REMI BRISSIAUD

L'EFFONDREMENT DES PERFORMANCES EN CALCUL ENTRE 1987 ET 1999 : QUELLE EPIDEMIOLOGIE ?

remi.brissiaud@univ-paris8.fr

Laboratoire Paragraphe (Université Paris 8 – Saint-Denis), Équipe « Compréhension, Raisonnement et Acquisition de Connaissances »

Résumé
Les performances en calcul des élèves de CM2 se sont effondrées entre 1987 et 1999 (Rocher, 2008). Des arguments issus de l'histoire des discours et des pratiques pédagogiques, de la psychologie des apprentissages numériques, de la psychologie clinique et différentielle et de la psychologie interculturelle, conduisent à incriminer un basculement dans les choix didactiques de l'école française à partir de 1986. Alors que l'enseignement du comptage-numérotage (Brissiaud, 1989, 2007) était honni avant cette date, il s'est généralisé après. La fin du texte est consacrée à une analyse didactique du concept de numérotation. Elle est fondamentale parce que, sans une telle analyse, il est difficile de prendre conscience du fait que le comptage-numérotage est un « schème dangereux ».

Introduction

Ce texte rapporte ce qui a été présenté au séminaire national de didactique des mathématiques de mars 2013 et il s'articule autour d'une notion fondamentale : celle de comptage-numérotage ou encore de numérotation (Brissiaud, 1989, 2007). Dans sa dernière partie, il contient également une réponse aux (rares) objections émises lors de ce séminaire ainsi que le développement d'une partie qui, faute de temps, n'avait pas pu être présentée de façon détaillée ce jour là : la notion de comptage-numérotage n'a guère été étudiée jusqu'ici dans les travaux de didactique des mathématiques, et cela doit vraisemblablement être considéré comme une faiblesse de l'approche didactique des premiers apprentissages numériques.

Un effondrement des performances en calcul qui se produit entre 1987 et 1999

Les performances en calcul des élèves de CM2 français étaient bonnes en 1987 mais elles se sont effondrées entre 1987 et 1999 (Rocher, 2008). Ensuite, entre 1999 et 2007, elles ont stagné à ce très bas niveau (en fait, elles baissent encore, mais de manière non significative). Ainsi, une multiplication telle que 247 x 36 était réussie par 84% des élèves de CM2 en 1987 ; l'addition en colonnes de trois nombres 19 786 + 215 + 3 291 était réussie par 94% de ces mêmes élèves. Dans un cas comme dans l'autre, il sera difficile de faire mieux à l'avenir parce que de tels taux de réussite sont élevés et, à partir d'un certain score, il est difficile de progresser encore (cf. la notion *d'effet plafond*). En 1987, les élèves calculaient encore bien et ce serait déjà un beau progrès de retrouver les performances d'alors. En 2007, en effet, le taux de réussite à la même multiplication n'est que de 68% (84% auparavant) et celui de la même addition de 83% (94% auparavant) : même les additions, une opération dont les élèves de CM2 répètent l'exécution depuis bien longtemps, sont moins bien réussies.

Parler d'*effondrement* ne relève en rien d'une rhétorique catastrophiste : entre 1987 et 1999, la moyenne des performances des élèves de CM2 a baissé de 66% de l'écart-type initial. Or, il est légitime de s'inquiéter à partir de 20% et, dans d'autres enquêtes du même type, une année d'apprentissage correspond à environ 50%. Ainsi, c'est donc l'équivalent de plus d'une année d'apprentissage que les élèves de CM2 ont perdu entre 1987 et 1999.

À l'école maternelle, un basculement des choix didactiques s'effectue en 1986

Le basculement qui va être évoqué dans ce texte est daté de 1986 parce que son premier jalon est la publication cette année-là d'une circulaire pour l'école maternelle (MEN, 1986) dans laquelle on lit : « *Progressivement, l'enfant découvre et construit le nombre. Il apprend et construit la comptine numérique.* » La présence d'une telle phrase dans un texte institutionnel constituait une rupture importante. En effet, les élèves qui étaient en CM2 en 1987, ceux qui calculaient bien mieux qu'aujourd'hui, eux n'avaient eu aucun apprentissage numérique avant novembre au CP : ni à l'école maternelle, ni au début du CP. Ils avaient fréquenté une école maternelle très influencée par les travaux de Jean Piaget et les pédagogues d'alors pensaient qu'enseigner les nombres à l'école maternelle ne pouvait conduire qu'à une sorte de dressage.

Cette position était fondée sur des observations telles que celle qui est rapportée ci-après. Jean Piaget et Bärbel Inhelder (1963) proposent une « tâche de conservation » à un enfant : 5 jetons rouges sont alignés et 5 bleus sont mis en correspondance terme à terme avec les rouges avant que l'expérimentateur écarte les bleus afin de former une rangée plus longue. Un enfant, interrogé sur la rangée la plus nombreuse après cette transformation, se met à compter les jetons. Jean Piaget et Bärbel Inhelder rapportent les propos de cet enfant avant de les analyser :

> « Ça fait 1, 2 , 3 , 4 , 5 ici », nous dit un sujet de 4 ans et : « 1, 2, 3, 4, 5 là, mais ça fait quand même plus là. (en montrant la rangée la plus longue) » Dans cet exemple, les noms de nombre 1 à 5 ne constituent qu'un moyen pour individualiser les éléments, mais n'entraînant ni la conclusion que le tout est égal à la somme des parties, ni par conséquent la conservation de ce tout. Or, sans additivité ni conservation, on ne saurait parler de nombres ! »

Ainsi le comptage, parce qu'il n'a pas la propriété d'être « additif » chez les jeunes enfants (2 = 1 + 1 ; 3 = 2 + 1 ; 4 = 3 + 1 ; 5 = 4 + 1, etc.), et parce qu'il ne conduit pas à la conservation, s'est trouvé banni de l'école maternelle jusqu'en 1986.

En revanche, aujourd'hui, les élèves apprennent à compter à l'école dès la petite section, à 3 - 4 ans. Dans les programmes de 2008 pour l'école maternelle, on lit qu'à la fin de Grande Section, l'enfant est capable de :

- mémoriser la suite des nombres au moins jusqu'à 30 ;
- dénombrer une quantité en utilisant la suite orale des nombres connus ;
- associer le nom des nombres connus avec leur écriture chiffrée ;

Afin que leurs élèves apprennent à lire et écrire les nombres dès l'école maternelle, les enseignants de GS de maternelle utilisent presque tous aujourd'hui une file numérotée jusqu'à 30[1]. Ce sont ces élèves-là qui, arrivés en CM2, calculent beaucoup moins bien que leurs prédécesseurs.

[1] Dans le rapport n°2011-108 de l'inspection générale consacré à l'école maternelle, il est indiqué qu'à cette date (2011) une file numérotée est affichée dans presque toutes les classes dès la petite section de maternelle.

Le basculement concernant les additions élémentaires

Rappelons que les élèves qui, en 1987, calculaient encore bien en CM2, n'avaient eu aucun apprentissage numérique en maternelle. Or, même au CP, leurs apprentissages numériques commençaient tardivement. Dans l'ouvrage Ermel (1977), il était recommandé de les faire commencer vers février au CP et dans le fichier le plus utilisé à l'époque (Eiler, 1977) la leçon sur les nombres 1, 2 et 3 s'effectuait en novembre au CP et celle sur le nombre 10, en janvier au CP. Et dans cet ouvrage, les nombres étaient étudiés l'un après l'autre entre 4 et 10 en mettant l'accent sur leurs décompositions : 4 = 3 + 1 ou 4 = 2 + 2 ou… ; 5 = 4 + 1, etc.

En fait, vers le milieu du siècle dernier, le rejet du comptage et l'accent mis sur les décompositions des nombres, constituaient un choix didactique fondamental de l'école française. On s'en rend compte en lisant un extrait d'un rapport rédigé sous la direction de Gaston Mialaret, l'un des fondateurs des Sciences de l'Éducation en France, ex président du GFEN et, plus généralement, très engagé dans le mouvement de l'Éducation Nouvelle. Il a été publié sous l'égide de l'UNESCO, suite à ce que Gaston Mialaret (1955) présente comme une « *réunion d'experts chargés d'étudier et de résumer les principes pédagogiques fondamentaux de l'initiation au calcul* » (page 3). Soyons encore plus précis : la citation qui suit est d'Henri Canac, sous-directeur de l'ENS de Saint-Cloud. On retrouve en effet le même extrait dans plusieurs de ses écrits précédents (par exemple : Canac, 1955). Il s'exprime ainsi à propos des élèves dont on dit aujourd'hui qu'ils sont fragiles, ceux qui mettent particulièrement en difficulté notre école :

> « Dans de nombreux cours élémentaires, ou même cours moyens, on trouve souvent de grands benêts qui comptent sur leurs doigts (en cachette lorsque M. l'Inspecteur est là) ou qui, sommés de résoudre une simple opération, comme 8 + 5, se récitent intérieurement à eux-mêmes : 8, 9, 10, 11, 12, 13 en évoquant des doigts imaginaires. Au vrai, avec ces élèves mal débutés … »

Aujourd'hui, dès décembre au CP, les enfants disposent le plus souvent d'un moyen leur permettant d'obtenir le résultat d'une addition élémentaire (quand le nombre ajouté < 10) dans le domaine des 30-50 premiers nombres. On trouve dans la figure 1, un exemple de leçon correspondante, extraite d'un fichier dont la collection n'existe plus aujourd'hui mais qui est représentatif de ce qui se fait encore le plus couramment, du moins concernant l'usage de la file numérotée.

Ce type de séquence ne figurait dans aucun manuel ou fichier de CP français avant 1986[2] ; aujourd'hui, l'usage de la file numérotée qui y est décrit figure dans presque tous les manuels, fichiers, logiciels, etc. C'est celui qui est véhiculé par la Kahn Academy, un cours en ligne états-unien (MOOC), récemment traduit en français et dont la parution a eu beaucoup d'échos dans les médias. La préconisation d'un comptage sur les mains est également présente dans diverses aides pédagogiques mais elle est moins fréquente ; en fait, cela importe peu : lorsqu'un enfant a appris à trouver le résultat d'une addition à l'aide d'une file numérotée et lorsqu'il n'a plus cet outil à disposition, il le remplace par ses doigts.

Dans une très large majorité de CP français, aujourd'hui, une file numérotée est affichée dans la classe et les enfants l'utilisent comme c'est indiqué dans la leçon précédente pour trouver le résultat d'une addition. Cet usage de la file numérotée faisait même partie du contenu des programmes de 2002. Ainsi, l'un des objectifs du cycle 2, était rédigé ainsi :

> Déterminer, par addition ou soustraction, la position atteinte sur une ligne graduée après un déplacement en avant ou en arrière.

---

[2] Ceci a été vérifié sur l'ensemble du fond du musée de l'Éducation de Saint-Ouen l'Aumône dans le Val d'Oise. En fait, le premier fichier comportant une telle file date de 1985 et ses auteurs font partie de l'équipe Ermel qui va promouvoir son usage.

On est donc face à un phénomène peu banal : en commençant leurs apprentissages numériques bien plus tardivement qu'aujourd'hui, les élèves de 1987 calculaient bien mieux qu'aujourd'hui. Et les pratiques pédagogiques des enseignants reposent souvent aujourd'hui sur des choix didactiques honnis vers le milieu du siècle dernier. On est évidemment conduit à penser que les pédagogues du milieux du siècle dernier, ceux qui étaient influencés par l'Éducation Nouvelle, avaient plutôt raison. Si c'est le cas, cela s'explique-t-il ?

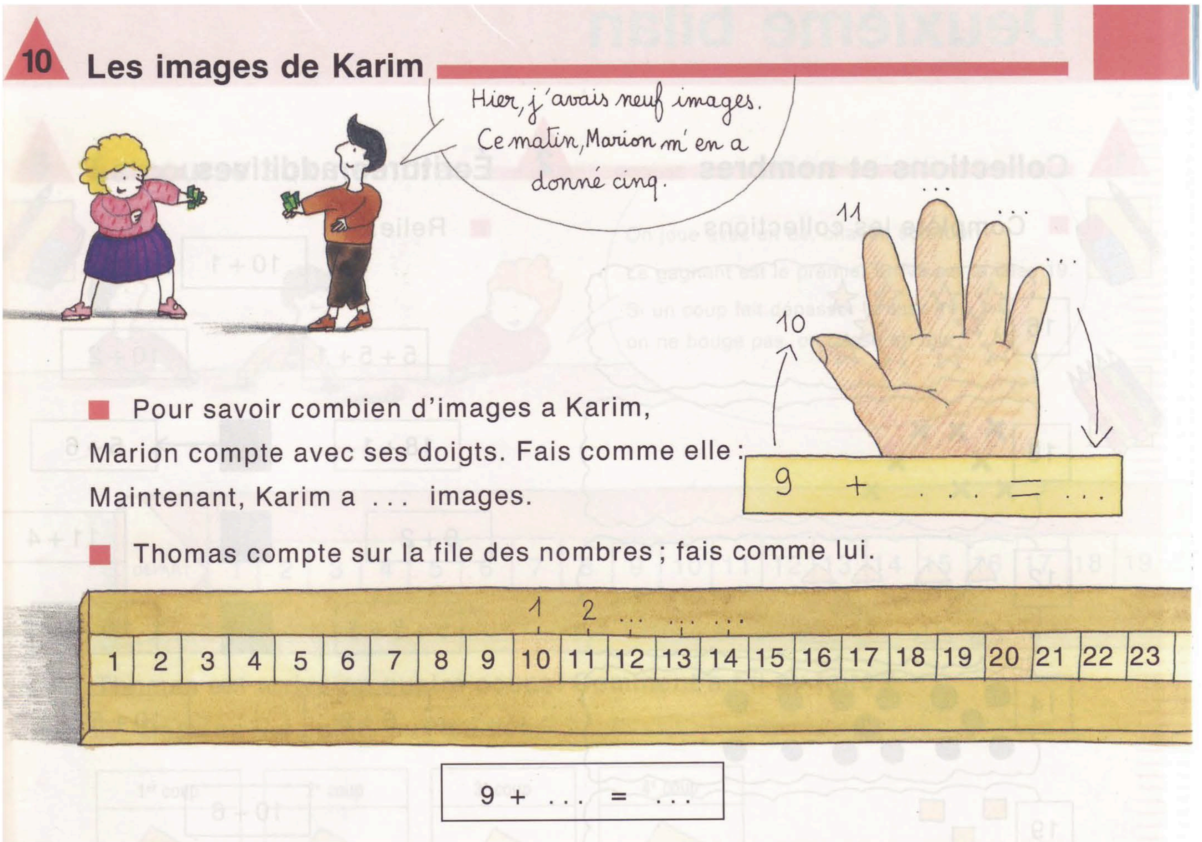

Figure 1 : exemple de leçon explicitant l'usage d'une file numérotée

Pourquoi le basculement de 1986 est susceptible d'expliquer l'effondrement des performances en calcul

Une description très détaillée des conditions de ce basculement se trouve dans Brissiaud (2013). Signalons seulement qu'il provient de l'utilisation, par une seconde équipe Ermel, des travaux d'une psychologue états-unienne, Rochel Gelman (Gelman & Gallistel, 1978 ; Palanque et col, 1987 ; Ermel, 1990). Cette chercheuse pensait que l'usage de ce qu'elle appelait les « *principes* » du comptage, relevait d'une compétence extrêmement précoce, voire innée. Or, le comptage qu'elle a analysé ainsi en divers *principes*, est le comptage tel qu'il s'enseigne dans les familles, celui où l'on insiste sur la correspondance 1 mot – 1 unité.

La notion de comptage-numérotage

Enseigner le comptage « à la Gelman » ou selon le sens commun est loin de permettre aux enfants d'accéder facilement au nombre. Ainsi, en PS et en MS, on observe très fréquemment le dialogue suivant (Schaeffer & col, 1974) :

Adulte : Combien y a-t-il de jetons ?
Enfant (en comptant les jetons) : « un », « deux », « trois », « quatre ».

Adulte : Oui, alors combien y a-t-il de jetons ?
Enfant (recompte les jetons) : « Un », « deux », « trois », « quatre ».
Adulte : Je suis d'accord, mais ce que je t'ai demandé, c'est combien il y a de jetons ?
Enfant (recompte encore) : « Un », « deux », « trois », « quatre ».

Cet enfant met bien en correspondance terme à terme les mots-nombres et les jetons de la collection (il respecte le « principe » de correspondance terme à terme), mais il n'isole pas le dernier mot-nombre prononcé pour répondre à la question posée. L'enfant reste apparemment incapable d'exploiter ce comptage pour répondre à la question : « Combien… ? ». Son comptage ne lui permet pas d'accéder au nombre. On peut dire : *son comptage n'est pas un dénombrement*.

Pour comprendre ce phénomène, il suffit d'imaginer un autre contexte où l'enfant pointe des objets en disant des mots tous différents : «cube», «table», «fenêtre», «toboggan», par exemple. Le dernier mot prononcé, «toboggan», réfère à l'objet qui est pointé au moment où ce mot est prononcé (le toboggan), il ne dit rien des autres objets, ni de l'ensemble des objets. Or, lors d'un comptage «à la Gelman», le dernier mot, «quatre», est prononcé alors que l'enfant pointe le dernier objet, comme dans l'exemple précédent, mais dans ce cas l'enfant devrait comprendre que «quatre», pour l'essentiel, ne réfère pas à cet objet parce qu'il désigne une propriété de l'ensemble des objets : ce mot précise quelle est la pluralité que l'enfant a devant lui, il dit le nombre d'unités de la collection. Pointer un objet tout en prononçant un mot, alors que celui-ci désigne pour l'essentiel une propriété d'autre chose, correspond à un fonctionnement du langage complètement atypique (Markman, 1989 ; 1990). À vrai dire, on ne l'observe que dans le contexte de l'enseignement du comptage «à la Gelman».

C'est donc l'insistance des pédagogues sur la correspondance 1 mot - 1 élément qui explique l'incompréhension des enfants : elle les conduit à concevoir les éléments successivement pointés comme «*le un, le deux, le trois, le quatre…*». Les mots prononcés sont alors des sortes de numéros renvoyant chacun à un élément et un seul ; le dernier mot prononcé est lui aussi un numéro, comme les autres. Ainsi, enseigner le comptage «à la Gelman», selon la pédagogie de sens commun, c'est enseigner ce que j'ai appelé un comptage-numérotage (Brissiaud, 1989 ; 2007).

On dispose de nombreuses preuves empiriques du fait qu'un enseignement du comptage basé sur une théâtralisation de la correspondance 1 mot – 1 objet, conduit les enfants à considérer les mots-nombres comme des sortes de numéros. Ainsi, lorsque des enfants de 4 ans et demi environ viennent de compter 7 objets et lorsqu'on leur demande de montrer les 7 objets, en insistant sur la marque du pluriel (les), 75% d'entre eux montrent quand même un seul objet : le dernier pointé (Fuson, 1988). Lorsqu'on demande à des élèves de GS de rédiger un message écrit afin de ne pas oublier combien il y a d'objets dans une collection de 7 objets qu'ils viennent de compter, ils dessinent : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, c'est-à-dire l'ensemble des numéros qu'ils viennent d'utiliser (Sinclair & col, 1988 ; Brissiaud, 1989).

L'enseignement du comptage-numérotage permet de résoudre de nombreux problèmes mais il éloigne du calcul

Nous verrons dans la dernière partie de ce texte que l'usage d'un comptage-numérotage permet de réussir les diverses tâches correspondant à ce qu'en didactique des mathématiques, on appelle, improprement à mon sens, la « *situation fondamentale du dénombrement* ». En fait, le comptage-numérotage permet de réussir des tâches encore plus générales : celles de comparaison. Ainsi, s'il s'agit de comparer deux collections de 4 et 5 unités respectivement, on observe certains enfants qui comptent la première en disant : 1, 2, 3, 4 , sans être capable de dire le nombre correspondant ; mais cela ne les empêche pas de se tourner vers l'autre collection en disant : 1, 2, 3, 4, 5, sans non plus dire le nombre. Dans l'un et l'autre cas, ils ne savent pas répondre à la question « Combien y a-t-il… ? » et pourtant, ils concluent correctement en disant que la collection « 1, 2, 3, 4, 5 » est plus nombreuse que la collection « 1, 2, 3, 4 » : ils ont compris que lorsque le comptage numérotage « va plus loin » ou « dure plus longtemps », on peut dire : « Il y a plus là que là » (Droz & Paschoud, 1981). Cet exemple montre que le comptage-numérotage est un outil culturel qui permet de résoudre de nombreux problèmes.

Cependant, l'enseignement du comptage-numérotage renforce la signification des mots-nombres en tant que numéros et, donc, ne favorise pas l'accès à leur signification en tant que noms de nombres, désignant des pluralités. Or, seule cette dernière signification permet d'accéder au calcul. En effet, l'entrée dans le calcul est évidemment impossible tant que les enfants n'ont pas compris que les mots qu'ils utilisent pour compter désignent des pluralités successivement engendrées par l'ajout d'une unité : «*deux, c'est un et encore un*» ; «*trois, c'est un, un et encore un*» ou bien : «*trois, c'est deux et encore un*», «*quatre, c'est trois et encore un*», «*cinq, c'est quatre et encore un*», etc. L'entrée dans le calcul est impossible tant que le comptage n'a pas la propriété d'additivité, c'est-à-dire tant qu'il n'est pas un authentique comptage-dénombrement (Brissiaud, 2004). Faire le choix d'enseigner le comptage numérotage, c'est contraindre les enfants à s'approprier les nombres et le calcul alors que l'on fait un usage des mots qui masque ce qu'il est crucial d'apprendre, la propriété d'additivité du comptage. C'est contraindre les enfants à un apprentissage implicite des nombres et du calcul.

L'enseignement du comptage-numérotage est à l'origine d'effets Jourdain

Une preuve du fait qu'un tel apprentissage n'est pas toujours guidé par la compréhension est qu'il conduit à des absences de généralisation tout à fait surprenantes : même lorsque deux tâches semblent de difficultés équivalentes parce qu'elles ne diffèrent que très légèrement, il ne suffit pas que l'une ait été entraînée et, donc, soit bien réussie, pour que la seconde le soit également. Ainsi, dans une recherche récente, Sarnecka & Carey (2008) s'adressent à des enfants qui ont entre 2 ans 10 mois et 4 ans 3 mois ; elles leur demandent combien il y a d'objets dans une collection de 10 objets. Sur les 67 enfants interrogés, 53 comptent correctement les 10 objets et répètent le dernier mot prononcé : «dix». On pourrait donc croire que ces 53 enfants comprennent les 10 premiers nombres. Or, plus d'un tiers d'entre eux, face à un stock de cubes, échouent la tâche «Donne moi 5 cubes» ; ils en donnent une poignée au hasard, par exemple (certains échouent lorsqu'on leur demande de donner 3 cubes !). La réussite à la tâche « Combien… » est loin d'assurer celle à la tâche « Donne moi… »..

Ainsi, dans un premier temps, lorsque les enfants répètent le dernier mot de leur comptage-numérotage pour le fournir comme réponse à la question « Combien… », certains utilisent ce que Karen Fuson (1988) a appelé une « *règle du dernier mot prononcé* » : l'enfant répète le dernier numéro parce qu'on lui a fait comprendre qu'il fallait le faire. C'est le genre de phénomène que Guy Brousseau a appelé un « effet Jourdain » : l'enfant semble utiliser des connaissances de haut niveau (les nombres) alors qu'il ne fait que répondre en répétant le numéro attendu. Certains enfants se comportent ainsi sans même avoir compris que ce numéro, parce qu'il signale la fin du comptage-numérotage, permet de coder « en acte » la taille de la collection.

Et quand l'enfant réussit la tâche « Donne-moi N éléments », peut-on en déduire qu'il a compris les N premiers nombres ? Pas plus ! Considérons en effet cette autre tâche qui est un moyen d'évaluer une certaine connaissance de l'additivité du comptage (cf. la citation précédente de Jean Piaget et Bärbel Inhelder) : après qu'un enfant a réussi la tâche « Donne-moi 3 cubes », par exemple, l'adulte ajoute un autre cube et demande : « Et maintenant, il y a 4 cubes ou 5 cubes ? ». Elle est réussie plus tardivement encore (Davidson & col., 2012). Cela se comprend : il est possible de réussir la tâche « Donne-moi N éléments » à l'aide du seul comptage-numérotage. Il suffit que l'enfant comprenne qu'il doit bien garder à l'esprit le numéro prononcé par l'adulte (N) et qu'il doit arrêter son comptage-numérotage des objets tout de suite après ce numéro. De plus, cela s'exerce.

Ainsi, le comptage-numérotage permet de réussir un grand nombre de tâches par adaptations successives aux attentes des adultes, de sorte qu'on est souvent face à une sorte d'effet Jourdain : l'enfant se comporte comme s'il dénombrait, il réussit des tâches qui semblent nécessiter un dénombrement alors qu'il ne fait que numéroter.

Le comptage-numérotage crée l'illusion que des élèves très faibles savent calculer les additions élémentaires

Rappelons la différence entre numéros et nombres. Un numéro renvoie à *une seule entité* alors qu'un nombre, lui, renvoie à une pluralité et il est clair qu'un numéro ne véhicule pas nécessairement l'idée du nombre correspondant : lorsqu'on a la chambre d'hôtel « 407 », par exemple, il n'y a généralement pas autant de chambres dans l'hôtel parce que le premier chiffre renvoie à l'étage. Même dans les contextes où tous les numéros sont présents dans l'ordre, comme c'est le cas du contexte de la file numérotée, on utilise le plus souvent les numéros sans évoquer les nombres correspondants. Pour comprendre le fonctionnement cognitif d'un adulte dans un tel contexte, il suffit de s'imaginer un théâtre dont les sièges sont numérotés avec des lettres plutôt qu'avec des chiffres : sachant que « j'ai le siège R », par exemple, je n'ai nullement besoin de penser à la pluralité correspondant à R pour retrouver mon siège. Nous sommes d'ailleurs complètement incapables de répondre de manière précise à la question : « C'est combien R ? » Nous en sommes incapables et cela ne nous empêche pas de retrouver notre siège.

Concernant l'obtention du résultat d'une addition, c'est à ce niveau que le « piège pédagogique » correspondant à un phénomène d'effet Jourdain, continue à produire ses effets : la leçon décrite au début de ce texte, celle des images de Karim, permet en effet aux élèves de répondre correctement en raisonnant sur des numéros et non sur des nombres. On s'en rend bien compte en imaginant que dans cette leçon, la file est numérotée avec les lettres de l'alphabet plutôt qu'avec les écritures chiffrées et que la tâche proposée à l'élève consiste à compléter R + C = ?, par exemple. Même des élèves très faibles peuvent se comporter comme c'est indiqué dans la leçon : l'enfant commence par mettre le doigt sur la case R (c'est celle de départ), puis il dit A au-dessus de la case suivante (la case S), il dit B au-dessus de la suivante (la case T) et enfin C au-dessus de la suivante : c'est la case U, celle d'arrivée. Et l'élève complète l'égalité avec le numéro de la case d'arrivée, comme cela lui a été indiqué : R + C = U.

Cette égalité ressemble à une addition. Au plan formel, l'addition correspondante est d'ailleurs juste et elle sera considérée comme telle par l'enseignant qui devra donner une bonne appréciation. Sauf que pour réussir, il n'est absolument pas nécessaire d'évoquer mentalement les pluralités correspondant à R et U. Dans un tel contexte, les élèves sont susceptibles de donner les bonnes réponses en utilisant la « recette » qu'on leur a montrée (repérer la case de départ, etc.) alors que dans leur tête, ils ne mettent pas en relation des pluralités, ils ne calculent pas. Les élèves donnent les bonnes réponses mais ils ne progressent pas comme ils devraient : comme ils ne mettent pas en relation des pluralités, ils ne mémorisent pas les relations correspondantes, ils ne mémorisent pas les résultats d'additions élémentaires et restent prisonniers du comptage. Ce sont, comme disait Henri Canac, des « *élèves mal débutés* » qui ne mémorisent pas les résultats d'additions élémentaires.

Des arguments en faveur du statut causal du basculement de 1986

On ne donnera ci-dessous que quelques-uns des résultats ou des prises de position de chercheurs qu'il serait possible de citer. Un exposé beaucoup plus complet se trouve dans Brissiaud (1989, 2004, 2007, 2013)

Des arguments issus de l'histoire des textes et des pratiques pédagogiques

Certains ont déjà été donnés. Donnons-en deux autres. Signalons ainsi que l'analyse des progrès permis par l'enseignement du comptage-numérotage et des limites d'un tel enseignement, figure déjà dans un texte de 1966 (Fareng et Fareng, 1966) : «… *cette façon empirique fait acquérir à force de répétitions la liaison entre le nom des nombres, l'écriture du chiffre, la position de ce nombre dans la suite des autres, mais elle gêne la représentation du nombre, l'opération mentale, en un mot, elle empêche l'enfant de penser, de calculer*» et que l'alternative trouvée était présenté en 1955 par Henri Canac comme une « *méthode nouvelle* » qui « *forme à* (son) *sens, une des meilleures conquêtes de la pratique pédagogique au cours du dernier quart de siècle.* » Elle consistait à découvrir les nombres dans l'ordre afin de : « *construire (définir, poser), le nouveau nombre par adjonction de l'unité au nombre précédent, puis à étudier ses diverses décompositions en nombres moins élevés que lui.* »

Ainsi, concernant les 10 premiers nombres, l'accent était mis sur l'appropriation de leurs décompositions. Et concernant la mémorisation des résultats d'additions dont le résultat dépasse 10 ? Dès 1928, dans un rapport des inspecteurs généraux Marijon et Leconte (cf. Savard, 1940), la recommandation était très claire : « *Il convient, selon nous, d'arriver très vite à la formation, par voie purement mentale, de 8 + 7 = 15, au moyen de 8 + 2 = 10, 10 + 5 = 15, étant entendu que ces exercices auraient été précédés de nombreuses réalisations manuelles et visuelles* ». Ainsi, ces pédagogues recommandaient-ils l'usage de ce qu'on appelle fréquemment aujourd'hui un « *calcul pensé* » où l'on prend appui sur 10 pour trouver le résultat. À aucun moment, l'usage d'une file numérotée n'était considéré comme une propédeutique aux stratégies de décomposition-recomposition : il n'était tout simplement pas envisagé.

Des arguments issus de la recherche en psychologie des apprentissages numériques

Aujourd'hui, l'ensemble des chercheurs en psychologie considèrent que Rochel Gelman avait largement sous-estimé la difficulté d'interpréter de manière cardinale le comptage tel qu'on l'enseigne habituellement. Ils sont de plus en plus nombreux à souligner l'importance de ce qui distingue un comptage-numérotage et un comptage dénombrement : la propriété que Piaget appelait l'additivité de ce comptage (Gréco, 1962, parlait de *l'itération de l'unité*). De manière récente, Sarnecka et Carey (2008) s'expriment ainsi :

> Connaître le principe cardinal signifie avoir une connaissance implicite de la fonction de succession, c'est-à-dire la compréhension du fait que la cardinalité de chaque nombre résulte de l'ajout d'une unité au nombre précédent.

Eux, donc, parlent de la « fonction de succession ».

Concernant la mémorisation des résultats d'additions élémentaires, j'ai essayé de montrer en 1989 que l'apprentissage par cœur des tables d'additions ne peut pas se substituer à un manque de connaissances concernant les décompositions des premiers nombres, en argumentant que :

> La mémoire n'est pas un sac dans lequel sont retenues des informations isolées et statiques ; il convient mieux de se la représenter comme un réseau où les informations sont reliées entre elles par des liaisons complexes, structurées et organisées de manière dynamique et plastique. C'est ainsi que la détermination d'un résultat par un calcul pensé est l'occasion de construire de telles

liaisons. Cette pratique du calcul pensé est en elle-même un élément du processus de mémorisation. La mémorisation ne suit pas, elle accompagne et, peut-être même, résulte.

Ce point de vue est aujourd'hui celui défendu par le chercheur le plus influent au États-Unis auprès du NCTM (National Concil of Teachers of Mathematics), Arthur Baroody. En 2009, il a rédigé un article dont le titre s'inspire de celui du célèbre livre «*Why Can't Johnny Read ?* ». Ce que Johnny échoue, dans l'article de Baroody, c'est ce qu'échouent de manière caractéristique les enfants que l'on qualifie de dyscalculiques ou, si l'on adopte un autre point de vue théorique, de « mal débutés » : ces enfants ne mémorisent pas les résultats d'additions élémentaires. L'article s'intitule : « *Why Can't Johnny Remember the Basic Facts ?* » (Baroody et col, 2009). Il consacre la plus grande partie de l'article au rôle joué par la connaissance des décompositions des nombres (par exemple : 8 = 5 + 3 ou encore : 7 = 1 + 6) et par l'usage de ces décompositions au sein de stratégies de décomposition-recomposition (par exemple : 5 + 8 = 5 + 5 + 3, ou encore : 9 + 7 = 9 + 1 + 6). Il considère que l'usage de telles stratégies joue un rôle crucial dans la mémorisation des résultats élémentaires d'additions et que l'absence d'usage de telles stratégies est l'une des principales explications du fait que « *Johnny Can't Remember the Basic Facts* ».

Il faut encore citer les travaux de Jean-Paul Fischer qui, dans une théorie générale de la mémorisation, argumentait dès 1992 en faveur de la supériorité de l'usage des stratégies de décomposition-recomposition sur celles de comptage.

Des arguments issus de la recherche en psychologie interculturelle

Les différences de performances entre élèves de différents pays apparaissent tôt dans la scolarité. Ainsi, en Chine (Taïwan) les résultats d'additions élémentaires sont mémorisés dans 86% des cas en fin de 1ère année d'école alors qu'ils ne le sont que dans 26% des cas aux États-Unis (Geary et al, 1992). Il faut insister : en psychologie expérimentale, de telles différences sont exceptionnelles. Ainsi, en fin de 1ère année d'école, la mémorisation n'a pratiquement pas commencé chez les enfants états-uniens quand elle est presque achevée chez les enfants chinois. Que font les élèves états-uniens pour donner le résultat d'une addition ? Ils comptent, évidemment, et ceci dans 64% des cas (4% des cas en Chine). Mais comment s'en étonner puisque c'est ce qu'on leur a appris à faire ! En 1982, un psychologue japonais (Hatano, 1982) découvrant l'emploi que font les pédagogues états-uniens d'une file numérotée, faisait part de sa surprise : jamais les pédagogues japonais ne s'y prennent ainsi, ils favorisent systématiquement l'usage de stratégies de décomposition-recomposition. Les raisons de la différence de performances entre enfants états-uniens et enfants asiatiques sont nombreuses (façon de dire les nombres après dix, notamment) mais il y en a une qui joue nécessairement un rôle majeur : lorsqu'ils comptent, les élèves états-uniens font ce que leurs maîtres leur ont demandé de faire, ce qu'ils ont valorisé.

Des arguments issus de la recherche en psychologie différentielle

Toutes les études concernant les enfants en grande difficulté dans leurs apprentissages numériques soulignent une caractéristique commune : ils « *continuent à utiliser préférentiellement les stratégies de comptage verbal et même parfois de comptage sur les doigts* » (INSERM, 2007, p. 305). Ainsi, Jordan et collègues (2003) ayant sélectionné des élèves de milieu de CE1 parce qu'ils sont faibles en mémorisation des faits numériques, ils observent qu'un an et demi plus tard (fin de CE2), ceux-ci n'ont pratiquement pas progressé parce qu'ils utilisent systématiquement le comptage pour trouver le résultat. Ils sont enfermés dans la façon de faire que leurs enseignants ont initialement privilégié. Ajoutons à cela que ce phénomène est observé chaque année par les professeurs des écoles, y compris ceux de Cours Moyen. Sur cette question, on peut aussi se reporter à Fayol (2012).

Aucune autre cause n'émerge

L'analyse qui vient d'être présentée doit être complétée : en effet, avant d'incriminer le basculement de 1986 et l'enseignement du comptage-numérotage qui l'accompagne, il est nécessaire de s'assurer qu'aucune autre cause n'émerge. Là encore, ce complément d'analyse est présentée très détaillée dans Brissiaud (2013) et il conduit à penser que c'est effectivement le cas. Ici, faute de place, disons simplement que la baisse s'effectue dans les mêmes proportions quelle que soit la catégorie sociale du chef de famille : que celui-ci soit agriculteur, cadre ou profession intellectuelle, employé, inactif… il n'y a pas d'interaction entre l'évolution des performances et cette catégorie sociale. C'est un résultat très rare et Thierry Rocher souligne dans sa note qu'il suggère « *un effet principalement lié à l'apprentissage scolaire* ». En effet, on aurait pu avancer comme facteur explicatif à l'effondrement des performances, le fait que la condition sociale de certains enfants se dégrade durant cette période, suite au phénomène de ghettoïsation des banlieues, par exemple. Or, une explication de ce type ne tient pas.

Un autre résultat obtenu par Rocher (2008) mérite d'être souligné : l'effondrement des performances en calcul se produit entre 1987 et 1999 alors que la même étude de la DEPP montre qu'il n'y a pas de baisse des performances en lecture et en dictée durant la période 1987-1997. Là encore, cela permet d'avancer dans la recherche des causes de la baisse, parce que la plupart des facteurs généraux tels que l'augmentation du temps passé devant la télé ou la console de jeu, la diminution du temps de sommeil des enfants, une évolution des rapports éducatifs au sein des familles… ne peuvent pas être retenus non plus. On comprendrait mal en effet que de tels phénomènes affectent de manière spécifique le calcul et non la lecture ou la dictée ; on comprendrait mal également qu'ils aient eu un effet fulgurant durant les deux années de non recouvrement des périodes d'étude (1987-1999 pour le calcul et 1987-1997 pour la lecture et la dictée).

Terminons cette partie en répondant à une question posée lors du séminaire national de mars 2013. La suggestion a été faite que la façon d'enseigner la numération décimale ayant changé avant et après 1986, cela pourrait être un facteur de baisse des performances. Avant cette date, en effet, les enseignants étaient encore nombreux à enseigner le codage d'un nombre en base autre que 10, par exemple, alors que ce choix didactique a complètement disparu ensuite. On dispose d'une étude assez précise de certains des effets de cet enseignement, celle de Jean-François Perret (1985). Son principal résultat est que les enfants les plus fragiles ne font guère de lien entre les codages qu'ils produisent lorsqu'ils écrivent les nombres « au pays du 4 », par exemple, et les « vrais nombres », ceux en base 10, qui sont les seuls à pouvoir s'oraliser comme dans la vie courante, c'est-à-dire autrement qu'en disant successivement chacun des chiffres (par exemple : deux, zéro, trois au pays du 4). Mais plus fondamentalement, comprendre la numération décimale, c'est en comprendre diverses décompositions : *deux-cent-trente-quatre*, par exemple, c'est 200 + 30 + 4 mais c'est aussi 23 dizaines + 4 (Brissiaud, 2005 ; Chambris, 2008 ; Mounier, 2010 ; Tempier, 2010). Comme le basculement de 1986 s'est traduit de manière générale par une moindre attention aux décompositions des nombres, il est effectivement possible que cela ait influé sur les choix didactiques effectués concernant les décompositions précédentes, celles qui importent pour comprendre la numération décimale. Auquel cas, de moindre connaissances en numération n'ont pu qu'avoir des répercussions négatives sur le calcul. Si tel fut le cas, on peut considérer cela comme venant conforter la thèse générale défendue ici.

La distinction comptage-numérotage vs. dénombrement et la didactique des mathématiques

Lors du séminaire de mars 2013, j'ai conclu en attirant l'attention sur ce qui m'apparaît comme une faiblesse d'un grand nombre de textes de didactique des mathématiques qui mettent en avant la complémentarité à l'école des « *conceptions cardinales et ordinales des nombres* ». Nous allons voir qu'une telle distinction ne tient pas : il n'y a pas, à l'école, d'approche du nombre qui serait celle de sa conception ordinale. Nous examinerons également comment l'opposition la plus pertinente d'un point de vue didactique, celle entre numéro et nombre, est traitée dans la théorie des situation.

À l'école primaire, le nombre se construit à partir des actions d'ajout et de retrait

De nombreux textes pourraient être analysés comme celui qui va l'être ci-dessous et celui-ci doit donc être considéré comme le parangon de tout un ensemble de textes à visée didactique largement diffusés en formation des professeurs d'écoles.

Il s'agit d'un extrait d'un livre récent (Margolinas & Wozniak, 2012) qui, d'une part, s'intitule « *Le nombre à l'école maternelle* » et, donc, traite du sujet qui est le nôtre et, d'autre part, se présente comme une introduction aux savoirs didactiques nécessaires aux professeurs des écoles. Le passage suivant (page 116) est un paragraphe figurant dans le chapitre de conclusion et il est extrait d'un sous-chapitre intitulé : « *Commencer par le cardinal ou l'ordinal ?* »

> D'un point de vue didactique, ce qui paraît essentiel est d'appréhender la dualité de ces deux conceptions du nombre et pour les professeurs, d'identifier clairement les situations mathématiques que ces deux aspects modélisent. De la notion de collection se déduit celle de quantité d'où nait le concept de nombre cardinal via le processus de dénombrement. De la notion de liste se déduit celle de position d'où nait le concept de nombre ordinal via le processus de repérage. La comptine numérique nait de ce besoin de recourir à une liste ordonnée et immuable pour dénombrer, repérer ou plus généralement mesurer une grandeur.

Nous allons essayer de montrer que cette organisation des savoirs, à partir de la « *dualité des conceptions* (cardinale et ordinale) *du nombre* » n'est pas pertinente d'un point de vue didactique.

Prenons comme point de départ l'affirmation : « *De la notion de liste se déduit celle de position d'où nait le concept de nombre ordinal* ». Elle passe sous silence le fait que pour traiter de la position dans une liste finie, le nombre ordinal n'a aucune espèce de nécessité, la *numérotation* suffit. Les symboles utilisés pour numéroter les divers éléments peuvent être divers et ils dépendent évidemment de la taille de l'ensemble : système utilisé dans les hôtels, lettres de l'alphabet munies de l'ordre alphabétique, etc. Les lettres conviennent particulièrement bien pour les ensembles de petite taille. Elles sont d'un usage courant, comme dans l'exemple des fauteuils de théâtre. Le concept de nombre ordinal va-t-il naître d'une telle numérotation ? On voit mal comment. Dans leur ouvrage (chapitre 3), les auteurs le font naître d'une prise de conscience du fait que si j'ai le fauteuil R, pour atteindre ce fauteuil à partir du couloir, il faut que je passe R fois d'un fauteuil à l'autre (attention : le couloir compte comme une « case départ »). Mais comment cela serait-il possible sans une très bonne maîtrise du nombre puisqu'il faut l'utiliser pour dénombrer des actions ?

Il faut l'affirmer : il est impossible de passer de la numérotation au nombre ordinal si l'on ne dispose pas du nombre. Le nombre ordinal est un nombre, comme d'ailleurs son nom l'indique : *nombre* ordinal. Et l'intelligence des nombres résulte de la maîtrise des relations construites à partir des actions d'ajout et de retrait et non à partir de la relation de succession qui structure un ensemble numéroté. Pour en prendre conscience, il suffit d'imaginer que dans la situation des sièges de théâtre, on décide de remplacer les lettres par la suite habituelle des écritures chiffrées. Quelles conséquences cela a-t-il ? En remplaçant la lettre R par l'écriture chiffrée 18, on ne fait pas que remplacer un système de numéros par un autre, parce que le second est un système numérique et il est évidemment bien plus informatif qu'un système de numérotation qui ne l'est pas : quand on est passé devant le siège 9, on était à mi-chemin ; quand on est passé devant le siège 15, on en était à 3 rangs de celui visé, etc. On aurait été incapable d'accéder à de telles connaissances avec les numéros que sont les lettres I (9) et O (15) respectivement. En remplaçant un système de numérotation quelconque par un autre qui, lui, est numérique, on récupère toutes les connaissances numériques qu'il véhicule. Or, on n'a jamais vu quiconque acquérir l'intelligence des nombres, c'est-à-dire la maîtrise de telles relations, en apprenant à maîtriser, au sein d'un système de numérotation, les relations entre chaque élément et son successeur, le successeur de son successeur, etc. Quand les auteurs de l'ouvrage écrivent que : « *De la notion de liste se déduit celle de position d'où nait le concept de nombre ordinal* », ils commettent une erreur : de la notion de liste, la notion de position se déduit via une numérotation et, sans connaissance préalable du nombre, jamais cette numérotation ne conduit à un usage ordinal du nombre. Ainsi, le nombre est nombre avant d'être utilisé dans un contexte ordinal et il se construit nécessairement dans un contexte cardinal (nous allons voir qu'il vaut mieux parler de « contexte cardinal » que de « nombre cardinal »). Et comme il n'est pas difficile de récupérer toutes les propriétés du nombre qui ont été établies à partir des actions d'ajout et de retrait, dans cette autre sorte de sorte de contexte qu'est le contexte ordinal, la thématique la plus pertinente en didactique n'est pas celle où l'on débat de ces deux contextes d'usage des nombres mais la thématique où l'on pense les relations entre nombres et numéros.

La même analyse, d'un point de vue mathématique

D'un point de vue mathématique, numéroter les éléments d'un ensemble revient à le munir d'un ordre total et même, de ce que l'on appelle en mathématiques un « bon ordre » : non seulement, étant donnés deux éléments quelconques, il faut pouvoir décider que l'un des deux est avant l'autre, mais, de plus, il est nécessaire que la numérotation ait un commencement. Dans un ensemble bien ordonné, l'ordre est tel que toute partie finie de l'ensemble a un plus petit élément.

En fait, on démontre que la propriété d'être un bon ordre implique que celui-ci est un ordre total et, dans la définition précédente, la référence à n'importe quelle partie de l'ensemble concerné, n'est importante que dans le cas d'un ensemble infini. Il est en effet essentiel de le souligner : sur les ensembles finis, le nombre est nombre, il n'est ni cardinal, ni ordinal parce qu'il est les deux indistinctement. C'est très bizarre de parler de nombre cardinal et de nombre ordinal concernant les nombres utilisés à l'école primaire parce qu'on n'y traite pas de l'infini et, conséquemment, ils sont indistinctement l'un et l'autre. C'est encore plus bizarre d'organiser l'analyse didactique des premiers apprentissages numériques autour d'une telle distinction.

En revanche, on comprend bien ce que veut dire utiliser les nombres dans un contexte cardinal, lorsque ceux-ci réfèrent à des pluralités, et les utiliser dans un contexte ordinal, lorsqu'on profite de toute les connaissances numériques qui sont les nôtres, pour faire des nombres un système de numérotation hors du commun. Ce système de numérotation est tellement intéressant que les hommes ont inscrit sa spécificité dans leur langue : ils parlent du « $18^{\text{ème}}$ élément » et non plus de « l'élément 18 ». En effet, cette façon d'en parler permet de transférer par morphisme, les propriétés du groupe des entiers muni de la relation « +1 » itérée, vers l'ensemble bien ordonné des numéros muni de la relation de succession. *De facto*, l'ensemble des numéros devient lui aussi un groupe, celui des rangs. Et ce dernier bénéficie des propriétés construites dans un contexte cardinal, dont la commutativité : le $x^{\text{ème}}$

élément après le $y^{ème}$ est aussi le $y^{ème}$ après le $x^{ème}$. Il existe de nombreux contextes cardinaux dans lesquels la commutativité est presque évidente : lorsqu'on réunit une équipe de garçons et une équipe de filles, a-t-on ajouté les filles aux garçons ou les garçons aux filles ? Appliquée aux rangs, la commutativé n'est jamais évidente.

Le comptage-numérotage et la théorie des situations

Jamais, évidemment, Guy Brousseau n'a développé un « *point de vue didactique* » dans lequel il importerait d'articuler des soi-disant conceptions cardinales et ordinales du nombre alors qu'on ne traite que de nombres finis. En revanche, il lui est arrivé de parler de « *situation fondamentale du dénombrement* » alors que cette situation nécessite seulement un usage performant du comptage-numérotage et, donc, ne nécessite pas de maîtriser l'additivité du comptage. Rappelons ce qu'est cette situation en se référant au texte connu sous le titre : « *La théorie des situations didactiques. Le cours de Montréal* » (Brousseau, 1997). Il y décrit la situation suivante :

> "Nous avons des peintures dans ces petits pots. Tu dois aller chercher là-bas les pinceaux et en mettre un et un seul dans chaque pot. Tu dois porter tous les pinceaux en un coup et il faut qu'il ne reste ni pinceau sans pot, ni pot sans pinceau. Si tu te trompes, tu reprends tous les pinceaux, tu les ramènes là-bas et tu essaies à nouveau. Tu sauras compter quand tu pourras faire ça, même quand il y a beaucoup de pots".
> Plus précisément, l'enfant saura dénombrer lorsqu'il pourra jouer les deux rôles : demander (émetteur) à quelqu'un (récepteur), oralement ou par écrit, la quantité de pinceaux nécessaires en vérifiant l'opération, et inversement fournir à la demande la quantité voulue.

Cette situation est qualifiée de « fondamentale » parce que les diverses tâches qui conduisent un enfant à compter : la tâche « Combien… » ou « Donne-moi N éléments », par exemple, s'obtiennent lorsque l'adulte prend en charge certains éléments de cette situation qui, donc, se présente comme la plus générale. Pour l'enfant, comprendre, c'est maîtriser la situation dans toutes ses dimensions alors que la réussite aux sous tâches précédentes (qualifiées de *formes « dégénérées »* de la situation) pourrait résulter d'un conditionnement ou, du moins, d'une compréhension plus partielle de ce qu'il fait.

Cependant, le comptage-numérotage suffit à traiter cette situation dans toute sa généralité et, dès lors, qualifier cette situation de « *situation fondamentale du dénombrement* » se révèle particulièrement malheureux. En fait, cela se trouve presque décrit dans le même texte, à partir d'une observation de Blanca Quevedo de Queveda (1986) :

> L'élève va chercher une poignée de pinceaux et les distribue dans les pots.
> - "Ah, il en reste trois !"
> - Tu as réussi ?
> - Non parce qu'il m'en reste trois !
> - Bon, reprends-les tous et essaie une autre fois.
>
> Les autres élèves de la classe lui suggèrent :
> "compte !, compte !"
> L'élève compte les pots, repart, saisit une poignée de pinceaux et revient. Le fait de compter ne lui a servi à rien. Les autres élèves continuent à l'aider :
> - Non ! non ! tu dois compter les pinceaux.
>
> L'enfant part, compte <u>tous</u> les pinceaux et revient...

Pour résoudre ce problème, il suffit de savoir qu'on peut compter-numéroter les pots (1, 2, 3, 4, 5) puis compter-numéroter « pareil de pinceaux ». Il aurait suffit que dans l'épisode de classe précédent, les enfants (ou l'enseignant) disent à l'élève qu'il doit « *compter pareil de pinceaux que de pots* » pour qu'il dispose d'une procédure permettant de résoudre le problème dans toute sa généralité. De plus, le fait d'utiliser une communication écrite entre deux élèves n'apporterait que peu de progrès. Ce serait susceptible d'amener les enfants à expliciter que la suite 1, 2, 3, 4, 5 peut être remplacée par le seul chiffre 5 qui indique le moment où le récepteur doit arrêter son comptage-numérotage lorsqu'il réalise la commande. Mais comprendre l'additivité du comptage n'a aucune espèce de nécessité.

Dans le même texte, Guy Brousseau écrit :

> L'usage purement numéral des nombres (pour seulement identifier ou désigner un objet : numéro de chaîne TV, de téléphone, ou d'automobile) ne semble présenter, lui, aucun problème. Sans doute parce que la difficulté principale réside moins dans l'apprentissage des automatismes que dans la connaissance des propriétés des collections, des nombres et de leurs opérations. Celles-ci doivent être obligatoirement "connues" de l'élève pour qu'il puisse contrôler leurs usages complexes.

Il n'aborde malheureusement pas la question suivante : l'enseignement du comptage-numérotage, en installant des automatismes qui permettent de répondre aux sollicitations des adultes et même à celles du milieu dans un grand nombre de situations (cf. la situation « fondamentale » précédente), ne ferait-il pas obstacle à l'appropriation des propriétés des nombres ?

Conclusion : le comptage-numérotage est un « schème dangereux »

L'expression « schème dangereux » a été avancée par Janine Rogalski lors du séminaire national de mars 2013. Elle semble particulièrement bien convenir. En effet, même chez les élèves qui n'apprennent pas par conditionnements successifs dans chacune des situations, mais en réfléchissant leur usage du comptage-numérotage, les réussites successives qui sont les leurs dans un grand nombre de situations, ne nécessitent pas qu'ils s'engagent dans une explicitation des décompositions des nombres. En fait, l'ensemble des problèmes que, dans un article récent, nous avons qualifiés de Si-problèmes (où Si signifie simulation ou situation) peuvent être traités ainsi (Brissiaud & Sander, 2010). Ces problèmes sont tels qu'une simulation mentale de la situation, en agissant souvent sur les numéros plutôt que les objets eux-mêmes, conduit de façon assez économique à la solution numérique. Or ces problèmes sont les plus fréquents à l'école. À chaque fois que les élèves apprennent à résoudre ainsi un problème, c'est une situation de perdue pour l'enseignant qui souhaiterait que les enfants découvrent les propriétés des nombres dans cette situation.

On comprend donc le choix didactique des « experts » réunis autour de Gaston Mialaret : n'enseigner les nombres que progressivement à l'école, sans s'appuyer sur la comptine numérique, mais en faisant émerger les propriétés des nombres. On comprend également que du temps de la première équipe Ermel (Ermel, 1977), à une époque où les pédagogues de l'INRP s'inspiraient des premiers écrits de Guy Brousseau (1972), les élèves apprenaient encore bien à calculer (voir Brissiaud, 2013). En effet, à l'époque, il appuyait ses analyses sur une activité connue à l'époque comme celle des « boîtes – nombres » et il résumait ainsi son projet :

> Les enfants, à la conquête du nombre, ont le plus grand désir de manier des naturels aussi grands que possible. Suivons-les dans cette voie : les naturels et l'addition servent à construire de nouveaux naturels.
>
> L'enfant utilise toutes ses connaissances non pour réciter mais pour bâtir. Nous avons constaté combien cette motivation puissante favorise les découvertes et les apprentissages. Dans les méthodes traditionnelles les enfants n'écrivaient 8 + 6 que lorsqu'ils connaissaient 14. L'addition servait à décomposer ce que l'on connaissait déjà et, de ce fait, perdait de son intérêt, d'autant plus que l'on s'arrangeait pour que les enfants manipulent en suivant ce qu'ils énonçaient. A quoi peut bien servir de s'arrêter après avoir compté jusqu'à 8, recommencer à compter jusqu'à 6, écrire 8 + 6 et enfin recommencer à compter les mêmes objets mais cette fois, sans s'arrêter, de 1 à 14? Il suffisait de commencer par là (écrire 8 + 6).

Le projet est différent de celui des pédagogues réunis autour de Gaston Mialaret mais ils ont en commun que les enfants ne découvrent pas les nombres à l'école en s'appuyant sur la comptine numérique, mais en explicitant leurs propriétés, dont l'additivité du comptage.

La première fois que j'ai tenté de présenter l'analyse de l'effondrement des performances en calcul avancée ici, c'était dans un texte préparatoire au séminaire national sur l'enseignement des mathématiques qui s'est tenu à l'IFE en mars 2012 (Brissiaud, 2012). Moins de 2 ans se sont passés depuis, donc. Or, l'idée qu'il faudrait renoncer à l'enseignement du comptage-numérotage et renouer avec les choix didactiques qui étaient les nôtres vers le milieu du siècle dernier ou dans les années 70-85, a fait beaucoup de progrès. Pour s'en rendre compte, il suffit de lire un autre des textes préparatoires au séminaire national sur l'enseignement des mathématiques qui s'est tenu à l'IFE en mars 2012, un collègue écrivait (Emprin, 2012) :

> Une controverse existe en ce qui concerne l'enseignement du comptage. Cette procédure qui consiste à dénombrer en numérotant les objets un à un : « un, deux, trois, quatre, il y en a quatre » est considérée par certain (Brissiaud) comme néfaste et ne devant pas être enseignée à des jeunes enfants.

Ainsi, j'apparaissais à l'époque très isolé dans la défense de cette thèse. Aujourd'hui, il n'est plus sûr que ce collègue tiendrait le même propos : l'analyse présentée ici l'a été début 2013 au séminaire des archives Piaget à Genève, puis au séminaire national de didactique des mathématiques à Paris, et enfin au Journées mathématiques de Lyon 2013, sans qu'aucune objection majeure ne lui ait été adressée. Une recherche engageant 3 laboratoires de psychologie ainsi que le laboratoire dirigé par Gérard Sensevy et l'IFE (recherche ACE) est, pour ce que l'on en sait (Baumard, M., 2013), engagée sur cette base. Mais il ne faut pas se leurrer : l'enseignement du comptage-numérotage correspond à son enseignement selon le sens commun et il est toujours plus facile de diffuser des pratiques pédagogiques correspondant au sens commun que d'autres qui rompent avec celui-ci.

Bibliographie

Baroody A. Bajwa, N. & Eiland M. (2009) Why Can't Johnny Remember the Basic Facts ? *Developmental disabilities research reviews* ; 15, 69-79.

Baumard, M. (2013) *La France enfin première de la classe.* Paris : Fayard

Brissiaud R. (1989) *Comment les enfants apprennent à calculer – Au-delà de Piaget et de la théorie des ensembles.* Paris : Retz

Brissiaud R. (2003) *Comment les enfants apprennent à calculer – Le rôle du langage, des représentations figurées et du calcul dans la conceptualisation des nombres.* Paris : Retz

Brissiaud, R. (2005). Comprendre la numération décimale: Les deux formes de verbalisme qui donnent l'illusion de cette compréhension. Actes du Congrès scientifique international de la Fédération Nationale des Orthophonistes : "Comprendre". *Rééducation Orthophonique, 223*, pp. 225–238.

Brissiaud R. (2007) *Premiers pas vers les maths – Les chemins de la réussite à l'école maternelle.* Paris : Retz.

Brissiaud R. (2013) *Apprendre à calculer à l'école – Les pièges à éviter en contexte francophone.* Paris : Retz.

Brissiaud, R. (2012) Quelles pratiques pédagogiques faut-il éviter à l'école maternelle et au CP ? – Les réponses d'une expérimentation menée à l'échelle de la nation. Disponible sur internet :http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/dossier-manifestations/conference-nationale/contributions/resolveUid/bee2b5fe6e15f2b770a4c39891061a1e (consulté le 9 décembre 2013).

Brissiaud, R. & Sander, E. (2010). Arithmetic word problem solving : a Situation Strategy First framework. *Developmental Science*, 13 (1), 92-107.

Brousseau, G. (1972) Processus de mathématisation. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public*, 57-84

Brousseau, G. (1997) *La théorie des situations didactiques. Le cours de Montréal.* Disponible sur internet : http://guy-brousseau.com/1694/la-theorie-des-situations-didactiques-le-cours-de-montreal-1997/ (consulté le 9 décembre 2013).

Canac, H. (1955) L'initiation au calcul entre 5 et 7 ans. In F. Brachet, H. Canac & E. Delaunay (ed.), *L'enfant et le nombre*, p.9-27. Paris : Didier.

Chambris, C. (2008) *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques à l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20ème siècle. Connaissances des élèves actuels.* Thèse de l'Université Paris 7.

Davidson, K., Eng, K. & Barner, D. (2012) Does learning to count involve a semantic induction? *Cognition* ; 123-1 ; p. 162-173.

Eiler, R. (1977) *Math et calcul*. Paris : Hachette

Emprin, F. (2012) Éléments d'analyse d'observation et d'analyse sur l'enseignement à l'école maternelle. Disponible sur internet : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/conference-nationale-textes-1 (consulté le 9 décembre 2013).

Ermel (1977) *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, cycle préparatoire.* Paris : SERMAP-OCDL.

Ermel (1990) *Apprentissages numériques, cycle des apprentissage, Grande Section de maternelle.* Paris : Hatier.

Fareng R. & Fareng, M. (1966) *Comment faire ? L'apprentissage du calcul avec les enfants de 5 à 7 ans.* Paris, Fernand Nathan.

Fischer, J.-P. (1992) *Les apprentissages numériques.* Nancy, Presses Universitaires de Nancy

Fuson, K.C. (1988). *Children's counting and concepts of number.* New York : Springer.

Geary, D.C. (2005) Les troubles d'apprentissage en arithmétique : rôle de la mémoire de travail et des connaissances conceptuelles. In M.-P. Noël (Ed) : *La dyscalculie.* Marseille : Solal.

Geary D.C., Fan L. & Bow-Thomas C.C. (1992). Numerical cognition: Loci of ability differences comparing children from China and the United States. *Psychological Science,* 3,180-185.

Gelman R. & Gallistel C.R. (1978). *The child's understanding of number.* Cambridge : Harvard University Press.

Hatano G. (1982) Learning to Add and Sustact : A Japonese Perspective. In T. Carpenter, J. Moser & T. Romberg (Eds) : *Addition and Substraction : A Cognitive Perspective.* Hillsdale, N.J. : Lawrence Erlbaum Associates

INSERM (2007) Dyslexie, Dysorthographie, Dyscalculie – Bilan des données scientifiques. Paris : Les éditions INSERM

Jordan N., Hanish L & Kaplan D. (2003) Arithmetic fact mastery in youn children. A longitudinal investigation. *Journal of Experimental Child Psychology*, 85, 103-119.

Markman, E.M. (1989) : *Categorisation and naming in children.* Cambridge, MA: MIT Press.

Markman, E.M. (1990) : *Constraints children place on word meanings.* Cognitive Science, 14, 57-77

MEN (1986). *L'école maternelle, son rôle, ses missions*. CNDP

Mialaret, G. (1955) *Pédagogie des débuts du calcul.* Fernand Nathan, Paris (avec la collaboration de l'Unesco).

Mounier, E. (2010) *Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes.* Thèse de didactique des mathématiques. Université Paris Diderot (Paris 7).

Palanque R., Cambrouse E. & Loubet E. (1987) *Prépa-math – Maternelle/grande section – Dossier pédagogique.* Paris : Hachette.

Perret, J.-F. (1985) *Comprendre l'écriture des nombres.* Berne : Peter Lang.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1963). Les opérations intellectuelles et leur développement. In P. Fraisse et J. Piaget (Eds). *Traité de psychologie expérimentale*, VII, L'intelligence, 109-155.

Quevedo de Villegas B. (1986) *Le rôle de l'énumération dans l'apprentissage du dénombrement*, Thèse de 3e cycle, Bordeaux 1.

Rocher T. (2008) Lire, écrire, compter : les performances des élèves de CM2 à vingt ans d'intervalle 1987-2007. *Note 08.38 de la DEPP* ; décembre 2008.

Sarnecka, B.W. & Carey, S. (2008). How counting represents number: What children must learn and when they learn it. *Cognition*, 108(3), 662-674.

Savard, C. (1940) *Pages choisies de pédagogie contemporaine.* Paris : Delagrave.

Schaeffer, B., Eggleston, V.H. & Scott, J.-L. (1974). « Number development in young children », *Cognitive Psychology,* 6, p. 357-379.

Tempier, F. (2010) *Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2.* Grand N, 86, 59-90.