont nécessairement de la couleur cercle

Le joueur 1 peut aussi essayer de trouver la frontière sur des rectangles d'une dimension donnée. Il spécifie alors le problème. Il peut aussi généraliser le problème en cherchant la frontière sur des territoires en 3 dimensions. Dans chaque cas, il modifie les instances du problème et pose un nouveau problème.

Une fois que le joueur 1 a construit un algorithme pour trouver la frontière, il doit évaluer cet algorithme en déterminant le nombre d'interrogations maximal réalisé par l'algorithme. La question et les instances du problème ont changé, l'objet d'étude est maintenant un algorithme. Ensuite, il est confronté au problème suivant : est ce que X est le plus petit nombre d'interrogations possibles ?

Expérimenter-Observer-Valider

Nous considérons que l'action d'expérimenter consiste à construire ou utiliser une stratégie pour résoudre un problème. Nous différencions utiliser de construire par le fait que lorsque

nous utilisons une stratégie, elle préexiste alors que lorsque nous la construisons, elle est construite au cours de l'action.

Nous définissons une stratégie comme un ensemble ordonné d'opérations sur des objets du problème ou sur leurs représentations (voir figure 10)

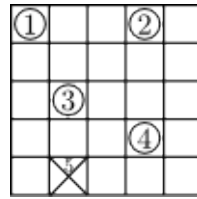


Figure 10. Un exemple de stratégie.

L'action d'expérimenter produit des faits observables, sur la figure 17, c'est un ensemble de cases coloriées qui génère une unique frontière possible. De plus, une observation est effectuée après chaque étape de la stratégie réalisée. De ce fait, l'observation est un élément d'une démarche expérimentale.

Réaliser une expérimentation nécessite aussi d'effectuer des choix, certaines variables doivent être fixées :

- Les variables du problème : par exemple, pour chercher la frontière, il faut choisir la forme du territoire ou ses dimensions. Mais nous pouvons aussi choisir d'expérimenter sur un carré quelconque en utilisant seulement ses propriétés structurales (même longueur des côtés, angles droits...). D'après Perrin (2007), un expert choisit le premier cas non-trivial, il souligne aussi que la trivialité dépend de l'expérimentateur.
- Les variables de la stratégie : par exemple, dans le cas d'une stratégie pour trouver la frontière qui laisse le choix entre plusieurs cases.

L'action de valider intervient au cours de l'action d'expérimenter pour vérifier que les opérations effectuées sont correctes. Par exemple, le joueur 2 doit trouver une stratégie qui donne les couleurs de manière consistante. Nous appelons ce type de validation : *validation de la stratégie*. Cela consiste donc à vérifier que chaque opération est autorisée par les règles du problème et est conforme à la stratégie utilisée. L'identification d'une stratégie générale peut mener à l'étude de son domaine de validité.

De plus, l'action de valider intervient à la fin de l'expérimentation lorsque le résultat de la stratégie apparaît. Par exemple, le joueur 1 doit vérifier que les couleurs des cases engendrent une seule frontière possible. Nous appelons ce type de validation : *validation du produit de la stratégie*. Cela consiste en vérifier que le résultat de la stratégie est conforme à ce que l'on attendait. Cela permet de donner le statut d'exemple ou de contre-exemple au résultat d'une stratégie.

Tentative de preuve

Lorsqu'une conjecture est formulée, nous pouvons essayer de la prouver. Cette étape peut aussi comporter une part d'expérimentale, car cette tentative peut amener à poser de nouveaux problèmes (lemmes) et ainsi mener à la réalisation de nouvelles expérimentations. Par exemple, pour prouver qu'une frontière ne peut pas être trouvée avec X interrogations, nous pouvons essayer de résoudre le problème suivant : combien de questions sont nécessaires pour trouver un type de frontière (horizontale, verticale, diagonale, vide) ? La réponse du nouveau problème est un minorant de la réponse au premier.

Nous allons maintenant voir, les conditions favorables à la pratique d'une démarche expérimentale en mathématique telle que nous l'avons décrite.

Conditions favorables à la pratique de la démarche expérimentale

Nous avons cherché à construire un *milieu a-didactique* permettant de réaliser les trois actions caractéristiques de la démarche expérimentale. Dans cette section, nous présentons les différents éléments du *milieu* que nous avons identifiés.

L'élève doit prendre l'expérimentation à sa charge

Par cela, nous entendons que l'élève doit effectuer des expériences qu'il a construites lui-même afin d'avancer dans la résolution du problème. L'élève doit pouvoir faire ses propres choix expérimentaux. En particulier, l'élève doit prendre à sa charge le problème de la validation du produit de l'expérimentation. Pour réaliser cela, l'enseignant devra donc dévoluer cette responsabilité aux élèves. D'autre part, nous faisons l'hypothèse que fournir du matériel aux élèves va les inciter à effectuer des expériences (utilisant ce matériel) pour avancer dans la résolution du problème.

Les outils matériels contenus dans le milieu doivent être maîtrisés par les élèves.

Nous faisons l'hypothèse que le milieu doit contenir des outils expérimentaux maîtrisés par les élèves. Nous proposons donc d'utiliser les médians suivants :

- Support matériel : plateau en bois ou en carton, jetons...
- Papier et crayon ;
- Outils de construction géométrique ;
- Logiciel informatique simple d'accès ne retranscrivant que les actions des élèves.

Dans le cas où les élèves maîtrisent d'autres outils que ceux mentionnés ci-dessus, ils peuvent, évidemment, être utilisés.

Les instances du problème initial doivent être des objets apparaissant comme non-usuels pour les élèves.

Cette condition est surtout valable, selon nous, lors des premières mises en situation de pratique de la démarche expérimentable¹². Nous préconisons cela en référence aux travaux de Lithner (2000). En effet, il a montré que l'utilisation de problèmes éloignés de ceux que les élèves ont l'habitude de traiter favorise l'utilisation du « raisonnement plausible » que nous considérons comme étant au cœur de la pratique de la démarche expérimentale.

Lithner (2000) identifie deux types de raisonnements : le raisonnement « *PR* », en référence au « Plausible Reasoning » de Polya (1990) et le raisonnement « *EE* », pour « Established Experiences ». Pour Lithner, le raisonnement *PR* est fondé sur les propriétés mathématiques des objets alors que le raisonnement *EE* est fondé sur l'expérience personnelle concernant les objets du problème.

Un exemple de raisonnement *EE*, sur une tâche *T* donné par Lithner est le suivant :

The solutions to all maximisations tasks I have solved have been found where $f'(x)=0$. So *T* is solved by finding where $f'(x)=0$.

Un exemple de raisonnement *PR*, sur la même tâche, est le suivant :

¹² L'objectif de l'apprentissage de la démarche expérimentale étant aussi de pouvoir appliquer ce savoir-faire sur les objets habituellement utilisés en classe.

If one sees the graph of a function as hills and valleys, a maximum is found at the top of a hill. At the top slope is zero, and the slope is described by the derivative. So T is solved by examining the points where $f'(x)=0$.

Même si le raisonnement *EE* n'est pas sans intérêt au cours d'une recherche, le raisonnement *PR* nous semble être au cœur de la démarche expérimentale. Lithner (2000) remarque qu'en situation de résolution d'un problème d'optimisation continu, les élèves, qui n'ont pas réussi à résoudre le problème, ont utilisé le raisonnement *EE* dans la construction de leur stratégie de résolution. Le raisonnement *PR* étant seulement utilisé de manière locale.

De plus, dans un article plus récent, Lithner (2010) montre que lorsque les élèves sont confrontés à des problèmes qui sont proches de ceux rencontrés dans leurs manuels, ils utilisent principalement le raisonnement « Imitative Reasoning » alors que confronté à des tâches qui s'éloignent de celles données par les manuels, ils vont utiliser des raisonnements basés sur le raisonnement plausible et les propriétés mathématiques des objets, créant par la même de nouvelles démarches de résolution.

Cela nous amène ainsi à faire l'hypothèse qu'utiliser, pour les instances, des objets proches de ceux que les élèves ont travaillé ou travaillent va les amener à favoriser l'utilisation de raisonnement *EE* au détriment du raisonnement *PR*, ce qui va être un obstacle à la construction de nouveaux objets mathématiques et à la formulation de nouveaux problèmes.

Nous pourrions aussi nous demander pourquoi ne pas simplement considérer des problèmes avec des instances usuelles et des questions différentes. Nous faisons l'hypothèse que les instances, notamment à travers leurs représentations favorisent l'utilisation du raisonnement *EE*, bien plus que la question. Toutefois, il se peut aussi que si la tâche est identifiée comme étant proche d'une tâche que les élèves ont l'habitude de réaliser (même si les instances sont différentes), cela entraîne les élèves à utiliser du raisonnement *EE*, cela peut par exemple être le cas dans le problème d'optimisation, *chercher la frontière*, que l'on pourrait essayer de résoudre en cherchant à dériver une fonction...

Pour cela, nous préconisons, en début d'apprentissage de la démarche expérimentale, l'utilisation de problèmes issues des mathématiques discrètes, car ils existent de nombreux problèmes faciles d'accès dont les instances ne sont pas usuelles pour les élèves.

Le milieu doit permettre la construction de nouveaux objets mathématiques

Cette caractéristique a pour but de « forcer » les élèves à effectuer un réel travail de modélisation d'objets mathématiques. Le milieu doit donc permettre la construction de tels objets et faire apparaître l'expérimental comme une aide. Nous considérons qu'une construction de nouveaux objets mathématiques est possible à travers l'expérimentation lorsque l'expérimental amène à formuler de nouveaux problèmes dont la résolution peut entraîner la construction de nouveaux objets.

Par exemple, concernant *chercher la frontière*, la recherche d'une frontière sur un segment peut entraîner la construction de l'algorithme dichotomique.

Un grand nombre de propositions doivent être vérifiables expérimentalement sur des cas particuliers.

Selon Bernard (2008), les hypothèses effectuées dans une « méthode expérimentale » doivent être vérifiable expérimentalement. En reprenant cette idée, le problème proposé aux élèves doit pouvoir permettre la formulation de propositions et conjectures vérifiables expérimentalement.

Mais la validation expérimentale doit apparaître comme insuffisante...

Toutefois, afin que la vérification expérimentale ne soit pas un obstacle à la preuve, la situation doit comporter une incertitude suffisamment élevée pour justifier une validation théorique.

Le milieu doit permettre l'étude de cas particuliers.

Les cas particuliers jouent un rôle important dans l'avancée de la recherche, que cela soit pour établir des propriétés sur des objets mathématiques ou pour faire des preuves. Un milieu favorable à la démarche expérimentale produit des objets mathématiques qui peuvent servir d'exemples ou de contre-exemples.

Pour permettre aux élèves d'étudier des cas particuliers, nous proposons d'utiliser des *variables de recherche* (Godot, 2005 ; Grenier et Payan, 2002) portant sur les instances du problème.

Le modèle de SiRC.

Le modèle de situation que nous préconisons pour l'apprentissage de la démarche expérimentale se rapproche de celui des situations de recherche en classe (Grenier et Payan, 2002). Dans une SiRC, les élèves sont en position de chercheur et ont pour tâche de produire des résultats nouveaux pour eux. Tandis que l'enseignant est « dans une double position de chercheur et de gestionnaire de la situation ». Nous reprenons ainsi les caractéristiques du milieu associé à une SiRC et en particulier les points suivants :

- Les apprentissages en jeu sont ceux qui sont constitutifs de l'activité de recherche mathématiques : argumenter, formuler et étudier des conjectures, prouver, modéliser, etc ;
- Pour l'élève, un critère de réussite « provisoire » est l'émission d'une conjecture forte ou la résolution d'un cas particulier ;
- Pour l'enseignant, le critère de réussite est la reconnaissance d'apprentissages liés au triplet (question, conjecture, preuve).

Le rôle des élèves et de l'enseignant

L'enseignant doit créer des conditions qui mettent les élèves dans une position, la plus proche possible, de celle d'un chercheur, il ne doit donc pas apparaître comme ayant toutes les réponses et, s'il connaît des solutions, il ne doit pas les donner.

Nous allons dans la suite de cet article essayer de répondre à la question suivante : les conditions énoncées dans cette section permettent-elles la pratique de la démarche expérimentale ? Et si oui, la pratique de la démarche expérimentale permet-elle aux élèves d'avancer dans la résolution d'un problème ?

Pour répondre à ces questions, nous avons effectué des expérimentations en utilisant le problème *chercher la frontière*. Avant de présenter le résultat de ces expérimentations, nous allons présenter une brève analyse mathématique et didactique de ce problème.

Analyse mathématique et didactique de *chercher la frontière*

Analyse mathématique

Définition de l'optimalité

Dans un premier temps, nous pouvons remarquer que l'optimalité n'est pas définie. Nous considérons une optimalité au pire des cas. Le *nombre d'interrogations utilisées au pire* par

un algorithme de recherche est le nombre d'interrogations maximal utilisé par cet algorithme. Pour un algorithme de défense, le *nombre d'interrogations au pire* que fait faire un algorithme de défense est le nombre d'interrogations minimal utilisé par tout algorithme de recherche jouant contre lui.

Différents modèles

Nous avons identifié différentes modélisations du problème :

- Géométrique : dans ce modèle, ce sont les propriétés géométriques des objets qui sont utilisées pour avancer dans la résolution. Par exemple, une droite est caractérisée par 2 points ou un point et une direction.
- Densité de zone : nous cherchons à interroger les zones qui sont les plus « denses » en nombre de frontières. En particulier, ce type de stratégie entraîne à jouer en priorité au centre du rectangle.
- Points : en tant que chercheur, nous sommes confrontés au problème suivant : quelle est la case à interroger qui va permettre de minimiser le nombre de cases de couleurs inconnues restantes ? En tant que donneur, nous cherchons la couleur qui va maximiser le nombre de cases de couleur inconnue restantes.
- Frontières : il est analogue au modèle point, sauf qu'au lieu de maximiser ou minimiser le nombre de cases de couleur inconnue, nous cherchons à maximiser ou minimiser le nombre de frontières possibles.

La résolution du problème peut passer par l'utilisation de différents modèles, la modélisation la plus efficace pour trouver un algorithme de recherche quasi-optimal est le modèle géométrique. Par contre, il ne permet pas de démontrer ou de savoir si l'algorithme est optimal, pour cela, le modèle le plus intéressant est le modèle « frontière ». Nous allons maintenant présenter, un exemple de démarche expérimentale qui permet de déterminer un algorithme quasi-optimal sur un carré.

Un algorithme de recherche quasi-optimal sur un carré

En jouant, en tant que chercheur, nous pouvons faire l'observation suivante : interroger les cases qui sont au « centre » du carré ne permet pas de trouver les frontières « coins » ou la frontière vide. Cela amène à se confronter au problème suivant : comment jouer contre une frontière vide ou coins ? Pour répondre à ce problème, une stratégie que nous pouvons utiliser est de commencer par interroger les coins du carré. L'utilisation de cette stratégie peut mener à l'observation suivante : les couleurs des coins donnent le type de frontière (voir figure 11). Plus qu'une observation, l'affirmation précédente est un théorème qu'il est facile de démontrer à l'aide d'une preuve par disjonction des cas.

Une fois que ce résultat est connu, nous sommes confronté au problème suivant : comment trouver la frontière sur un segment dont les extrémités sont de couleur différente. Nous pouvons alors chercher à minimiser le nombre de frontières restantes après chaque interrogation. L'utilisation de cette stratégie mène à la construction de l'algorithme dichotomique.

Nous obtenons ainsi l'algorithme coins puis dichotomie :

1. Interroger les 4 coins. Si possible conclure, sinon passer à 2.
2. Faire une dichotomie sur un segment dont les extrémités sont l'une rouge et l'autre bleue.

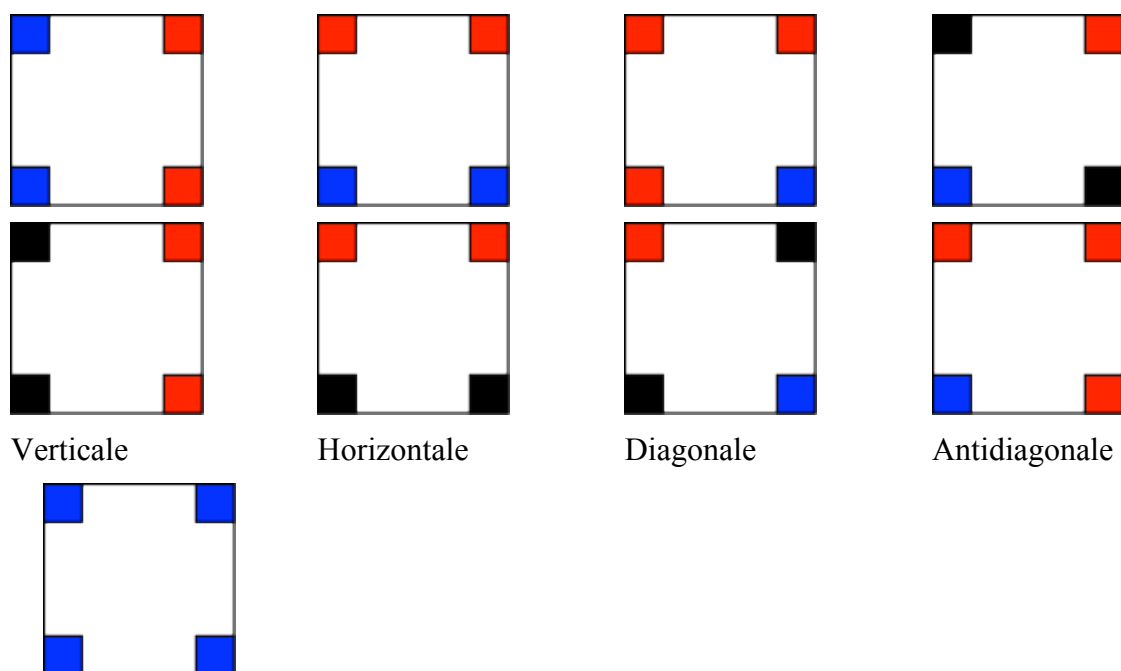


Figure 11. Vide

Il nous reste maintenant à évaluer l'optimalité au pire de cet algorithme. Pour déterminer le nombre d'interrogations au pire utilisé, nous pouvons remarquer que cet algorithme « divise » par 2 le nombre de frontières possibles après la quatrième interrogation. Pour déterminer un minorant « efficace » du nombre d'interrogation optimal, il suffit de remarquer que tout algorithme peut au plus « diviser » par 2 le nombre de frontières possibles après chaque interrogation. Cela donne le théorème suivant : l'algorithme coins puis dichotomie est optimal à 2 interrogations près sur un carré.

Analyse didactique

Une double dévolution

Cette situation entraîne une double dévolution : dévolution du jeu et dévolution du problème mathématiques. Nous faisons l'hypothèse que les connaissances requises pour la compréhension du jeu sont des connaissances que tout élève de niveau primaire ou supérieur possède. La différence entre les deux dévolutions se fait au niveau des critères de réussite :

- Pour le jeu : battre l'adversaire ;
- Pour le problème : déterminer l'optimum et le prouver.

Principaux savoirs notionnels en jeu

Nous avons identifié des savoirs liés à :

- L'optimisation discrète : définition de l'optimalité, minorant, majorant, MinMax, MaxMin...
- L'algorithmique : formulation et écriture d'algorithme, algorithme dichotomique...
- La convexité : enveloppe convexe, demi-plans, points extrêmes...

Exemple de savoirs transversaux en jeu

Voici quelques exemples de savoirs transversaux :

- Modélisation par changement de problèmes : étude du lien entre deux problèmes, par exemple : étudier le lien entre le problème de recherche d'un algorithme minimisant le nombre de frontières restantes à chaque interrogation et le problème du joueur 1 ;
- Formulation de conjectures ;
- Preuves : preuve par exhibition d'un algorithme de recherche (majorant) ou de défense (minorant), preuve par exhaustivité des cas pour des objets de petites dimensions, contre-exemples...
- Définition de nouveaux objets : demi-plans, enveloppe convexe...

Variables de la situation

Les variables de la situation sont la forme et les dimensions des territoires ainsi que le type de frontières que l'on considère. La variable qui apparaît comme la plus pertinente pour être une variable de recherche est celle portant sur la forme et les dimensions. En effet, modifier cette variable permet l'apparition de nouveaux problèmes dont les résolutions peuvent utiliser différents types de preuve.

Conditions favorables à la démarche expérimentale

Ce problème vérifie les conditions favorables à l'apprentissage de la démarche expérimentale :

- La validation expérimentale apparaît comme insuffisante car, les résultats trouvés de manière expérimentale dépendent de la stratégie utilisée par l'autre joueur ;
- Instances non-usuelles ;
- Le problème peut être une SiRC.

Présentation et résultats des expérimentations

Présentation des expérimentations

Nous avons effectué deux expérimentations en classe de seconde. Pour chaque expérimentation, 4 séances d'1h30 ont été réalisées. Les élèves travaillaient par groupe de 2 ou 3. Nous avons fourni des plateaux en bois et des jetons de couleurs avec lesquels les élèves pouvaient « jouer » des parties de *chercher la frontière*.

Synthèse de ce que les élèves ont fait

Au niveau des algorithmes

Les élèves ont construits les algorithmes suivants :

- Algorithme dichotomique ;
- Algorithme coins puis dichotomie ;
- Stratégie de maximisation des frontières possibles ;
- Algorithmes de défenses locaux¹³.

Les élèves ont essentiellement cherché à construire et améliorer des algorithmes de recherche. Mis à part l'algorithme coins puis dichotomie, les élèves n'ont pas construit d'autres algorithmes de recherche, selon nous, cela provient du fait que cet algorithme est très efficace et qu'il est trouvable « rapidement » de manière expérimentale, notamment lorsqu'on expérimente contre une frontière vide ou coins.

¹³ Algorithmes de défense qui ne peuvent jouer que contre un algorithme de recherche.

Les élèves ont construit des algorithmes de défense locaux mais n'ont pas cherché à construire d'algorithmes de défense plus globaux même s'ils utilisaient la stratégie de maximisation des frontières possibles lorsque le nombre de frontières possibles leur paraissait facilement déterminable. Une conséquence de cela est la non-détermination d'un minorant à l'optimum pour des objets de grandes dimensions (autre que 4).

Exemples de résultats obtenus

Voici une liste des résultats que les élèves ont obtenus :

- La couleur des 4 coins d'un carré donne la direction de la frontière (prouvé) ;
- Des optimums pour des carrés de petite dimension (prouvé) ;
- Sur un carré de 8 cases de côté, l'algorithme coins puis dichotomie trouve la frontière en, au plus, 6 interrogations (argumenté mais non prouvé) ;
- Pour des segments dont le nombre de cases est entre $2^{c-1}-1$ et 2^c-1 , il faut utiliser c interrogations (argumenté et obtenu que par un seul groupe).

Les élèves ont obtenu peu de résultats généraux notamment, comme mentionné précédemment, ils n'ont pas obtenu de minorant à l'optimum. De plus, ils n'ont pas cherché à déterminer le nombre d'interrogations qu'utilise l'algorithme coins puis dichotomie de manière générale. Nous faisons l'hypothèse que cela est dû au fait que les élèves se sont restreints aux dimensions des plateaux que nous leur avons fournis : ils n'ont pas cherché à généraliser le problème.

Au niveau de la démarche expérimentale

Les élèves ont pratiqué la démarche expérimentale, car ils ont, par exemple, expérimenté pour :

- Construire des algorithmes de recherche ;
- Déterminer le nombre d'interrogations au pire effectué par un algorithme ;
- Répondre au problème d'existence d'algorithme trouvant la frontière en un certains nombre d'interrogations.

L'expérimentation les a aussi conduit à proposer de nouveaux problèmes comme :

- Que se passe-t-il si la frontière vide n'est plus autorisée ?
- Comment faire pour jouer contre une frontière vide ?
- Est-ce que cet algorithme est optimal ?
- Est-ce que je peux déduire la couleur de cette case ?

Comme nous pouvons le voir par rapport à cette liste, les nouveaux problèmes qui ont été posés sont surtout liés à la problématique du joueur 1, c'est-à-dire, à la problématique liée à la recherche de la frontière.

Les élèves ont aussi effectué des tentatives de preuves. Toutefois, ils n'ont pas d'eux-mêmes effectué des tentatives de preuve « positive »¹⁴. Les tentatives de preuve « positive » n'ont été obtenues que par intervention du gestionnaire.

Le fait d'expérimenter a permis aux élèves d'avancer dans la résolution du problème :

¹⁴ Une tentative de preuve « négative » est une tentative de preuve où l'on cherche à montrer qu'un résultat est faux alors que dans une tentative de preuve « positive », nous allons chercher à montrer que ce résultat est vrai.

- Expérimenter contre une frontière vide ou coin a permis l'apparition des algorithmes qui commencent par interroger les coins. Ce qui a permis la construction de l'algorithme coins puis dichotomie ;
- Expérimenter a permis aux élèves de formuler, d'affiner et de réfuter des conjectures ;
- Expérimenter a aussi permis aux élèves de mettre en place des plans de preuve par exhaustivité des cas.

Bilan des expérimentations et perspectives

Bilan des expérimentations

Le problème bien qu'apparaissant comme complexe a été accessible aux élèves de seconde. Ces élèves ont pratiqué la démarche expérimentale mais de manière incomplète puisqu'ils n'ont pas d'eux même effectué des tentatives de preuves « positives ». De plus, comme constaté par Godot (2005), il est apparu que le matériel a été un frein à l'utilisation de variables de recherche. Cela a provoqué l'absence de nouveaux problèmes « généraux » ainsi qu'une restriction de l'ensemble des exemples dont ont disposé les élèves. Toutefois, le matériel a favorisé la pratique de la démarche expérimentale.

Perspectives

Par rapport au bilan des expérimentations que nous avons fait, l'un des problèmes majeurs est l'absence de tentative de preuve « positive ». L'hypothèse que nous faisons est que l'obtention de tentative de preuve « positive » ne peut avoir lieu qu'avec des élèves qui ont une certaine expérience de l'activité de recherche mathématique. Sous cette hypothèse, l'apprentissage de la démarche expérimentale nécessite l'utilisation de plusieurs situations. Le problème est alors de construire une telle séquence.

De plus, nous avons vu que les élèves n'ont pas généralisé leurs résultats, ce qui a eut pour conséquence de restreindre l'ensemble des exemples dont ils disposaient. Cet ensemble est essentiel, car c'est celui dans lequel il est possible de trouver des contre-exemples. De ce fait, certains arguments proposés par les élèves n'ont pas été invalidés par eux-mêmes, car sur les dimensions avec lesquelles ils travaillaient, il n'était pas possible de trouver un contre-exemple. Cela pose la question de l'étude du domaine de validité des arguments (Durrand-Guerrier, 2008) et de comment faire pour que les élèves puissent d'eux-mêmes se poser cette question.

Bibliographie

- Cartier, L. (2008). *Le graphe comme outil pour enseigner la preuve et la modélisation*. Thèse de doctorat. Grenoble : Université Joseph Fourier.
- Dias T. (2009) *La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage*. Thèse de doctorat. Lyon : Université Claude Bernard.
- Durrand-Guerrier V. (2008). Truth versus validity in mathematical proof. *ZDM Mathematics Education* 40, p. 373–384.
- Giroud N. (2011) *Etude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe*. Thèse de doctorat. Grenoble : Université de Grenoble.
- Godot K. (2005) *Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation*. Thèse de doctorat. Grenoble : Université Joseph Fourier.
- Grenier D., Payan C. (2002) Situation de recherches en « classe » : essai de caractérisation et proposition de modélisation. In Durand-Guerrier V., Tisseron C. (eds) (pp. 189-205) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*. Paris : IREM de Paris 7, ARDM.

- Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning in task solving. *Educationnal Studies in Mathematics* 41, p. 165–190.
- Lithner, J. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educationnal Studies in Mathematics* 75, p. 89–105.
- Modeste S. (2012) *Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?* Thèse de doctorat. Grenoble : Université de Grenoble.
- Ouvrier-Buffet, C. (2003) *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques*. Thèse de doctorat. Grenoble : Université Joseph Fourier.
- Perrin D. (2007) L'expérimentation en mathématiques. *Petit x* 73:6–34.
- Polya, G. (1990). *Mathematics and plausible reasoning. T.1 induction and analogy in mathematics*. Princeton University Press.