

MICHELE GANDIT

DEUX EXEMPLES DE COOPERATION ENTRE ENSEIGNANTS, FORMATEURS ET CHERCHEURS, EN MATHEMATIQUES : DES MODALITES ET DES EFFETS

michele.gandit@ujf-grenoble.fr

ESPE, Université Grenoble-Alpes

Résumé

S'insérant dans le cadre général présenté par M. Grangeat sur le travail collaboratif dans l'enseignement, les deux exemples que nous présentons illustrent des modalités différentes de coopération. Dans les deux exemples, les élèves sont mis en situation d'investigation. Le premier est un exemple de coaction en classe, enseignant(e) et chercheur(e). Il s'agit du modèle d'atelier Maths à modeler. Nous décrivons ce dispositif et l'illustrons au travers d'un problème qui relève des mathématiques discrètes, dont la recherche est menée avec une classe de cinquième. Nous présentons quelques effets induits chez les élèves par ce mode de travail. Le second exemple relève d'une recherche collaborative entre enseignants, formateurs et chercheurs, qui se situe dans le LéA (lieu d'éducation associé à l'Institut français de l'éducation) EvaCoDICE (Evaluation par compétences dans les démarches d'investigation au collège et à l'école), présenté dans le texte de M. Grangeat (dans ces actes). Nous pointons dans cet exemple des effets de ce travail sur les élèves, mais surtout sur les enseignants.

Exemple 1 – Le modèle d'atelier *Maths à modeler*, un exemple d'effet sur les élèves

Le dispositif

Un *atelier Maths à modeler* (nous dirons *atelier MaM* dans la suite) est un dispositif didactique, qui s'adresse à des élèves de tous âges (école, collège, lycée, université) ou des enseignants en formation (voir aussi Pastori, 2013). Il permet, à partir d'un problème – plus exactement d'une situation de recherche pour la classe (Grenier & Payan, 2002 ; Grenier, 2009) – présenté sous la forme d'un jeu (sur plateau, avec pièces), la pratique d'une démarche expérimentale en mathématiques (Giroud, 2011, p. 11). Dans les premier ou second degrés, un atelier *MaM* s'organise, dans l'emploi du temps normal de la classe, en une suite de six séances, une par semaine, et se clôt par un séminaire, à l'université, où les élèves présentent le problème et les résultats qu'ils ont obtenus, à un public, composé de chercheurs, d'enseignants, d'élèves, de leurs parents..., public qui ne connaît donc pas nécessairement le problème (Pastori, 2013).

Ce dispositif est ainsi une modalité d'enseignement qui permet d'engager les élèves dans une pratique scientifique qui va au-delà de ce qui se passe usuellement dans les classes. Par exemple, l'élève est amené à formuler ses propres questions, alors qu'on lui demande habituellement de répondre à celles qui lui sont posées par le professeur, à définir des objets parce qu'ils lui sont nécessaires au cours de sa recherche, alors qu'usuellement il se contente d'utiliser des définitions qui lui ont été données auparavant, à communiquer ses propres résultats, à une communauté extérieure à la classe, alors qu'habituellement il doit seulement rédiger sa solution pour le(la) professeur(e).

Plus généralement, dans ce dispositif, chaque élève est amené à produire des mathématiques et à acquérir des connaissances *par* et *sur* la pratique mathématique. Outre cette posture d'apprenti-chercheur, dans laquelle les élèves sont amenés à se placer, il coexiste dans la classe deux autres postures, inhabituelles, celle du(de la) chercheur(e) – en mathématiques ou en didactique des mathématiques – et celle de l'enseignant(e). Le(la) chercheur(e) est celui qui mène la situation : il(elle) assure la dévolution du problème, donne les consignes, repère les résultats obtenus, les raisonnements des élèves, questionne sur la validation, relance les groupes, propose un étayage, des compensations (dans le cas d'élèves en situation de handicap) (Gandit & al, à paraître), fait l'institutionnalisation sur le problème, aide à préparer le séminaire final. L'enseignant(e), quant à lui(elle), gère l'organisation, le matériel, propose la constitution des groupes, fait le bilan sur ce qui a été appris, aide à la préparation du séminaire.

Les rôles du(de la) chercheur(e) et de l'enseignant(e) sont différenciés. Même si certains enseignants participent à la mise en œuvre en classe de la situation de recherche choisie, la plupart d'entre eux ne se sent pas en confiance (certains demandent des formations) pour gérer l'incertitude et le doute liés aux investigations des élèves, alors que cela fait partie de l'activité habituelle du (de la) chercheur(e). Il est bien sûr envisageable qu'un(e) enseignant(e) puisse mener seul(e) dans sa classe un *atelier MaM*. Il faudra dans ce cas qu'il(elle) sache faire coexister, de façon visible pour les élèves, les deux postures décrites ci-dessus. Cette coexistence ou alternance du rôle de gestionnaire de la recherche, capable de repérer les pistes à poursuivre et les impasses, d'accepter les directions de recherche prises par les élèves..., et du rôle d'enseignant qui a des objectifs d'apprentissages est une condition nécessaire à la réussite d'un enseignement fondé sur l'investigation des élèves.

Un exemple de problème, au centre du dispositif, les Caisses de dynamite

Nous présentons le problème³, ainsi qu'une entrée dans sa recherche, pour permettre au(à la) lecteur(lectrice) de mieux appréhender le déroulement d'un *atelier MaM*, ainsi que les savoirs en jeu. L'analyse didactique repose sur plusieurs expérimentations menées avec des élèves de collège ou lycée, des étudiants, des professeurs stagiaires en mathématiques et des publics divers (lors de manifestations visant à vulgariser les mathématiques) (Gandit & al, 2011).

Le problème

Dans un bâtiment, on cherche à entreposer le maximum de caisses de dynamite de sorte que, si une caisse explose, elle n'endommage aucune autre caisse. Quel est ce maximum ?

Le bâtiment est une surface quadrillée, de forme quelconque, à cases carrées identiques. A chaque caisse, posée sur une seule case, est attachée une zone de sécurité qui dépend du mode d'explosion : une caisse peut donc interdire un certain ensemble de cases (figure 1).

Tout élève-chercheur est amené à prendre en charge les variables de recherche, que constituent la forme du bâtiment et le mode d'explosion (ou la forme de la zone de sécurité). Il peut ainsi se fabriquer ses propres questions (nous avons évoqué ci-dessus la phase Proposer de nouveaux problèmes). Une question résolue renvoyant à de nouvelles questions, la recherche n'a pas de fin, son arrêt résulte d'une décision arbitraire liée à la fin du temps de l'atelier (fixé au départ).

³ Il est inspiré du *Problème des huit reines*, posé au XIX^{ème} siècle : Comment placer huit reines sur un échiquier (une reine « mange » toute pièce située sur la ligne, la colonne et les deux diagonales qui contiennent la case sur laquelle elle est posée) sans qu'aucune ne puisse être mangée par une autre.

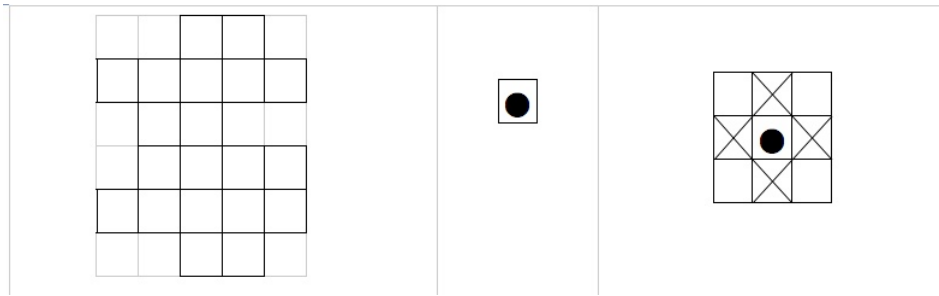


Figure 1 – Un exemple de forme de bâtiment, une caisse occupe une seule case, un exemple de zone de sécurité (en croix) (ou de mode d'explosion).

Entrons dans le problème avec les mêmes choix qu'à la figure 1 (phase Expérimenter-observer-valider). Dans toute la suite, nous nommerons B le bâtiment de la figure 1.

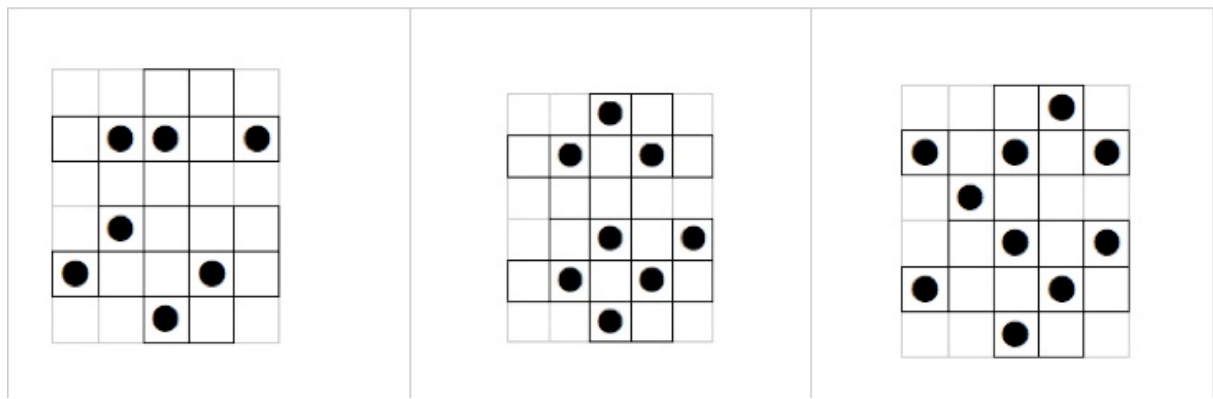


Figure 2 – A gauche, une configuration non valide puisqu'à la 2ème ligne, 2 caisses se détruisent (si l'on en enlève une, la configuration devient une solution) ; ensuite, 2 solutions à 8, puis à 10 caisses.

La configuration centrale de la figure 2 est une solution localement maximale en ce sens que l'on ne peut pas ajouter de pièce dans les cases vides, sans enfreindre la contrainte de sécurité. Mais cela ne signifie pas que 8 soit le nombre maximum cherché, comme le montre la solution de droite, qui est aussi localement maximale, mais de cardinal 10. Ainsi, l'exhibition d'une solution implique un minorant du maximum M cherché⁴ : ici $M \geq 10$. La tentative de placement d'une onzième caisse n'aboutissant pas, on s'engage dans une preuve qu'il est impossible de faire mieux que 10 en recourant à une majoration de M . Celui-ci est clairement inférieur au nombre de cases du bâtiment, donc $M \leq 20$. Comment obtenir une majoration meilleure, au sens où le majorant soit plus proche du minorant 10 ? Nous poursuivons cette preuve plus loin.

Ce problème peut ainsi se décomposer en deux *nouveaux problèmes* : comment construire une solution localement maximale, menant à un minorant de M , et comment obtenir un majorant de M . Pour permettre au lecteur d'entrer dans un atelier MaM et de voir les savoirs en jeu, nous étudions ces deux problèmes sur les modes d'explosion *en croix* et *en carré*.

Pour trouver une solution, on peut placer des pièces (caisses), sans méthode ordonnée, puis vérifier sa validité en marquant la zone de sécurité de chacune d'elles. On peut aussi adopter une stratégie *locale*, qualifiée de *gloutonne*, qui consiste à poser une caisse sur une case, accompagnée de sa *zone de sécurité*, ces zones de sécurité pouvant se superposer en partie.

⁴ Cet optimum M dépend de la forme de l'entrepôt et du mode d'explosion.

Concernant le mode d'explosion en croix, cette stratégie gloutonne, appliquée au bâtiment B , si elle permet de construire une solution localement maximale, ne permet d'aboutir qu'à une minoration de M , comme le montre la figure 3.



Figure 3 – Deux solutions localement maximales, de cardinal 9, puis 10, obtenues par stratégie gloutonne, pour le mode d'explosion en croix.

Pour faciliter l'entrée dans le problème, le *meneur du problème* – nous nommons ainsi dans la suite le chercheur ou l'enseignant qui dirige l'atelier – doit confronter les élèves-chercheurs à des solutions qui soient à la fois localement maximales et de cardinaux différents (comme à la figure 3). L'argument, souvent avancé, que « c'est la meilleure solution car on ne peut pas mettre une pièce de plus » peut ainsi être mis en défaut. Cependant la *régularité* de certaines solutions (voir figure 4) peut redevenir un obstacle à la nécessité de prouver *qu'on ne peut pas faire mieux*.

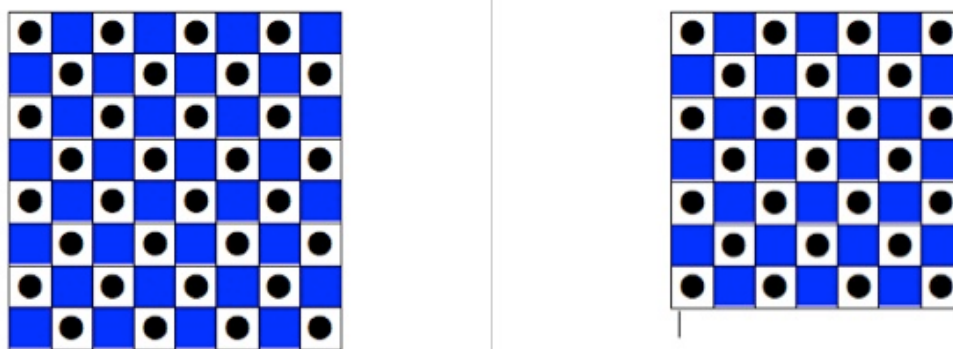


Figure 4 – En considérant le mode d'explosion en croix, la stratégie gloutonne construit des solutions localement maximales, régulières, à 32 caisses sur le carré de côté 8, à 25 sur le carré de côté 7.

Au vu de la figure 4, un élève-chercheur admet difficilement que cette solution, localement maximale, ne soit pas aussi globalement maximale : on a en effet vraiment l'impression que, localement, autour de chaque caisse, l'occupation est maximisée. Le meneur du problème n'a que le recours à la question « Pourquoi ne pourrait-on pas en placer 33 (ou 26) ? », conduisant à la preuve d'une impossibilité. Il est alors utile de changer de regard sur l'environnement de chaque caisse. Celui-ci était vu jusque-là comme un bloc de 5 cases – on le nomme *bloc-croix* – comportant la case centrale supportant la caisse et les 4 cases en croix de la zone de sécurité. Peut-on partitionner ce *bloc-croix* en *motifs* plus petits – mais plus grands qu'une case – sur chacun desquels on soit sûr qu'on ne puisse pas placer plus d'une caisse, et qui permette de paver, entièrement (ou presque), le bâtiment ? Une réponse est donnée par la figure 5.



Figure 5 – Partition du bloc-croix en dominos, chacun d’eux ne pouvant contenir plus d’une caisse.

L’étude des entrepôts carrés, 3×3 et 2×2 , aide à adopter cet autre point de vue sur le voisinage d’une caisse. Ainsi, sous réserve qu’on puisse paver le bâtiment par k dominos, comme un domino ne peut contenir plus d’une caisse, on peut majorer par k le nombre de caisses dans l’entrepôt (figure 6).

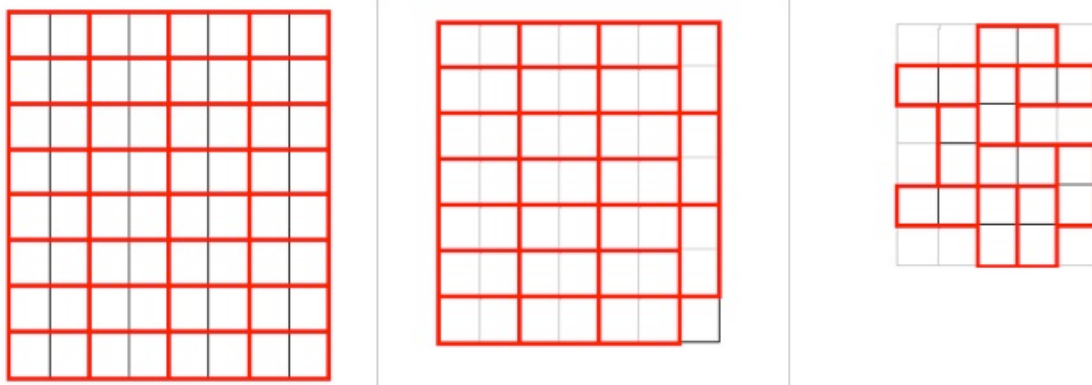


Figure 6 – D’après ce recouvrement par des dominos, on conclut que, sur le carré 8×8 , on ne peut pas placer plus de 32 caisses, sur le carré 7×7 , pas plus de $24 + 1$, soit 25 caisses (la case seule pouvant être recouverte par une caisse) et, sur l’entrepôt B, pas plus de 10 caisses.

Ce pavage est d’autant plus efficace pour la preuve de l’optimum M que cette valeur de k est égale au minorant trouvé par construction d’une solution. En effet, k étant à la fois minorant et majorant de M , on en déduit alors que $M = k$. C’est le cas pour les trois formes d’entrepôts de la figure 6.

On peut remarquer que cette *stratégie par motifs*, outre l’obtention d’un majorant du nombre de caisses, permet aussi la construction d’une solution localement maximale : il suffit en effet de placer une caisse par domino sans que deux cases voisines, de dominos voisins, ne contiennent toutes deux une caisse. Elle est donc beaucoup plus efficace que la *stratégie gloutonne*.

Pour le mode d’explosion en carré, la zone de sécurité attachée à une caisse posée sur une case est constituée des 8 cases qui l’entourent (figure 7, à gauche). Cette figure donne des solutions localement maximales à 16, pour le carré 8×8 , d’où la minoration de l’optimum par 16 ($M \geq 16$).

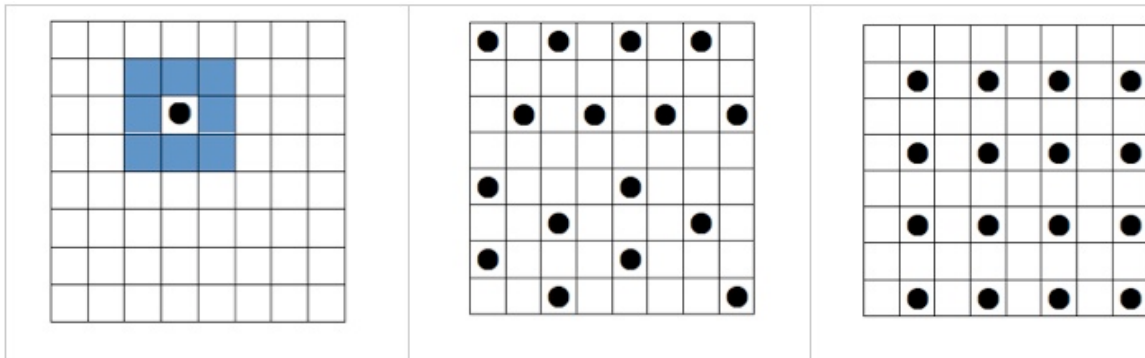


Figure 7 – L'optimum cherché, suivant le mode d'explosion en carré (figure de gauche) est supérieur à 16. Mais pourquoi ne pourrait-on pas en placer une dix-septième ?

La régularité de la solution de droite (figure 7), outre qu'elle permet la généralisation au carré $n \times n$, favorise la détection d'un *motif* qui se répète (voir figure 8), à savoir le carré 2×2 .

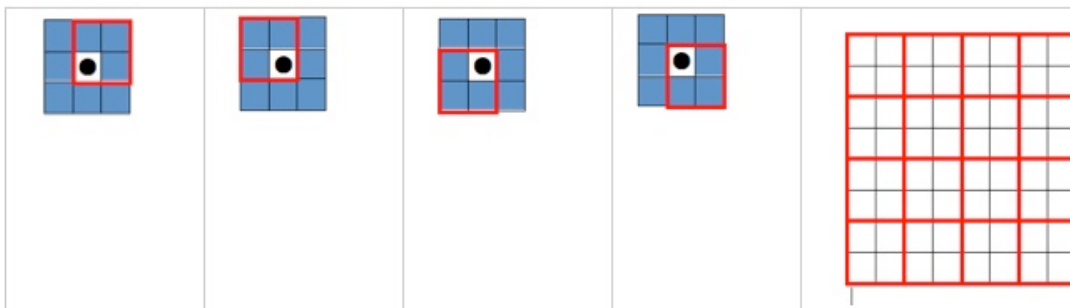


Figure 8 – Il faut regarder autrement le bloc-carré (zone coloriée en bleu et case centrale) pour détecter que le carré 2×2 (le motif) ne peut contenir plus d'une caisse.

Le pavage de la figure 8 par 16 *motifs* permet de conclure que, puisqu'on ne peut pas avoir plus d'une caisse par motif, l'optimum M est inférieur (ou égal) à 16. Donc il est finalement égal à 16.

Il ne va pas de soi de passer du *bloc-croix* au *motif domino* ou du *bloc-carré* au motif carré 2×2 . C'est un passage difficile dans la recherche du problème, que le meneur du problème doit gérer. Il doit en effet amener les élèves-chercheurs à *casser* la représentation naturelle du *bloc-croix* ou du *bloc-carré* pour arriver à celle des *motifs*. L'étude des carrés de côtés 2 et 3 peut être une aide. Comme nous allons le voir, ces motifs sont plus simples à repérer pour d'autres modes d'explosion, comme en *ligne-colonne*.

Suivant le mode d'explosion en *ligne-colonne*, la zone de sécurité qui correspond à une case est constituée de la ligne complète et de la colonne complète, qui contiennent toutes deux cette case. La figure 9 montre deux solutions sur carré 8×8 .

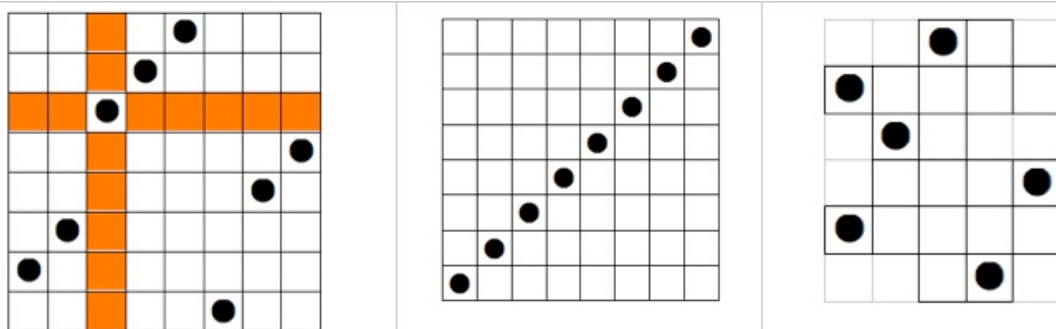


Figure 9 – Solutions localement maximales, sur le carré 8×8 et sur B (explosion ligne-colonne).

Pour le carré 8×8 , on obtient souvent rapidement la solution constituée des 8 caisses disposées sur une grande diagonale (au centre de la figure 9). Cette solution se construit dès lors qu'on commence par placer une caisse dans l'un des coins du carré. Cependant, comme pour le mode d'explosion *en croix*, la régularité de cette solution diagonale, bloque souvent les élèves-chercheurs, alors persuadés qu'ils ne peuvent ajouter une caisse de plus. C'est l'accès à d'autres solutions, moins régulières, (à gauche, sur la figure 9, par exemple) qui amène à douter que 8 soit le maximum cherché. Le meneur du problème doit insister : « Peut-être que si l'on dispose les pièces autrement, on pourra mettre une neuvième caisse. Prouvez-moi qu'il est impossible d'en mettre 9, quelle que soit la disposition des 8 premières. » Pour cette preuve, le motif pertinent à repérer, sur lequel on est sûr d'avoir au maximum une caisse, est soit la ligne, soit la colonne. Pour un entrepôt carré, on peut utiliser l'une ou l'autre ; pour le bâtiment B , on choisira la ligne qui amène à une majoration plus forte, que la colonne, puisque B comporte 6 lignes et 8 colonnes (figure 10).

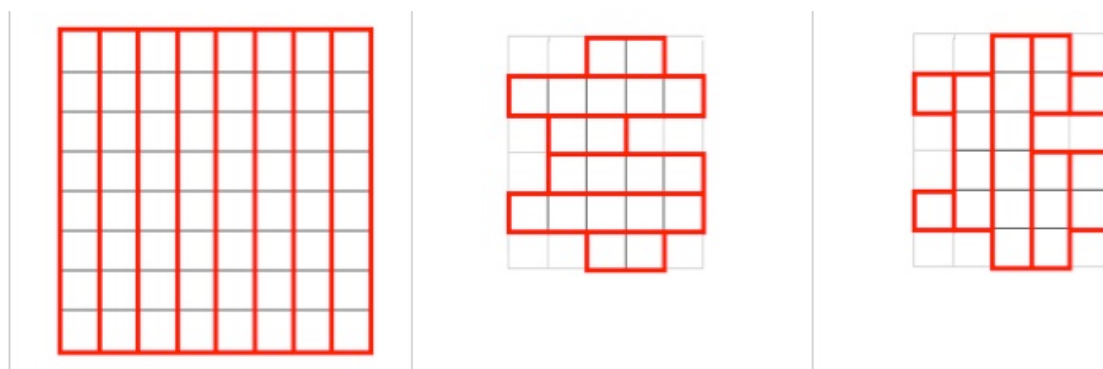


Figure 10 – Le pavage du carré 8×8 par 8 colonnes et le fait que le nombre de caisses par colonne soit inférieur (ou égal) à 1, ces deux arguments amènent à une majoration de l'optimum : $M \leq 8$. On aurait pu utiliser les lignes à la place des colonnes pour le carré 8×8 , ce qui n'est pas le cas pour B (pavé, soit par 8 colonnes, soit par 6 lignes) : l'optimum est inférieur ou égal à 8 et à 6, donc à 6.

Des deux raisonnements, exhibition d'une solution (entraînant une minoration de l'optimum par l'entier naturel k) et pavage par motifs (induisant une minoration de cet optimum par ce même k), on déduit que l'optimum est k : soit 8 pour le carré 8×8 et 6 pour l'entrepôt B . Sur un carré, l'appréhension du motif, ligne ou colonne, est plus simple dans ce cas que pour les modes d'explosion précédents. Une des difficultés de la preuve réside néanmoins dans le fait

qu'on n'ait à considérer que les lignes ou bien que les colonnes, « cassant » ainsi le *bloc-ligne/colonne*.

Un déroulement possible pour un atelier MaM

Le déroulement qui est brièvement proposé ci-dessous concerne des élèves de collège ou lycée⁵ (de 11 ans à 16 ans). En première séance, le problème est présenté de façon générale (figure 1), l'enrôlement de la classe, répartie en groupes, est facilité par la mise à disposition de matériel : plateaux quadrillés en bois et jetons (figure 14). Les élèves choisissent un mode d'explosion et construisent des solutions, sur des carrés 7×7 ou 8×8 . Ils rédigent, dans le cahier de recherche du groupe, ces premiers résultats.

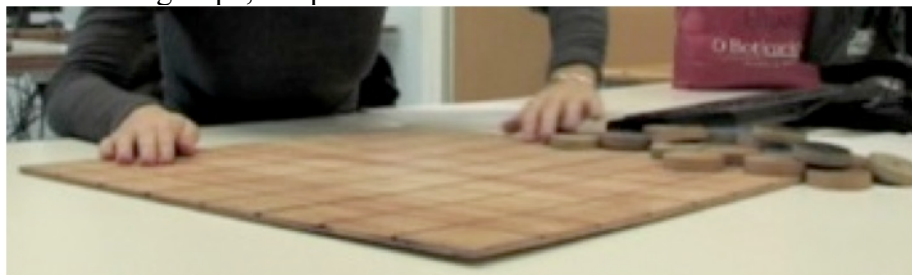


Figure 11– Chaque groupe dispose d'un plateau carré en bois et de jetons.

La deuxième séance est consacrée à l'étude du mode d'explosion *en ligne-colonne*, sur ces mêmes carrés. Le doute concernant l'optimum devra être entretenu par le meneur du problème, suscité, d'abord, par la recherche de différentes configurations localement maximales, ensuite, par celle d'une solution à 9 pièces sur le carré 8×8 (ou d'une solution à 8 pièces sur le carré 7×7). On peut éventuellement aller jusqu'à une généralisation au carré de côté n . Lors de la troisième séance, on étudie le mode d'explosion *diagonales*, sur les carrés 8×8 ou 7×7 . Dans ce cas, le doute est important sur la valeur du maximum, car on trouve facilement des solutions localement maximales de cardinaux différents. Cette incertitude facilite l'engagement dans une preuve. Un récapitulatif des divers types de raisonnement mis en œuvre peut être proposé au début de la quatrième séance. Celle-ci se poursuit par l'étude du mode d'explosion *en carré*, puis *en croix* à la cinquième séance. L'idée du pavage par *motifs* peut être suggérée par l'étude des carrés 2×2 ou 3×3 , ou encore par la construction d'une solution généralisable au carré $n \times n$. La dernière séance est consacrée à la préparation du séminaire. Le cahier de recherche est complété à chaque séance.

Ainsi les temps forts d'un *atelier MaM* sont *les relances*, *les institutionnalisations*, *la préparation du séminaire* et *le séminaire*. Nous décrivons brièvement les trois premiers et un peu plus longuement le dernier, qui montre des effets de ce type de travail en *atelier MaM*.

Chaque groupe travaillant sur une question qu'il a choisie, le chercheur questionne sur l'avancement dans sa résolution. Les solutions sont validées ou invalidées par les élèves eux-mêmes. Les relances du chercheur concernent davantage le caractère maximal de la solution proposée. Il questionne les élèves (« Etes-vous sûrs que... ? Pourquoi... ? », il lève les malentendus en précisant la règle du jeu, le vocabulaire (ce qu'on appelle une diagonale, sens peu commun aux élèves), il ne donne pas de réponse, il relève les résultats, il pointe les arguments de preuve intéressants, il incite à prendre des notes pour pouvoir argumenter devant un public.

⁵ Pour des élèves-chercheurs d'un niveau mathématique plus élevé, on pourrait réduire le nombre de séances, si l'on veut traiter les mêmes questions, ou bien aller beaucoup plus loin dans le problème, si l'on souhaite garder le même temps de recherche.

Chaque séance se clôt par un bilan faisant état de l'avancée de la recherche dans chaque groupe. Cette phase d'institutionnalisation sur le problème amène les élèves à formuler eux-mêmes les résultats de leurs recherches, à préciser le statut de leurs énoncés (conjecture ou théorème), à comprendre ce qu'on appelle un *résultat* en mathématiques. Elle montre aux élèves l'importance de la preuve et, surtout, que celle-ci ne consiste pas en un exercice formel de rédaction. Un nouveau point sur l'avancée des recherches a lieu au début de la séance suivante. L'appropriation par les élèves des résultats institutionnalisés, phase qui a rarement lieu en classe, se fait lors de la préparation du séminaire et de sa présentation à un public extérieur.

La préparation du séminaire fait l'objet d'une séance, en général, la dernière de l'atelier avant le séminaire lui-même. Il est expliqué aux élèves qu'ils vont avoir à présenter le problème et leurs résultats à l'université, devant un public de chercheurs et d'autres élèves, qui ne connaîtront pas le problème. Il faut donc d'abord le présenter, puis construire l'exposé des résultats, distinguant bien ce qui relève de la conjecture ou du résultat. Ce type de séance est peu présent habituellement dans les classes. Ainsi, lors d'une séance de préparation de séminaire, dans une classe de cinquième, une élève pose au chercheur la question suivante : « Au niveau de toutes les solutions, vous savez ce que c'est ? ». Il reformule ainsi : « Tu veux dire si je sais si elles sont justes vos solutions ? ». L'élève acquiesçant, le chercheur répond : « C'est vous qui savez si vous avez démontré... Il faut que vous sachiez à quel moment, c'est une propriété démontrée, à quel moment c'est une conjecture... ». La responsabilité scientifique est ainsi renvoyée aux élèves.

Le séminaire enfin comporte en général la présentation de deux ateliers, qui ont eu lieu à des endroits différents. Chaque élève de la classe participe à cette présentation. L'exposé est suivi de questions, posées soit par des chercheurs, soit par d'autres élèves. Afin de montrer un effet sur les élèves de ce travail en *atelier MaM*, nous avons choisi un exemple d'extrait de séminaire, présenté par une classe de cinquième (élèves de 12 ans).

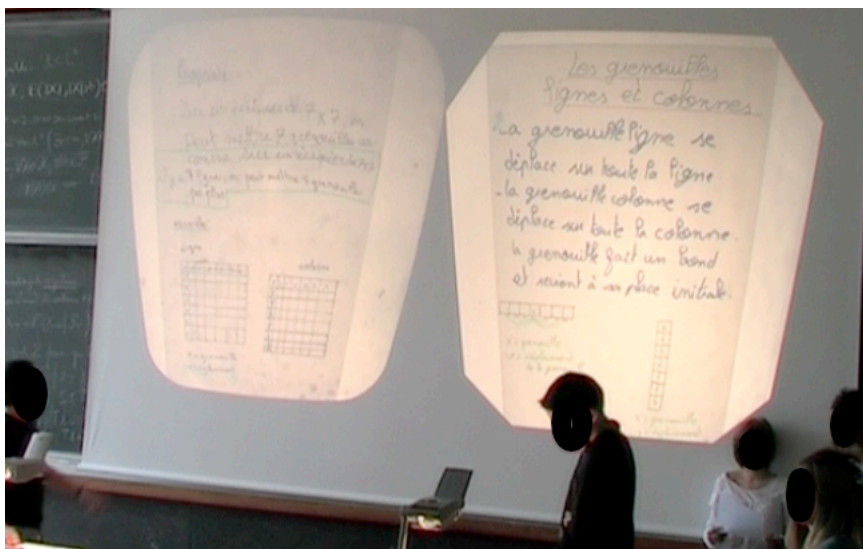
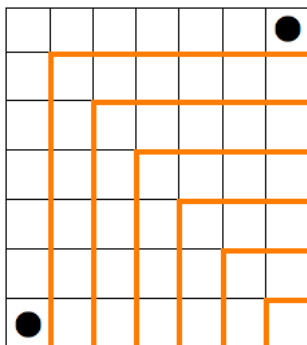


Figure 12 – Lors du séminaire, chaque élève de la classe, à tour de rôle, présente les questions étudiées et les résultats obtenus, à un public constitué de chercheurs en mathématiques, d'enseignants, d'élèves d'un autre établissement, de parents d'élèves...

Nous n'évoquons ci-dessous qu'un seul épisode. La question étudiée porte sur un bâtiment carré 7×7 et le mode d'explosion *ligne-colonne*. Un élève présente le raisonnement suivant : « Sur un échiquier 7×7 , on a réussi à mettre 7 caisses, donc on sait qu'on peut en mettre au

moins 7, et là, on a séparé le terrain en 7 parties (voir figure 13), et sur une partie, on peut mettre que une caisse, donc, au final, on peut mettre que 7 caisses. ». A la fin de l'exposé, un chercheur du public demande à un élève de revenir sur le raisonnement correspondant au transparent comportant la figure 13. L'élève reprend : « On a séparé le terrain en sept zones et, dans chaque zone, on peut mettre qu'une seule caisse. ».



*Figure 13 – La figure proposée sur transparent par un élève et les deux caisses
« ajoutées par le chercheur »*

Le chercheur fait remarquer à l'élève que, si l'on place une pièce sur la case en haut à droite (voir figure 13) et sur la case en bas à gauche (voir figure 13), celles-ci ne se détruisent pas et que, par conséquent, sur la zone *1ère ligne du haut – 1ère colonne à gauche* de la figure 13, on peut mettre plus d'une caisse. L'élève insiste cependant, sûr de son affaire ; il répète qu'on ne peut mettre qu'une caisse sur chacune des zones. Plusieurs élèves, persuadés qu'on ne peut mettre que 7 caisses, répètent l'argument, malgré l'invalidation proposée par le chercheur. L'un d'eux, qui semble avoir compris la question du chercheur, tente de donner un dernier argument malgré l'insistance de l'organisateur du séminaire à laisser la place à l'autre groupe. Il prend tout de même la parole, changeant de stratégie de preuve : « Il y a 7 lignes et 7 colonnes et, la caisse de dynamite, elle peut prendre qu'une ligne et qu'une colonne, donc on peut mettre que 7 caisses. ». Le chercheur lui dit alors qu'il s'approche d'un argument plus pertinent que le précédent. Il suffirait en effet de dire que chaque ligne ne peut contenir plus d'une pièce et que, le quadrillage étant recouvert par 7 lignes, il ne peut contenir plus de 7 pièces (on pouvait faire le même raisonnement avec les colonnes à la place des lignes).

Ce que nous soulignons dans cet exemple, c'est que les élèves sont convaincus que l'optimum ⁶ est égal à 7 et qu'ils ne se laissent pas intimider par le public, même si certains de ses membres sont savants. *Cette attitude d'élève, qui consiste à défendre sa preuve, est assez rare dans les classes. On peut penser que c'est un effet du travail d'investigation et d'appropriation des résultats trouvés, celle-ci étant forcée par la nécessité de les présenter à l'extérieur de la classe.* Ce dernier point est tout à fait central – il permet d'évaluer les acquisitions des élèves – et peut difficilement se réaliser s'il n'y a pas intervention dans la classe d'une (ou deux) personnes autres que l'enseignant(e).

⁶ Même si leur preuve est erronée.

Exemple 2 – Les débuts d’une recherche collaborative en mathématiques dans le cadre du LéA⁷ EvaCoDICE

Nous renvoyons au texte de M. Grangeat (dans ces Actes) pour une description générale de l’équipe de recherche pluridisciplinaire⁸ et de son projet. Nous présentons ici ce que nous nommons *l’équipe de mathématiques*, ainsi que des résultats issus de cette première année de recherche, concernant les premiers effets de cette recherche collaborative. Outre l’auteure de cet article, cette équipe est constituée de cinq enseignants, quatre professeurs de mathématiques en collège, enseignant en classe de sixième (élèves de 11 ans) et deux professeurs des écoles, enseignant en CM2 (élèves de 10 ans) et souhaitant travailler en mathématiques.

Les données sur lesquelles nous nous appuyons sont constituées de vidéos, réalisées dans les classes⁹ de certains de ces enseignants (entre octobre et mai 2013), lors de séances relevant de la démarche d’investigation, ainsi que des éléments recueillis au cours des réunions de recherche, de copies d’élèves données par les enseignants et de documents élaborés en commun avec les équipes des autres disciplines. Nous n’avons, à ce jour, exploité qu’une petite partie de ces données.

L’équipe de mathématiques est constituée de quatre professeurs de collège, de deux professeurs des écoles, qui ont choisi de travailler en mathématiques, ainsi que de l’auteure de cet article.

Le projet de recherche comprend l’élaboration d’outils d’évaluation formative à mettre en place dans les enseignements scientifiques fondés sur l’investigation. Précisons d’abord ces deux points.

Les enseignements de mathématiques fondés sur l’investigation et l’évaluation

Il sera ici question essentiellement de l’évaluation du travail de l’élève en tant que mesure du degré de sa réussite par rapport à un objectif lié à la situation d’investigation (par exemple, choisir un cas particulier pertinent par rapport au problème posé et l’étudier, émettre une conjecture, s’engager sur une piste originale, ...). Cette mesure peut être effectuée par l’enseignant(e) ou par l’élève lui-même. Nos premiers constats se rapportent à la façon dont les enseignants font ces mesures dans les productions orales ou écrites des élèves, ainsi qu’aux effets qu’elles induisent dans leurs pratiques. L’évaluation est ainsi essentiellement vue comme un moyen permettant, d’une part, dans le contexte d’une séance relevant de l’investigation, une régulation de l’action du (de la) professeur(e), d’autre part, dans le contexte de la préparation du cours, une anticipation de la séance.

S’inscrivant dans le modèle à six dimensions proposé par Grangeat (voir le texte dans ces Actes), ainsi que dans d’autres travaux sur la démarche expérimentale en mathématiques (Giroud, 2011 ; Triquet, Gandit & Guillaud, 2012), les propriétés que nous attribuons à un enseignement de mathématiques fondé sur l’investigation sont de permettre aux élèves une authentique recherche d’explications et d’informations à partir de questions problématiques, ainsi que la recherche de questions à partir d’une situation donnée, mais aussi de faire vivre le doute et l’incertitude dans la classe. Il s’agit de favoriser quatre blocs d’actions : expérimenter, observer, (in)valider ; conjecturer, en dégagant le généralisable du particulier et prouver la vérité de la conjecture ; proposer de nouveaux problèmes, induits par les étapes précédentes ; communiquer et débattre scientifiquement de ses résultats (Legrand, 1990). Par

⁷ Lieu d’éducation associé à l’Ifê.

⁸ Elle est constituée d’enseignants de collège ou d’école élémentaire, de chercheurs en didactique des sciences et en sciences de l’éducation, de formateurs.

⁹ Nous remercions Céline Lepareur et David Cross pour la réalisation des vidéos que nous avons utilisées.

rapport à un objectif d'apprentissage donné – notionnel ou plus transversal – enjeu d'une situation donnée, et en fonction de la richesse du milieu de l'élève relatif à la pratique scientifique, il peut être important de savoir privilégier un bloc d'actions par rapport aux autres.

De façon générale, les résultats d'apprentissage attendus d'une séance relevant de l'investigation sont à formuler en termes de connaissances ou de compétences, mais aussi d'attitudes face aux questions du monde. « Students cannot learn in school everything they will need to know in adult life. What they must acquire is the prerequisites for successful learning in future life. These prerequisites are of both a cognitive and a motivational nature. Students must become able to organise and regulate their own learning, to learn independently and in groups, and to overcome difficulties in the learning process. This requires them to be aware of their own thinking processes and learning strategies and methods. » (OECD, 2000, p. 90). Nous faisons l'hypothèse qu'en mathématiques l'investigation pratiquée par les élèves (au sens précisé ci-dessus) peut susciter l'émergence de différents types de connaissances, d'attitudes, de compétences qui leur permettront, d'une part, de mieux saisir certains modes de pensée, mais aussi de mieux appréhender d'autres contenus mathématiques que ceux qui sont en jeu dans la situation sur laquelle ils mènent des investigations. On espère des changements d'attitude face aux questions, pas seulement celles qui relèvent des mathématiques.

Les savoirs en jeu dans les enseignements fondés sur l'investigation ont déjà été explicités dans l'exemple des *ateliers MaM*. D'autres savoirs, notionnels, peuvent s'y ajouter.

Au début de la recherche, nous choisissons de caractériser une séquence qui relève de la démarche d'investigation par les valeurs de trois variables (qui ne sont pas nécessairement indépendantes) : 1) la problématisation proposée par l'enseignant(e) des savoirs ou savoir-faire visés dans la séance (son existence, sa pertinence par rapport au niveau du public, l'ampleur du doute laissé à l'élève) ; 2) le niveau de responsabilité scientifique dévolue à la classe, sur le plan de la démarche et de la communication des résultats (élevé, s'appuyant sur un contrat où l'élève peut réellement s'exprimer et être entendu de ses pairs, (in)valider les réponses des autres, ou bien faible car l'enseignant(e) intervient pour diriger, (in)valider...) ; 3) la richesse du milieu didactique relativement à la pratique scientifique (les connaissances qu'il contient sur le vrai / faux, l'engagement dans un problème nouveau...). Ce milieu est considéré comme *pauvre* par les enseignants de l'équipe. Il s'agit dans un premier temps de l'enrichir petit à petit, au travers des premières séances favorisant l'investigation des élèves.

Nous notons des évolutions, concernant les pratiques des enseignants, résultant de ce travail collectif, ainsi que des effets sur les élèves. Les préparations des séances relevant de démarches d'investigations deviennent plus approfondies, une attention particulière étant portée aux raisonnements des élèves, ce que relèvent aussi Gueudet & Lebaud (2013). Il apparaît également la nécessité d'une analyse fine des savoirs en jeu dans les recherches sur les problèmes choisis. Ceci a aussi été constaté par Coppé (2013). Un des comptes-rendus de réunion de recherche atteste d'une prise de conscience collective de la *nécessité de communiquer aux élèves sur leurs apprentissages* (réalisés ou à réaliser). On remarque également un *changement de regard sur l'évaluation*. Cependant, même si les séances sont conçues à partir de problèmes pertinents par rapport à la mise en investigation des élèves, il apparaît une *difficulté importante de la part des enseignants à gérer la complexité* introduite par les élèves. Ces trois points sont développés ci-dessous.

Une prise de conscience de la nécessité de communiquer aux élèves sur leurs apprentissages (réalisés ou à réaliser), de façon plus précise qu’avec une grille générale

En février 2013 (le projet a débuté en septembre 2012) une enseignante de collège apporte, à l’équipe de mathématiques, l’énoncé qu’elle a proposé aux élèves de sa classe de troisième (figure 14).

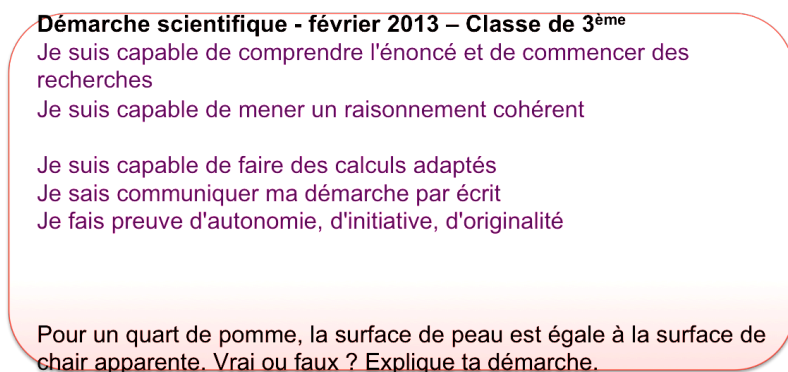


Figure 14 – Une grille d’évaluation est distribuée à chaque élève en même temps que l’énoncé du problème

La professeure nous décrit oralement le fonctionnement de sa classe : les élèves étaient répartis en groupe, ils pouvaient disposer de matériel (pommes, un couteau...), de dictionnaires, de manuels scolaires et avaient accès à Internet ; elle avait pour objectif que les élèves découvrent comment calculer l’aire d’une sphère ; chacun devait rendre une copie à la fin de la séance. Les copies ont ensuite été rendues aux élèves, annotées et accompagnées de la grille d’évaluation, complétée par l’enseignante suivant quatre niveaux symbolisés par des points rouges ou verts. Après échanges dans l’équipe de mathématiques, on conclut à la nécessité de : 1) évaluer les compétences des élèves en les regardant aussi fonctionner lors de la recherche – insuffisance de l’évaluation de l’écrit – 2) faire en classe un retour collectif sur les démarches des élèves, à partir de leurs productions – insuffisance du retour par quelques annotations sur la copie – 3) nécessité de communiquer aux élèves, de façon plus précise que par la grille, les apprentissages réalisés et ceux à réaliser.

Ainsi l’enseignante aurait pu¹⁰ regrouper les copies en catégories permettant de faire sortir des points essentiels sur la démarche d’investigation, dans le but d’enrichir le milieu par rapport aux savoirs permettant de s’engager dans une démarche scientifique. Il aurait fallu faire une institutionnalisation sur des points essentiels, rencontrés par les élèves, tels que la nécessité de faire des hypothèses de modélisation (le passage d’une pomme à une sphère est discutable...), l’incohérence avec le problème de certaines formules trouvées sur Internet, la nécessité de faire un raisonnement dans un cas général..., mais aussi valoriser les démarches originales de certains élèves qui avaient épluché un quart de pomme, aplati la peau sur une feuille, puis comparé cette surface de peau avec celle de l’empreinte des morceaux de « chair apparente » du quart de pomme. *Faire une institutionnalisation de ce type nécessite une réflexion sur les apprentissages possibles, avant la séance, et réalisés, après la séance.* Notre propre analyse des dix-huit copies permettait de les regrouper suivant quatre catégories. La première catégorie (4 copies) correspondait à une absence d’argument, des réponses qui comportaient des éléments incohérents, dont certains avaient été récoltés sur Internet ; les auteurs n’étaient pas entrés dans une démarche scientifique. Dans la deuxième (6 copies), une argumentation était développée, mais sur un exemple, traité sans allusion à une modélisation

¹⁰ Les propositions de ce paragraphe n’ont pas été communiquées à l’enseignante.

(la pomme était considérée directement comme une sphère). La troisième catégorie (5 copies) regroupait des réponses montrant une entrée dans le problème par un protocole expérimental, plus ou moins développé (voir ci-dessus). Enfin, dans la quatrième catégorie (3 copies), on notait des réponses où l'idée de modélisation était présente, un raisonnement développé dans le modèle de la sphère.

Les préparations évoluent, avons-nous dit, nous n'avons cependant à ce jour aucun élément qui permet d'affirmer que ces intentions (collectives) de communiquer aux élèves sur leurs apprentissages, grâce à un travail construit de retour sur leurs productions (orales ou écrites), se sont traduites par des faits en classe. Nous notons par contre une évolution de la réflexion, allant dans ce sens, ce qu'atteste l'exemple de préparation de cours, proposé à la figure 15 : ce cours concerne une classe de troisième, en octobre 2013. On note une volonté de la professeure d'enrichir le milieu de l'élève relativement à la preuve du vrai ou du faux. Les compétences, visées et requises, sont explicitées, ainsi que les objectifs de la séquence et des éléments de mise en œuvre.

[Des questions] 1) Quel que soit le nombre entier n choisi, $n^2 - n + 11$ n'a que deux diviseurs. 2) La somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3. Compétences visées : - être capable de comprendre un énoncé, - être capable de commencer un travail à partir d'une situation ouverte sans question, - être capable de proposer une conjecture, - être capable de donner un « contre-exemple », - être capable de mener un raisonnement avec du calcul littéral pour justifier une affirmation. Objectifs de la séquence : - se faire une opinion sur une affirmation, - défendre son point de vue avec des arguments valables, - écouter et comprendre le raisonnement d'un autre élève, - aborder la notion de VRAI et FAUX en mathématiques, - aborder la notion de preuve: comment prouver que c'est FAUX, que c'est VRAI, Compétences requises : - être capable d'utiliser une formule, - maîtriser la notion de multiples et diviseurs.	Plan de séquence : 1) Donner la 1ère affirmation : Quel que soit le nombre entier n choisi, $n^2 - n + 11$ n'a que deux diviseurs. Recherche personnelle, remontée des opinions, argumentations, débat, conclusion. 2) Donner la 2ème affirmation : La somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3. Recherche personnelle remontée des opinions, argumentations, débat, conclusion. Evaluation ...
--	---

Figure 15 – Une fiche de préparation, incluant précisément des objectifs d'apprentissage et des compétences, décrites dans le contexte de la séquence envisagée

Une amorce de changement de regard sur l'évaluation

Un premier outil d'évaluation est d'abord élaboré au sein de l'équipe de recherche pluridisciplinaire (elle est constituée de toutes les équipes de recherche disciplinaires, en mathématiques, en sciences de la vie et de la Terre, en sciences physiques et chimiques, en technologie et en éducation physique et sportive ainsi que de chercheurs et formateurs en

sciences de l'éducation). C'est une grille d'évaluation, commune aux différentes disciplines, constituée de sept « compétences », chacune pouvant être située suivant quatre niveaux : correctement mise en œuvre, mise en œuvre mais avec des manques qui n'oblitérent pas la démarche, mise en œuvre mais avec des manques qui rendent la démarche non valable, non mise en œuvre. Cette grille, destinée à devenir un outil pour les élèves, est ainsi rédigée : « 1) Je suis capable de comprendre le problème, de commencer les recherches et de formuler des questions, de modéliser ; 2) Je suis capable d'émettre des hypothèses, des conjectures ; 3) Je suis capable de proposer un protocole et de mettre en œuvre une expérience ; 4) Je suis capable de mener un raisonnement cohérent, de faire une preuve ou de valider une hypothèse ; 5) Je sais communiquer ma démarche par écrit ou par oral ; 6) Je fais preuve d'initiative, d'originalité, d'autonomie ; 7) Je suis capable de rester concentré, de travailler dans le calme. ». L'équipe pluridisciplinaire décide que cette grille constitue un outil à fournir à chaque élève, qui peut ainsi s'autoévaluer, cette autoévaluation étant ensuite validée ou invalidée par l'enseignant(e), qui peut éventuellement ajouter des indicateurs de réussite, compréhensibles par l'élève.

L'équipe de mathématiques décide d'utiliser cette grille, légèrement aménagée, au cours d'une séquence en classe (classes de sixième ou de CM2, élèves de 10 ans et de 11ans) relevant de la démarche d'investigation. L'aménagement évoqué de la grille d'évaluation est léger : le mot d'hypothèse est enlevé du deuxième item, seul le mot de conjecture est conservé ; le quatrième item, excluant la validation en sciences expérimentales, est reformulé en « je suis capable de mener un raisonnement cohérent, de faire une preuve » ; les autres items sont conservés. Nous allons voir que la décision prise collectivement d'utiliser cet outil ne sera pas suivie par tous les enseignants.

En effet, des vidéos de séances, réalisées dans les classes des enseignants de l'équipe de mathématiques, montrent que quatre d'entre eux communiquent aux élèves cette grille d'évaluation, le cinquième dit qu'il la prend en compte dans son enseignement, mais ne la fournit pas aux élèves. Plus précisément, parmi les quatre enseignants qui donnent cette grille aux élèves, deux d'entre eux (nous les appelons Mathilde et Solène) prennent du temps au cours de la séance pour expliciter les différentes compétences en jeu, comme nous le développons ci-dessous, les deux autres la font coller sur la copie, mais ne la commentent pas.

Dans sa classe (de sixième), Mathilde introduit la séance d'investigation en projetant le document de la figure 16, au tableau.

Mathilde accompagne le document projeté du commentaire suivant : « Je vous laisse lire dans vos têtes les six compétences sur lesquelles je vais mettre mon regard particulier par rapport à ce travail que vous allez faire. » Aux élèves qui posent la question, « C'est une évaluation ? », la professeure répond : « C'est pas une évaluation, c'est un travail, une démarche de recherche où on s'entraîne, et je vais voir où vous en êtes. »

Dans sa classe de CM2, Solène, ayant choisi de mettre ses élèves en démarche d'investigation sur le même problème que Mathilde, introduit l'explicitation des compétences par le discours suivant : « Je vais avoir un petit papier pour chacun d'entre vous et je vais regarder plusieurs choses, d'accord ? Donc c'est un petit tableau comme ça [Solène montre le tableau aux élèves, c'est le même que celui de la figure 1]. Je vais regarder si... ». Elle poursuit alors en détaillant chacune des compétences, illustrées par des exemples issus de l'histoire de la classe. A la fin de cette présentation, elle ajoute : « 1, 2, 3, 4 : c'est comme d'habitude, sauf que c'est pas un résultat d'évaluation » : au travers de cette phrase un peu *étrange*, on voit l'amorce d'un changement de point de vue sur l'évaluation. Ainsi explicitée aux élèves, la grille d'évaluation devient un moyen de communiquer aux élèves des savoirs relatifs à la pratique scientifique.

Démarche de recherche.				
Je suis capable de comprendre le problème, de commencer des recherches				
Je suis capable d'émettre des hypothèses, des conjectures				
Je suis capable de mener un raisonnement cohérent, de faire une preuve				
Je sais communiquer ma démarche par écrit ou par oral				
Je fais preuve d'initiative, d'autonomie				
Je suis capable de rester concentré, de travailler dans le calme				

Enoncé:

Quel est le nombre de diagonales d'un polygone?
Autrement dit, donne un moyen qui permette, dès que l'on connaît le
nombre de sommets d'un polygone, de trouver le nombre de ses
diagonales.
Explique ta démarche. (tu laisseras toutes tes recherches)

Figure 16 – La grille d'évaluation est communiquée aux élèves en même temps que l'énoncé. Le mot de conjecture est expliqué.

Nous notons cependant une contradiction entre les intentions affichées de ces enseignantes et leurs discours qui montrent leur positionnement par rapport à l'évaluation : ce sont bien elles qui s'attribuent le rôle d'évaluatrice et rien ne montre que les élèves peuvent être associés à cette évaluation. Ceci apparaît contradictoire avec le fait que la grille (figure 16) affiche le pronom « je » dans la formulation de chacune des compétences, forçant ainsi, de manière naïve, l'enrôlement de chaque élève dans sa propre évaluation. Ceci nous conduit à dire qu'il y a détournement de l'outil d'évaluation, puisque cette grille, initialement destinée à l'élève, est, dans les faits, utilisée exclusivement par le professeur. Ceci concerne chacun des enseignants de l'équipe qui donnent la grille aux élèves. Nous pensons que cette contradiction entre intentions pédagogiques et actions en classe est la marque d'une certaine déstabilisation de ces enseignants qui, pensons-nous, ont eux-mêmes des difficultés à repérer des indices leur permettant d'évaluer ces compétences. Mettre en place en classe une évaluation de ces compétences par les élèves eux-mêmes les amènerait nécessairement à un débat sur le sens des savoirs et savoir-faire sous-jacents tels que comprendre un problème¹¹, commencer des recherches, émettre des conjectures... ; débat qu'ils ne se sentent pas capables d'animer, peut-être par manque d'assurance sur le plan épistémologique.

Un tel débat permettrait en effet de lever certains *malentendus* comme le montre la production de Léa (figure 17). Cette copie comporte des annotations de la part de l'enseignante ; on peut penser que celle qui concerne « la conjecture » ne suffira pas à faire comprendre à Léa ce qu'est une conjecture, ni le statut d'un tel énoncé dans la pratique en mathématiques. C'est plutôt un retour en classe, de manière construite, comme nous en avons parlé précédemment à propos du « quart de pomme », qui aurait pu permettre de lever ces malentendus, visibles dans la copie, sur la nature de l'activité mathématique. Léa a distingué trois questions dans le problème posé (elle les a numérotées) et elle répond consciencieusement à chacune d'elles. Pour elle, la démarche consiste à « chercher dans l'agenda et dans le dictionnaire ». Au cours d'un tel débat, engagé au cours de la séance, on aurait pu renvoyer à toute la classe l'idée de Léa concernant la question posée, à savoir

¹¹ Ce qui n'est pas la même chose que comprendre un énoncé.

« diviser le nombre de sommets par deux », et dégager ainsi une preuve du faux avec un contre-exemple.

le 08 Avril Léa

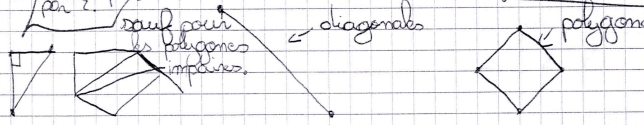
Démarche de recherche.

Je suis capable de comprendre le problème, de commencer des recherches	X		
Je suis capable d'émettre des hypothèses, des conjectures	X		
Je suis capable de mener un raisonnement cohérent, de faire une preuve			
Je sais communiquer ma démarche par écrit ou par oral		X	
Je fais preuve d'initiative, d'autonomie			
Je suis capable de rester concentré, de travailler dans le calme	X		

Enoncé:

- 1) Quel est le nombre de diagonales d'un polygone?
- 2) Autrement dit, donne un moyen qui permette, dès que l'on connaît le nombre de sommets d'un polygone, de trouver le nombre de ses diagonales.
- 3) Explique ta démarche. (tu laisseras toutes tes recherches)

1) Un polygone a ~~des~~ ^{plusieurs} diagonales } qui

2) On prend le nombre de sommets et on fait ~~la~~ diviser le nombre de sommets par 2.


3) J'ai cherché dans l'agenda et dans le dictionnaire.

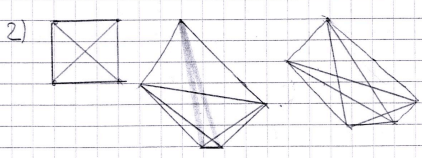
2) 
 C'est une conjecture
 Comment es-tu arrivée à cela?
 Essaie de voir si ça marche

Figure 17 – Une copie d'élève de sixième, sur le problème du nombre de diagonales d'un polygone.

Des situations pertinentes pour la mise en investigation des élèves, mais des difficultés à gérer la complexité introduite naturellement par les élèves

Les enseignants ayant choisi de mener une séance d'investigation sur le problème du nombre de diagonales d'un polygone (voir, figure 17, le problème tel qu'il a été posé), nous avons constaté, à partir des vidéos réalisées dans cinq classes, que la plupart des élèves entrent, de façon naturelle, dans le problème, *par la complexité*, en tentant de compter les diagonales de polygones non convexes ou comportant un grand nombre de côtés. Nous donnons des exemples ci-dessous (figure 18).

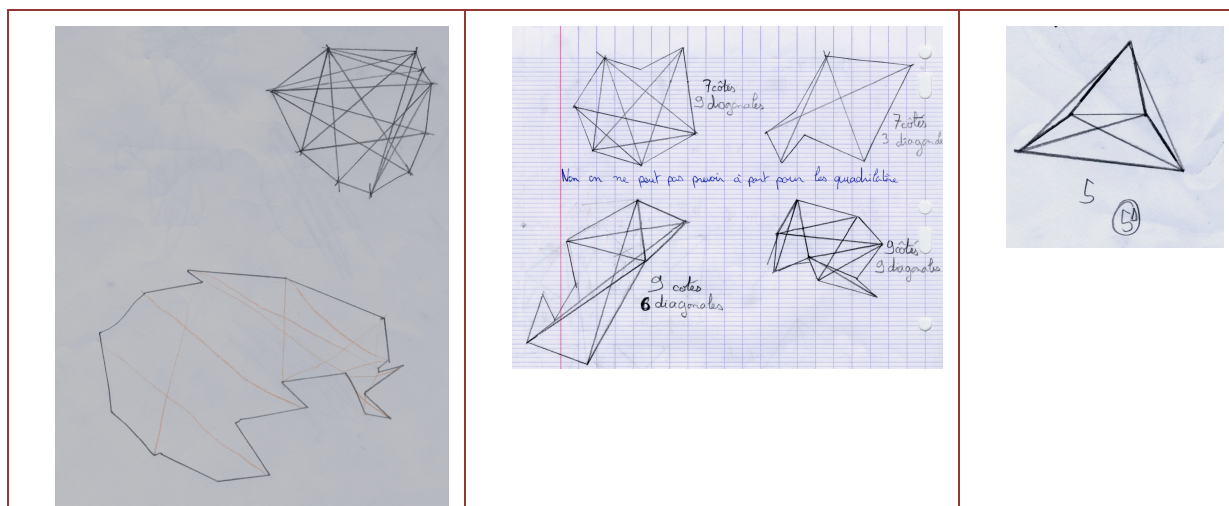


Figure 18 – Trois extraits de copies d'élèves de CM2 : les élèves introduisent naturellement de la complexité.

Nous insistons sur le fait que cette entrée par la complexité est naturelle et normale pour les élèves qui débutent dans la démarche expérimentale en mathématiques. Sur ce plan en effet, étant donnée la faible potentialité du milieu didactique de l'élève (dans chacune des classes), l'élève ne peut pas saisir ce qu'est un *cas simple, pertinent dans ce problème*.

Or on note, dans chacune des séances, la difficulté du professeur à gérer cette complexité, qu'il cherche à éliminer en fermant la situation, comme en témoigne cet extrait de la séance de Solène, dans sa classe de CM2. La professeure fait la remarque suivante à un élève qui a dessiné un hexagone non convexe : « Alors ceux-là, tu vois, euh, de polygones, on va pas s'en occuper parce que ceux-là, ils sont un peu particuliers, parce que, tu vois..., là, je peux faire une... euh... diagonale, là, entre là et là... Non, c'est pas une diagonale d'ailleurs... Si, c'est une diagonale, là, il y a un point... là, il y a un point, là il y a un point, là, tu peux faire une diagonale, mais elle est pas dans la figure. Ça, c'est un polygone, un peu particulier. On va pas faire avec ceux-là. Nous, on va faire que... avec des polygones, tu vois, qui sont comme ça, et les diagonales, elles sont à l'intérieur du polygone. D'accord ? » Cette remarque sera réitérée à destination d'autres élèves de la classe qui ont considéré aussi des polygones non convexes. Ainsi Solène tente d'éliminer, dans les cas étudiés par les élèves, ceux des polygones non convexes, qui sont effectivement plus complexes, mais qui sont néanmoins pris en compte dans la preuve générale. De la même façon, Tom dans sa classe, tente de dissuader une élève d'étudier un polygone à douze sommets : « Pourquoi tu passes pas par des choses plus simples ? ». Jean, quant à lui, dit à toute la classe : « Commencez par des polygones simples... ». Il écrit cette phrase au tableau et dessine également un triangle, un quadrilatère, un pentagone... Plus tard dans la séance, il essaie de dissuader un groupe de filles qui se lance dans l'étude d'un polygone à dix-huit sommets : « Arrêtez les filles de faire compliqué... ». Il ne cesse ensuite de dire aux élèves qu'ils rendent les choses *encore plus compliquées*. Ces injonctions et ces remarques ne peuvent pas être comprises par les élèves. Dans l'action, les enseignants ne se rendent pas compte que, d'une part, les élèves ne peuvent pas comprendre cette injonction de *faire simple*, d'autre part, qu'ainsi ils *tuent la situation*, puisqu'ils disent comment faire. Leurs gestes professionnels vont ici à l'encontre de l'objectif d'apprentissage qui est de faire comprendre l'intérêt de réfléchir au type de cas particuliers que l'on va étudier en premier. Les enseignants auraient pu engager un débat, en confrontant, pour toute la classe, *des études de cas compliqués, sans recherche de méthode (généralisable)* et des *indices de méthodes intéressantes*, relevés dans les productions des élèves (figures 19 et

20). Beaucoup d'élèves, en effet, n'avaient pas encore compris qu'ils cherchaient une généralité. Celle-ci pouvait se dégager, soit du repérage d'une régularité dans la suite, dont le terme général est le nombre de diagonales d'un polygone en fonction du nombre de ses sommets (figure 20), soit de la découverte d'une méthode de comptage des diagonales, elle-même liée à l'observation des diagonales *issues d'un même sommet* (figure 19).

Or il est clair que la plupart des élèves ne peuvent acquérir *ce savoir-faire de choix pertinent des cas particuliers à étudier*, sans que cette connaissance heuristique ait été *construite* et *institutionnalisée*, au moins partiellement dans le contexte de ce problème. Cette institutionnalisation aurait pu être faite dans chacune des classes, en conclusion d'un débat s'appuyant sur des productions d'élèves.

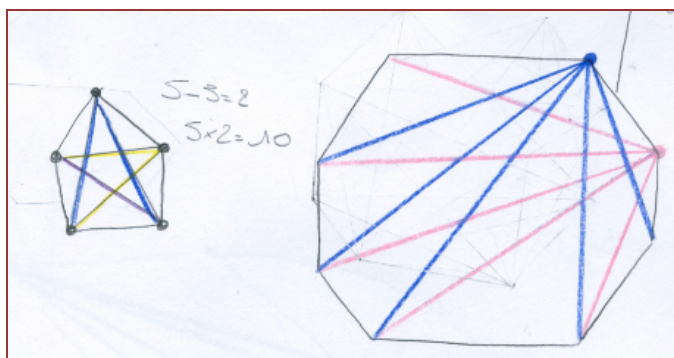


Figure 19 – On peut repérer dans cette production d'élève de CM2 une utilisation de la couleur comme une méthode de raisonnement, qu'il aurait été pertinent de faire partager à toute la classe.

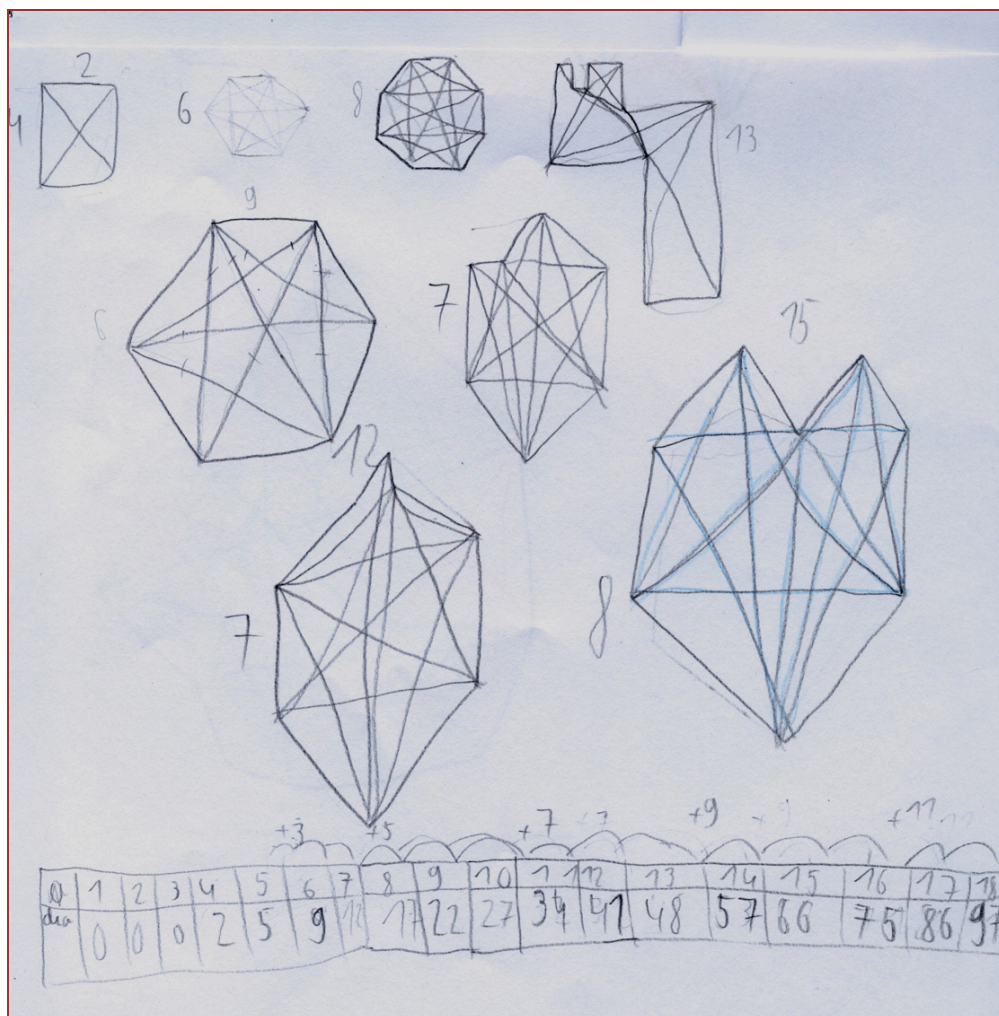


Figure 20 – On peut relever dans cette production d'élève de CM2 l'idée de repérer une généralité derrière les différents cas particuliers observés.

Conclusion

Ces deux exemples de modalités de travail collaboratif entre enseignants et chercheurs, rassemblés autour du projet de permettre aux élèves une pratique d'investigation scientifique, ont montré des effets sur les élèves, mais aussi sur les enseignants.

Dans un *atelier MaM*, les élèves sont amenés à présenter un problème et *défendre* les résultats qu'ils ont obtenus, devant un public extérieur à la classe. Ils reconnaissent eux-mêmes qu'au cours d'un tel atelier ils sont sans cesse confrontés à la preuve, à la question « Pourquoi ? ». Les bilans faits avec les élèves sont positifs (Pastori, 2013). La complexité engendrée par les investigations des élèves est, dans ce cas, gérée par le chercheur, accoutumé à l'incertitude. Certains enseignants demandent des formations sur la gestion de cette complexité.

Celle-ci revient complètement aux enseignants lorsqu'ils engagent leurs élèves dans des démarches d'investigation, dans un dispositif de cours habituel. C'est ce cas qui est au cœur du deuxième exemple que nous avons présenté, avec le LéA EvaCoDICE. Le travail de réflexion sur ce type d'enseignement, de préparation et d'analyse de séances, en collaboration avec d'autres enseignants, de chercheurs et de formateurs, contribue à une évolution de leurs pratiques. Même si ce deuxième exemple montre que les actions des enseignants en classe ne

sont pas encore en adéquation avec leurs intentions, des avancées sont toutefois constatées dans la capacité des enseignants à innover et *ouvrir* certaines séances aux investigations des élèves. Il semble que la façon de mener les réunions avec les enseignants, à la manière d'une démarche d'investigation, ait une influence sur leur ressenti positif par rapport à ce projet de recherche et aux expérimentations dans leurs classes. Le travail sur l'évaluation est cependant à poursuivre pour que ces séances d'investigation soient efficaces concernant les apprentissages des élèves. Les points à travailler particulièrement sont, d'une part, l'interprétation par les enseignants des données produites par les élèves au cours de la séance, d'autre part, leur utilisation de cette interprétation, par rapport aux objectifs d'apprentissage, à viser dans la séance d'investigation. Enfin il faut également rendre opérationnelle la communication aux élèves de cette interprétation opérée par les enseignants, afin de favoriser l'autoévaluation des élèves.

Bibliographie

- Coppé S. (2013), « Effets du travail collaboratif sur la pratique d'enseignement : étude de cas d'une enseignante de mathématiques en collège. », *Les enseignants de sciences face aux démarches d'investigation, Des formations et des pratiques de classe*, M. Grangeat (dir.), Grenoble, Presses Universitaires de Grenoble, p.115-125.
- Gandit M., Balicco M.-P., Gravier S. & Modeste S. (à paraître) Petits cubes et baguettes, instruments de compensation du handicap ou inducteurs de résolution, *Actes des Journées de Chamonix « Jouer ou apprendre ? Les jeux dans l'éducation et la médiation scientifiques*, 21-24 mai 2013.
- Gandit M., Giroud N. & Godot K. (2011), « Les situations de recherche en classe : un modèle pour travailler la démarche scientifique en mathématiques », *Les démarches d'investigation dans l'enseignement scientifique. Pratiques de classe, travail collectif enseignant, acquisition des élèves*, M. Grangeat (dir.), Lyon, Ecole normale supérieure, p.38-51.
- Gandit M., Triquet E. & Guillaud J.-C. (2012), « Des représentations sur les démarches d'investigation aux pratiques de classe : le cas d'enseignants débutants en mathématiques et en sciences expérimentales », *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone (EMF) 2012*, Groupe de Travail n°10 : La démarche d'investigation dans la classe : fondements et pratiques. Genève, 3-7 février 2012, <http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012>, consulté le 20 juillet 2013.
- Gandit M., Triquet E. & Guillaud J.-C. (2013), « Séances d'investigation en classe en mathématiques et en sciences expérimentales », *Symposium Pratiques enseignantes et démarches d'investigation en sciences*, In G. Gueudet (dir.), *Actes du colloque Formes d'éducation et processus d'émancipation*, mai 2012. Rennes, http://python.bretagne.iufm.fr/recace/fepe_2012/plage_4.html, consulté le 20 juillet 2013.
- Giroud, N. (2011). Etude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe, thèse de doctorat, Université de Grenoble, 381 p.
- Grenier D. (2009), « Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes », In L. Coulanges & C. Hache (dirs.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, Paris, ARDM et IREM de Paris7.
- Grenier D. & Payan C. (2002), « Situations de recherche en classe : essais de caractérisation et proposition de modélisation », *Cahiers du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques*, Paris, Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.
- Gueudet G. & Lebaud M.-P. (2013), « Démarches d'investigation en sciences, collectifs dans la formation des enseignants : enquête sur un lien complexe. », *Les enseignants de sciences face aux démarches d'investigation, Des formations et des pratiques de classe*, M. Grangeat (dir.), Grenoble, Presses Universitaires de Grenoble, p.95-113.

- Legrand M. (1990), « Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique », *Recherches en didactique des mathématiques*, 9/3, p.365-406.
- OECD (2000), *Measuring Student Knowledge and Skills: A new Framework for Assessment*, Paris, OECD.
- Pastori M. (2013), « Faire pratiquer une démarche d'investigation en classe en mathématiques : un exemple de coopération entre enseignants et chercheurs », *Les enseignants de sciences face aux démarches d'investigation, Des formations et des pratiques de classe*, M. Grangeat (dir.), Grenoble, Presses Universitaires de Grenoble, p.45-58.
- Triquet E, Gandit M & Guillaud J.-C. (2012), « Démarches scientifiques, démarches d'investigation en sciences expérimentales et en mathématiques. Evolution des représentations d'enseignants débutants de l'IUFM à l'issue de la formation. », *Didactique des sciences et démarches d'investigation. Références, représentations, pratiques et formation*, B. Calmettes (dir.), L'Harmattan, p.119-150.