STEPHANIE BRIDOUX

ENSEIGNEMENT DES PREMIERES NOTIONS DE TOPOLOGIE A L'UNIVERSITE. UNE ETUDE DE CAS.

Stephanie.BRIDOUX@umons.ac.be

Université de Mons (Belgique) – LDAR, Université Paris Diderot

Résumé

Notre travail de thèse trouve son origine dans un constat d'échec ressenti aux évaluations concernant un enseignement de topologie donné en première année d'université et dans lequel nous prenons une part active. Dans cet article, nous avons choisi de montrer de manière assez globale la démarche méthodologique qui nous a guidée dans notre recherche d'une part pour élaborer un dispositif d'enseignement que nous avons expérimenté dans nos classes et d'autre part pour approcher les apprentissages en topologie réalisés par les étudiants après expérimentation.

Contexte du travail et questions de recherche

Notre intérêt pour l'enseignement de la topologie trouve son origine dans notre expérience d'enseignante. Nous avons en effet donné pendant plusieurs années les travaux dirigés d'un cours d'analyse mathématique dans lequel un chapitre était consacré à la topologie dans l'espace R^N. Au fil du temps, nous avons constaté que les questions les moins bien réussies par les étudiants aux évaluations portaient spécifiquement sur cette partie du cours. Plus précisément, des erreurs étaient repérées dès la restitution des définitions. Les étudiants donnaient souvent des définitions incomplètes ou encore des définitions vérifiées par tous les objets. Un autre aspect frappant était qu'ensuite, les étudiants parvenaient à utiliser ces définitions erronées dans les exercices sans s'apercevoir qu'elles menaient à des conclusions incohérentes.

Notre travail de thèse (Bridoux, 2011) s'est tout d'abord attaché à mieux comprendre ce constat d'échec puis à élaborer un dispositif d'enseignement visant à améliorer les apprentissages des étudiants, tout en tenant compte des contraintes institutionnelles qui délimitent le cours de topologie en question. Dans cette contribution, nous avons choisi de montrer quels types d'analyses didactiques ont été menées d'une part en amont de l'élaboration de notre dispositif pour mieux comprendre les difficultés des étudiants et dégager des pistes d'amélioration et d'autre part en aval pour évaluer les apprentissages réalisés par les étudiants après avoir expérimenté le dispositif dans nos classes. Notre objectif consiste donc à montrer la démarche méthodologique qui nous a guidée dans notre recherche tout en présentant de manière assez globale les résultats importants issus de chaque analyse et comment ceux-ci ont permis pas à pas d'apporter des sources de réponses à notre questionnement. Avant de présenter nos questions de recherche, nous décrivons plus précisément l'enseignement de topologie visé dans notre travail, en mettant en évidence les contraintes institutionnelles qui lui sont associées.

Le cours de topologie qui nous intéresse est suivi par des étudiants en première année universitaire à l'Université de Mons (Belgique), issus de trois filières : mathématique, physique et informatique. Le cours porte sur la topologie de l'espace R^N et les notions visées sont celles d'intérieur et d'adhérence d'un ensemble ainsi que celles d'ensemble ouvert ou fermé. Chaque notion est caractérisée en termes de boules et en termes de suites à partir du formalisme suivant. Pour un ensemble *A* inclus à R^N, l'intérieur et l'adhérence de *A*, notés respectivement int *A* et adh *A*, sont définis de la manière suivante :

$\operatorname{int} A = \left\{ x \in R^N : \exists r > 0, B(x,r) \subseteq A \right\}$, où $B(x,r)$ désigne la boule ouverte de centre *x* et de rayon *r*;

$\operatorname{int} A = \left\{ x \in R^N : \forall (x_n) \subseteq R^N, (x_n \to x) \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathrm{N}, \forall n \geq n_0, x_n \in A) \right\}$;

$\operatorname{adh} A = \left\{ x \in R^N : \forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing \right\}$;

$\operatorname{adh} A = \left\{ x \in R^N : \exists (x_n) \subseteq A, x_n \to x \right\}$.

Les notions d'ouvert et de fermé sont alors définies comme suit:

A est ouvert ssi $\forall x \in A, \exists r > 0, B(x,r) \subseteq A$;

A est ouvert ssi $\forall x \in A, \forall (x_n) \subseteq R^N, (x_n \to x) \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathrm{N}, \forall n \geq n_0, x_n \in A)$;

A est fermé ssi $\forall x \in R^N, (\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing) \Rightarrow x \in A$;

A est fermé ssi $\forall x \in R^N, \forall (x_n) \subseteq A, (x_n \to x) \Rightarrow (x \in A)$.

Ces notions sont introduites par leurs définitions, sans réelle motivation. Des propriétés classiques sur les ouverts et les fermés (par exemple les résultats concernant l'intersection ou la réunion d'une famille quelconque d'ensembles ouverts ou fermés) sont également démontrées à partir de ces définitions. Du côté des exercices, le principal objectif est que les étudiants soient capables de déterminer si des sous-ensembles classiques de R et de R^2 sont ouverts ou fermés et de justifier leur choix en manipulant les caractérisations étudiées dans le cours magistral. Les exercices de manipulation des définitions sont très présents dans le cours. Il s'agit d'une contrainte à prendre en compte. De plus, la manipulation du symbolisme contenu dans les définitions s'associe à une autre contrainte institutionnelle qui concerne la rigueur attendue dans les productions des étudiants. Ceux-ci doivent en particulier citer les résultats qu'ils utilisent, détailler leurs calculs et expliciter rigoureusement leur démarche. Cet aspect de l'enseignement sera exemplifié un peu plus loin dans ce texte.

Comme cela a été expliqué, des difficultés récurrentes sont observées aux évaluations. L'une d'elles concerne la restitution des définitions. La majorité des étudiants n'est pas capable de définir correctement les notions. Par exemple, la définition suivante d'ensemble fermé, qui est en fait vérifiée par tout ensemble *A*, est donnée par 80% des étudiants :

$\forall x \in A, \forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing$.

En ce qui concerne la résolution des exercices, il est frappant de constater que beaucoup d'étudiants parviennent à manipuler correctement des écritures symboliques erronées, ce qui illustre bien le manque de sens donné aux notions, comme en témoigne la solution suivante, recopiée telle qu'elle a été proposée par un étudiant pour montrer que l'ensemble $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathrm{N}^* \right\}$ est fermé, alors que ce n'est pas le cas.

$\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathrm{N}^*\right\}$ est-il fermé ?

C'est-à-dire $\forall x \in \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathrm{N}^*\right\}, \forall r > 0, B(x,r) \cap \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathrm{N}^*\right\} \neq \varnothing$?

Soit $x \in \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathrm{N}^*\right\}$, c'est-à-dire $x = \frac{1}{n_1}, n_1 \in N^*$.

Soit $r > 0$. A-t-on $B(x,r) \cap \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathrm{N}^*\right\} \neq \varnothing$?

C'est-à-dire $\left]x - r, x + r\right[\cap \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathrm{N}^*\right\} \neq \varnothing$?

C'est-à-dire $\left]\frac{1}{n_1} - r, \frac{1}{n_1} + r\right[\cap \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathrm{N}^*\right\} \neq \varnothing$?

Oui, car $\frac{1}{n_1} \in \left]\frac{1}{n_1} - r, \frac{1}{n_1} + r\right[$ et $\frac{1}{n_1} \in \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathrm{N}^*\right\}$.

Donc $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathrm{N}^*\right\}$ est fermé.

Prenant en compte les contraintes sur les notions à enseigner et le type d'exercices visés, nous nous sommes donnée comme objectif de réfléchir à des pistes d'enrichissement, voire de modification, de cet enseignement pour tenter de surmonter les difficultés répertoriées chez les étudiants. Nous avons choisi d'aborder ce questionnement général avec des outils empruntés à la théorie de l'activité. Cette théorie, qui prend appui sur les travaux de Piaget et Vygotsky concernant la construction de connaissances, a été spécifiée à l'enseignement des mathématiques et à la situation scolaire dans les travaux de Vergnaud puis dans ceux de Robert et Rogalski. La théorie est détaillée dans Vandebrouck (2008) mais nous rappelons très schématiquement quelques éléments fondateurs que nous utilisons par la suite. Nous retenons tout d'abord deux notions importantes qui sont celles de tâche et d'activités. La tâche désigne ce qui est à faire, par exemple l'énoncé d'un exercice. Les activités désignent ce que l'étudiant développe lors de la réalisation de la tâche, en particulier tout ce qu'il pense, dit, fait… ou non en classe. Les activités peuvent donc être vues comme ce que la tâche déclenche et qui va permettre le développement de connaissances. À partir des hypothèses générales issues des travaux de Piaget, Vygotsky et Vergnaud, les activités des étudiants sont l'intermédiaire choisi pour approcher les apprentissages réalisés par les étudiants en relation avec l'enseignement correspondant. Les analyses qui en découlent vont donc s'attacher à essayer de reconstituer les activités des étudiants. Bien entendu, nous n'aurons accès qu'à des traces de ces activités mais nous étudions néanmoins les activités possibles en relation avec les choix de conceptualisation et de gestion réalisés par l'enseignant. Nous y avons accès en croisant les analyses des tâches proposées aux étudiants avec les analyses de déroulements. En ce sens, la théorie de l'activité permet de donner de l'importance à la fois aux contenus et aux déroulements.

Deux questions de recherche ont alors émergé de ce choix théorique. En amont de l'enseignement, il s'agit d'étudier comment nous pouvons élaborer un enseignement de topologie mettant en jeu des activités supposées « favorables » aux apprentissages ? Et en aval de l'enseignement, l'enjeu est de savoir comment nous pouvons décrire les apprentissages effectivement réalisés par les étudiants ? Comme nous l'avons expliqué, notre objectif consiste à montrer quels types d'analyses ont contribué à l'étude de chaque question. Nous allons donc les expliciter au fil de ce texte.

Diagnostic d'un enseignement de topologie

Caractéristiques de l'enseignement initial

Les caractérisations des notions de topologie visées dans l'enseignement initial mènent d'emblée aux constatations suivantes. Les notions sont caractérisées dans un formalisme dont nous pouvons tout d'abord dire qu'il mélange différents symbolismes. En effet, des symboles relevant des domaines de la logique (quantificateurs, implication) et de la théorie des ensembles (inclusion, appartenance, intersection, ensemble vide) sont utilisés. De plus, ces caractérisations s'appuient sur des connaissances en cours d'acquisition telles que la convergence d'une suite et la notion de boule de centre x et de rayon r (celles-ci sont étudiées dans les chapitres qui précèdent la topologie).

Concernant le choix des exercices proposés en travaux dirigés, nous avons expliqué qu'il s'agissait principalement de tâches de manipulation des définitions données dans le cours magistral. Cet aspect apparaît comme une contrainte à respecter dans notre travail où ce type d'exercices doit perdurer dans l'enseignement. Une autre contrainte forte de l'institution concerne la rigueur attendue dans la rédaction des solutions. Les étudiants doivent en effet justifier en détail tous leurs arguments, en citant les résultats utilisés et en développant tous les calculs. Nous donnons ci-dessous un exemple de solution exigée pour montrer que l'intervalle]-1,2[est un ensemble ouvert.

À prouver: $\forall x \in \left]-1,2\right[, \exists r > 0, B(x,r) \subseteq \left]-1,2\right[$.

Soit $x \in \left]-1,2\right[$. Prenons $r = \min\left\{x+1, 2-x\right\}$.

On a bien $r > 0$ car $x \in \left]-1,2\right[$.

On a $B(x,r) \subseteq \left]-1,2\right[$. En effet, soit $y \in B(x,r)$, c'est-à-dire $x - r < y < x + r$.

Si $r = x+1$, alors on a, en remplaçant, $x-(x+1) < y < x+(x+1)$.

La première inégalité donne $-1 < y$. Comme $x+1 \leq 2-x$ par définition du minimum, la deuxième inégalité implique $y < x+(2-x)$, c'est-à-dire $y < 2$.

Donc $y \in \left]-1,2\right[$.

Si $r = 2 - x$, on démontre de manière analogue que $y \in \left]-1,2\right[$.

Premières explications de l'échec des étudiants

Pour mieux comprendre le constat d'échec auquel mène cet enseignement de topologie, une première entrée consiste à étudier les spécificités de ces notions, telles qu'elles sont introduites et travaillées dans le cours. En effet, l'enseignement d'une nouvelle notion, et plus précisément son introduction et la nature des exercices proposés aux étudiants, dépend fortement du type de la notion (Robert in Vandebrouck et al., 2008). Celui-ci est notamment caractérisé par la distance entre les connaissances déjà travaillées auparavant par les étudiants et les nouvelles connaissances. Robert distingue trois caractères que peuvent présenter les nouvelles notions par rapport aux anciennes. Le caractère généralisateur des notions apparaît quand le nouveau étend l'ancien, en ayant une portée plus large que ce qui était déjà à la disposition des étudiants. Le caractère unificateur des notions apparaît lorsque la nouvelle notion remplace plusieurs éléments anciens qui étaient, jusque là, traités de manière isolée. Le caractère formalisateur d'une notion apparaît quand un nouveau formalisme est introduit, celui-ci ne se limitant pas nécessairement à l'utilisation de symboles mathématiques. C'est la combinaison de ces caractères qui amène à définir différents types de notions.

Suivant cet angle d'attaque, les notions de topologie ont les caractéristiques des notions formalisatrices, unificatrices et généralisatrices, notées notions FUG par la suite, au sens de Robert (1998). Il s'agit de notions qui unifient des notions antérieures en les généralisant à partir d'un formalisme souvent nouveau pour les étudiants. Les notions de topologie étudiées ici apportent effectivement un aspect unificateur autour de notions antérieures telles que les intervalles et des ensembles classiques étudiés dans R et R^2, et le formalisme utilisé pour généraliser les notions dans R^N s'appuie sur des symboles mathématiques qui ont été peu travaillés par les étudiants au lycée. Cette interprétation des notions enseignées en termes de notions FUG semble donc légitime.

Nous nous sommes ensuite tournée du côté de la nature des tâches proposées aux étudiants. Nous avons pour cela utilisé les outils d'analyse des contenus développés par Robert (1998). Il s'agit de décrire, pour chaque exercice, le travail mathématique à réaliser a priori, par les étudiants, dans les tâches de manipulation de définitions, en regardant les connaissances sollicitées (anciennes et nouvelles) et en détectant comment ces connaissances doivent être adaptées pour résoudre la tâche. Robert distingue des grands types d'adaptations telles l'organisation du raisonnement, les changements de point de vue, l'introduction d'intermédiaire, les changements de cadres, les mélanges de registres…

Nous avons montré que les tâches proposées consistent en un travail dans le registre symbolique qui requiert des adaptations complexes et qui ne nécessite finalement pas de réelles connaissances en topologie mais des connaissances sur la manipulation d'inégalités (dans R) ainsi que des connaissances en logique et en théorie des ensembles. Ces aspects sont selon nous bien illustrés dans l'exemple présenté précédemment où il s'agit de montrer que l'intervalle $]-1,2[$ est un ensemble ouvert.

Cette première partie du travail révèle donc que l'enseignement de topologie étudié ici est presque exclusivement centré sur le caractère formalisateur des notions à partir d'un travail dans le registre symbolique. Il n'y a donc pas, dans cet enseignement, de dynamique productive entre le sens et la technique mise en œuvre dans les exercices. Tout se passe alors comme si les étudiants manipulaient des symboles qui ne représentent rien pour eux puisqu'ils n'ont pas les moyens de mettre du sens sur les notions.

Ce premier diagnostic nous renseigne donc sur le fonctionnement du savoir et sur les connaissances mises en jeu. Il nous a permis de repérer certaines caractéristiques des notions dans le paysage mathématique des étudiants. Cependant, cette étude reste spécifique à un système d'enseignement précis soumis à des contraintes strictes. Il s'agit donc d'adopter un point de vue plus général pour interroger ce qui peut contribuer à l'élaboration du sens des notions à enseigner.

Spécificités des notions de topologie

Un questionnement élargi

Suivant un angle d'attaque plus général, nous avons fait l'hypothèse que parvenir à préciser les spécificités des notions de topologie en nous dégageant de notre système d'enseignement pourrait éclairer notre propos. Plus précisément, nous nous sommes donnée comme objectif de caractériser plus finement leurs caractères formalisateur, unificateur et généralisateur. Des travaux antérieurs sur les notions FUG ont fourni un premier éclairage sur les spécificités de telles notions. Il est tout d'abord difficile d'introduire une notion FUG avec un problème initial où la notion apparaîtrait comme l'outil de résolution optimal en permettant aux étudiants de faire fonctionner seuls la nouvelle notion. Robert (1982) a identifié la notion de convergence d'une suite numérique comme un exemple de notion FUG. Elle propose alors une introduction mixte de la notion s'appuyant sur l'utilisation de dessins et alternant les phases de recherche des étudiants avec des phases d'institutionnalisation de l'enseignant. D'autre part, les caractéristiques épistémologiques des notions FUG tiennent à une genèse longue et souvent sinueuse. Cet aspect est bien illustré par Dorier (Dorier et al., 1997) lorsqu'il retrace la genèse historique des concepts élémentaires de l'algèbre linéaire. Prenant en compte les spécificités de ces concepts, il intègre dans son enseignement des commentaires méta-mathématiques, au sens de Robert et Robinet (1996), pour introduire la notion d'espace vectoriel. Comme cela a déjà été dit précédemment, une autre difficulté d'enseignement des notions FUG est celle de parvenir à leur donner du sens.

Nous retenons de ces travaux des éléments à prendre en compte pour tenter d'agir sur l'enseignement de topologie décrit ici. Prenant appui sur les travaux de Dorier, il y a certainement lieu d'éclairer la question du sens en interrogeant la genèse et l'épistémologie des notions. Dans notre thèse, nous avons approfondi la question de l'introduction des notions par l'étude de quelques manuels. En d'autres termes, nous nous sommes intéressée au phénomène de transposition didactique des notions de topologie, au sens de Chevallard (1991). Nous n'évoquons ici que les aspects historiques de notre travail.

Notre démarche consiste donc maintenant à comprendre le cœur et la fonction des notions de topologie dans l'histoire dans des perspectives d'enseignement. En situant notre questionnement dans le cadre de la théorie de l'activité, nous nous focalisons sur deux moments clés de l'enseignement susceptibles de déclencher des activités chez les étudiants : l'introduction des notions et les tâches proposées. C'est suivant ces deux axes que nous orientons notre propos. Ce choix a des conséquences méthodologiques sur nos analyses que nous précisons dans ce qui suit.

Les interactions entre la didactique, l'histoire et l'épistémologie des mathématiques ont notamment été étudiées par Dorier (2000). Comme il le souligne,

> Une part importante de l'analyse didactique consiste à prendre en compte l'évolution et la constitution du savoir historique dans la sphère savante et ses rapports avec la constitution du savoir enseigné (ibid.).

Mais notre objectif reste avant tout piloté par la didactique des mathématiques. Par conséquent, nous rejoignons le point de vue suivant, développé par Robert (2007), concernant la nature d'un travail historique et épistémologique dans le cadre d'une recherche en didactique des mathématiques :

> Ce travail diffère fondamentalement de celui de l'historien ou de l'épistémologue : nous ne faisons pas avancer les réflexions sur le sujet, nous cherchons à tirer des travaux déjà faits des éléments assez globaux sur ce qui a pu mener les découvertes et notamment les problèmes éventuels ou les projets à l'origine des avancées, sur les difficultés qui se sont présentées, sur l'ordre dans lequel les notions sont apparues, etc. (ibid.).

Le récit d'éléments historiques concernant l'émergence et l'évolution de la topologie, en tant que domaine des mathématiques, existe déjà dans divers travaux (voir par exemple Dieudonné (1978), Manheim (1964) ou James (1999)). Sur un plan méthodologique, nous cherchons à retirer des travaux existants des éléments pertinents pour reconstituer une synthèse historique permettant de mettre du sens sur les caractères FUG actuels des notions de topologie. Nous avons donc opéré une sélection personnelle de travaux en lien avec nos objectifs tout en adaptant la méthodologie développée par Dorier (2000). C'est précisément cette vue sélective qui nous amène à incorporer une composante épistémologique dans l'histoire retracée. Nous pointons ici quelques travaux marquants qui montrent l'émergence de certaines notions de topologie, quels types de problèmes ont motivé leur introduction et avec quel formalisme celles-ci ont émergé. Nous décrivons ensuite quelques pistes d'enseignement qui ont découlé de cette partie historique du travail.

Genèse et développement historiques : les caractères FUG des notions de topologie

Vu a posteriori, au début du 19ème siècle, certaines théories font encore défaut. Par exemple, les notions de limite, de continuité, de dérivée et d'intégrale ne sont pas définies de manière précise. Il n'y a pas non plus de construction de l'ensemble des nombres réels. Les séries trigonométriques, les séries de fonctions et les questions de convergence associées ne sont pas traitées rigoureusement. Deux types de questionnements vont donc occuper les mathématiciens du 19ème siècle : d'une part la volonté de définir rigoureusement les notions de base de l'analyse et d'autre part l'étude des séries. La genèse et le développement historique des premières notions de topologie touchent une majeure partie des travaux menés au 19ème siècle et au début du 20ème siècle.

En 1817, Bolzano utilise dans son mémoire sur le théorème des valeurs intermédiaires un procédé d'emboîtement d'intervalles qui peut être rapproché d'une démarche très fréquente en topologie qui consiste à recouvrir un ensemble par des intervalles. Les travaux de Bolzano ne font pas émerger de notions de topologie en tant que telles mais ils témoignent néanmoins de la présence de raisonnements de nature topologique et montrent le besoin de recourir à ces notions pour démontrer rigoureusement un résultat majeur en analyse. Dans son *Cours d'analyse* donné à l'École Polytechnique de Paris, Cauchy (1821) énonce un résultat faux. Il affirme que si une série de fonctions continues est convergente dans le voisinage d'un point x_0, alors sa limite est une fonction continue dans le même voisinage. La démonstration donnée par Cauchy met toutefois en relief l'idée de convergence uniforme d'une série de fonctions. Cauchy mentionne son erreur quelques années plus tard et donne une définition correcte de la convergence uniforme, sans la qualifier de cette manière. L'existence de différents types de convergence, notamment pour les suites de fonctions, jouera un rôle dans l'émergence de certaines notions de topologie.

Dans un cours sur le calcul différentiel, Weierstrass (1894) définit la notion de continuité. Il démontre également des résultats de topologie élémentaire comme le théorème qui affirme, dans le langage actuel, que si f est une fonction continue et si $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$, alors quel que soit y_3 appartenant à $[y_1, y_2]$, il existe x_3 appartenant à $[x_1, x_2]$ tel que $f(x_3) = y_3$. Weierstrass introduit des notions de topologie qu'il utilise ensuite pour démontrer des résultats sur les séries entières. Par exemple, un voisinage d'un point x_0 est constitué de tous les x « pour lesquels la différence $x - x_0$ en valeur absolue ne dépasse pas une borne déterminée ». Un voisinage est donc un disque de centre x_0. Aussi, un point a appartient à l'ouvert O « s'il existe un voisinage de a qui est contenu dans O » ou encore a appartient à la frontière de O « si dans tout voisinage de a il y a des points de O et des points qui n'appartiennent pas à O ».

Cantor est au cœur des deux questionnements que sont l'étude des séries et l'élucidation des notions de base de l'analyse. L'étude d'un résultat sur la convergence des séries trigonométriques (1883) l'amène à donner une construction rigoureuse de l'ensemble des nombres réels. Il s'intéresse ensuite aux liens entre les nombres réels et la géométrie de la droite. Il définit, à cette occasion, les notions de topologie suivante :

- Un voisinage d'un point est un intervalle dans lequel ce point est contenu ;

- Un point limite d'un système de points P est un point de la droite tel que dans son voisinage, il y ait un nombre infini de points du système P ;
- Un point isolé d'un système de points P est un point qui, appartenant à P, n'est pas en même temps point limite de P.

Le traité de Jordan paru en 1893 (seconde édition) est l'un des premiers textes qui globalise des notions de topologie dans R. Pour un ensemble donné E, Jordan classe tous les points de l'espace en trois catégories : les points intérieurs à E, les points extérieurs à E et intérieurs à son complémentaire et les points frontières. C'est à partir de la notion d'écart (la taxi-distance dans le langage actuel) que ces notions sont définies. Le théorème de Bolzano-Weierstrass est également démontré.

Ainsi, comprendre, caractériser et définir rigoureusement l'ensemble des réels amène à étudier les sous-ensembles de la droite réelle et à catégoriser des types de points en fonction de leur position occupée dans les sous-ensembles (point isolé, point limite, point frontière…). Il y a donc une première unification d'un certain nombre de notions à partir d'un langage commun qui fournit un arsenal d'outils pour démontrer des résultats classiques d'analyse.

À la fin du 19ème siècle, la volonté de développer des théories abstraites est de plus en plus présente, notamment en travaillant avec des ensembles dont les éléments ne sont pas des nombres. Hausdorff (1914) introduit le concept d'espace topologique qui unifie les notions topologiques antérieures. Cette seconde unification est de nature différente de la première. Ici, il ne s'agit plus de catégoriser les objets mais bien d'utiliser une même notion, celle d'espace topologique, pour unifier les notions précédentes.

Ainsi, les premières définitions des notions topologiques sont données dans R sous la forme d'une catégorisation des types de points. Elles n'amènent pas de généralisation à proprement parler. Les définitions se généralisent dans R^N avec le concept de boule ou de sphère (Baire, 1904) puis dans les espaces métriques avec les travaux de Fréchet (1906). La généralisation est liée à l'espace dans lequel on travaille. Une fois encore, le concept d'espace topologique est la source majeure de généralisation. Son émergence amène un déplacement de l'attention des éléments d'un espace vers les sous-ensembles puisque la structure des espaces est donnée à partir des conditions sur ces sous-ensembles « privilégiés » que sont les ouverts.

Bien que très général (le lecteur pourra consulter la thèse pour une étude détaillée des travaux évoqués), ce panorama montre que les notions de topologie sont utilisées dans différents buts. Ainsi, les notions de topologie élémentaire, c'est-à-dire la topologie des espaces R, R^2 et R^N sont introduites pour fonder l'analyse sur des bases rigoureuses. Ce sont en fait les questions de convergence qui sont les éléments déclencheurs pour l'introduction de ces notions. Ces travaux montrent une unification des notions sous la forme d'une caractérisation des sous-ensembles de R à partir de la position des points. Le passage de R à R^N se fait de manière très naturelle, sans rupture. Nous trouvons rapidement une généralisation des notions dans R^N et tout comme l'unification des notions, celle-ci se déroule elle aussi sans accident. Les mêmes notions définies dans le cadre de la topologie métrique ou générale permettent quant à elles de travailler dans des espaces généraux. C'est le besoin de travailler dans des espaces de fonctions qui est ici à l'origine de l'introduction des notions. Par ailleurs, historiquement parlant, c'est un vaste réseau de notions qui apparaît puisque l'étude retracée montre l'émergence des notions de voisinage, de point intérieur, point limite, point isolé, ouvert, fermé, intérieur, fermeture…

L'histoire montre aussi que la formalisation des notions est associée à des choix de caractérisation très variés. Nous trouvons des expressions précises et spécifiques qui traduisent les choix des mathématiciens dans leurs travaux. Ces caractérisations sont principalement écrites dans la langue naturelle, les symboles utilisés sont essentiellement des lettres pour nommer les ensembles et les points ainsi que des inégalités. Le registre symbolique utilisé pour écrire les définitions telles qu'elles sont données actuellement apparaît avec les avancées dans les domaines de la logique et de la théorie des ensembles, c'est-à-dire au début du $20^{ème}$ siècle.

Confrontation à l'enseignement initial

Même s'ils sont présentés ici brièvement, ces quelques faits historiques nous permettent de développer des leviers à prendre en compte dans l'élaboration de notre projet d'enseignement pour introduire les notions de topologie en tentant de surmonter l'obstacle du formalisme.

En premier lieu, il apparaît que les problèmes qui ont motivé l'introduction des premières notions de topologie (séries trigonométriques, théorie des fonctions…) ne sont pas accessibles au niveau d'enseignement visé ici. Néanmoins, la réalité historique montre que les notions à enseigner s'insèrent dans un réseau plus vaste dans lequel sont intégrés des types de points ou encore la notion de voisinage. Nous retenons donc l'idée d'un travail en réseau de notions. Les premières notions en lien direct avec notre travail qui émergent dans l'histoire sont celles de point intérieur et de point adhérent (dans le langage actuel) à un sous-ensemble de R . D'où l'idée de commencer par définir ces types de points pour déplacer ensuite l'attention sur les sous-ensembles. Un itinéraire de la forme suivante peut être envisagé pour introduire les notions. La notion d'ouvert, par exemple, pourrait émerger à partir d'un travail en réseau sur les notions de point intérieur et d'intérieur d'un ensemble. Un itinéraire semblable peut être défini pour la notion d'ensemble fermé à partir de celle de point adhérent.

Une autre piste concerne un travail sur les registres d'écritures. Les premières définitions qui émergent sont écrites dans la langue naturelle. D'autre part, l'histoire montre un appui sur des mots du langage courant (isolé, extérieur, écart…) qui peuvent aider au développement d'une certaine intuition géométrique à associer aux notions. D'où l'idée de mélanger le registre de la langue naturelle avec un registre d'écriture permettant aux étudiants de s'appuyer sur l'intuition géométrique, par exemple en proposant des dessins mettant en jeu des objets géométriques accessibles aux étudiants à ce niveau d'enseignement.
Enfin, pour amener les étudiants à comprendre ce qui est en jeu dans l'enseignement de la topologie, une piste à creuser est l'élaboration de commentaires non strictement mathématiques ou méta-mathématiques (Robert et Robinet, 1996) à proposer aux étudiants sur ces notions au fil de l'enseignement. D'autres pistes sont étudiées dans la thèse.
Nous allons maintenant montrer comment ces différents aspects se sont intégrés dans la conception de notre dispositif.

Élaboration et expérimentation d'un dispositif didactique

Le dispositif: quelques éléments méthodologiques

Dans le cadre de la théorie de l'activité, les apprentissages mathématiques sont décrits en termes de conceptualisation et sont étudiés via les activités des étudiants. La conceptualisation est selon nous associée à la prise de sens des notions en tant qu'outil et en tant qu'objet, au sens de Douady (1986). Cela implique d'avoir accès aux notions dans différents cadres et avec différents registres d'écritures, au sens de Duval (1995), pour les mettre correctement en fonctionnement dans les exercices proposés, même quand les notions à utiliser ne sont pas indiquées dans l'énoncé. Les entraînements techniques et la construction d'automatismes participent également à cette prise de sens. La conceptualisation est donc « une notion relative, et n'est jamais achevée » (Robert et Rogalski, 2004), qui s'associe à une certaine flexibilité entre les diverses représentations des notions en termes de cadres de travail et de registres d'écritures. L'insertion des notions dans le bagage mathématique des étudiants contribue elle aussi à ce nous englobons dans la conceptualisation et à la mise en place d'une dynamique productive entre les dialectiques outil/objet d'une part et sens/technique d'autre part.

Après avoir défini ce que nous englobons sous le terme « conceptualisation », il s'agit d'élaborer un enseignement susceptible de favoriser les apprentissages en topologie des étudiants et de pouvoir apprécier leurs activités pour étudier si elles mènent à la conceptualisation visée. Dans cet article, nous nous focalisons sur l'introduction des notions et la nature des tâches proposées qui sont deux phases de l'enseignement pouvant amener de la variabilité dans les activités. Bien entendu, les modalités d'organisation du travail en classe et les interventions de l'enseignant peuvent elles aussi influencer les activités des étudiants. De ce fait, les accompagnements langagiers du professeur peuvent être pris en compte pour étudier les liens entre les activités des étudiants et leurs apprentissages. Pour reconstituer les activités possibles des étudiants et les mettre en regard avec les activités prévues à partir des analyses a priori, le chercheur s'appuie sur les interventions de l'enseignant durant le travail des étudiants. Deux types d'aides ont été distingués dans les phases d'interactions entre le professeur et les étudiants. Les aides « à fonction procédurale » sont données par l'enseignant avant ou pendant le travail des étudiants. Elles peuvent conduire au découpage de la tâche en plusieurs sous-tâches simples et isolées. Ces aides modifient donc les tâches prévues et par conséquent les activités possibles. Les aides « à fonction constructive » concernent les reprises du travail déjà réalisé, les bilans, les interventions pouvant amener les étudiants à revenir sur leur activité. Ces aides ajoutent donc quelque chose entre « l'activité stricte de l'élève et la construction (espérée) de la connaissance qui pourrait en résulter » (Pariès, Robert, Rogalski, 2008).

Compte tenu de nos choix, nous regardons maintenant la tâche qui a servi d'introduction aux notions de topologie dans notre dispositif ainsi que quelques exercices délimités par les contraintes de l'institution. Pour chacun, nous donnons des éléments d'analyse a priori et concernant les déroulements en classe. Nous intégrons aussi dans notre propos des aspects plus globaux qui permettent une vue comparative entre l'enseignement initial et notre dispositif.

L'expérimentation du dispositif a pris environ 16 heures durant lesquelles la théorie et les exercices étaient intégrés. L'enseignement a été proposé à un groupe de 23 étudiants de première année universitaire dans une filière mathématique. Avant l'enseignement, les étudiants ont travaillé sur la convergence des suites numériques, la notion de norme, les limites et la continuité des fonctions d'une ou de plusieurs variables. Après le cours sur la topologie viennent les notions de dérivée et de compacité, notamment. Il nous semble également important de préciser que nous étions dans la double posture d'enseignant-chercheur pour mener cette expérimentation.

L'introduction des notions

Suite aux analyses didactiques, historiques et épistémologiques menées dans notre travail, nous avons choisi d'élargir le réseau de notions à enseigner aux notions de point intérieur et de point adhérent avant d'introduire les notions visées par l'institution qui sont celles d'intérieur et d'adhérence d'un ensemble, d'ensemble ouvert ou fermé.

Alors que, dans l'enseignement initial, l'introduction des notions se faisait immédiatement dans le registre symbolique, nous avons élaboré une séquence d'introduction appuyée par un travail dans les registres du dessin et de la langue naturelle. Nous donnons l'énoncé tel qu'il a été proposé aux étudiants.

Voici 4 propriétés mettant en relation un ensemble $A \subseteq R^2$ et un point $p \in R^2$.

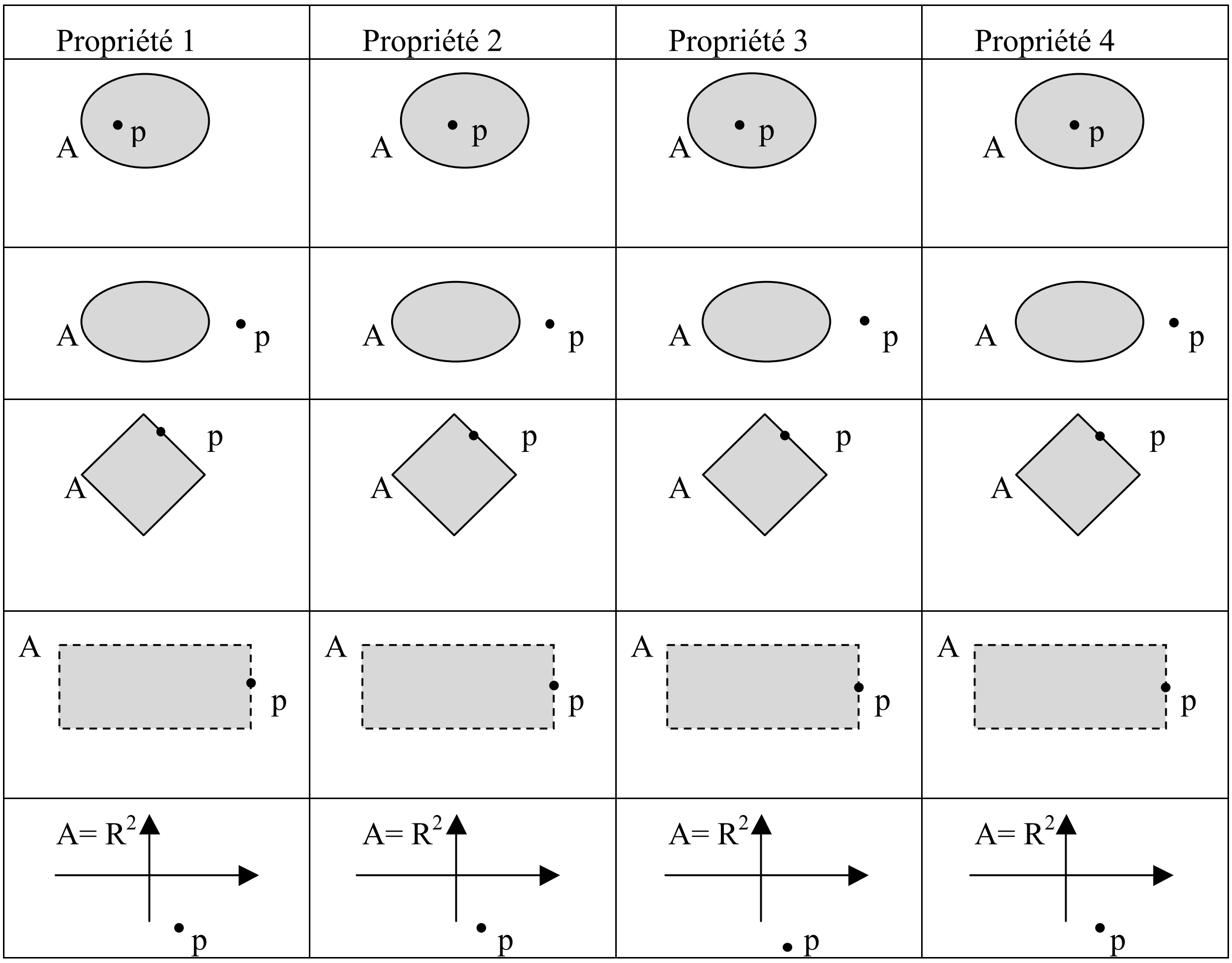
1. *A* contient une boule ouverte de centre *p*.
2. *A* contient toutes les boules ouvertes de centre *p*.
3. Il y a une boule ouverte de centre *p* qui intersecte *A*.
4. Toutes les boules ouvertes de centre *p* intersectent *A*.

Dans chacune des situations suivantes, dites

- Si *p* est un point de *A* ou non ;
- Si *p* et *A* vérifient ou non les propriétés 1, 2, 3 et 4. Pour chaque propriété, justifiez votre réponse sur le dessin.

Selon vous, quelle est la propriété qui traduit l'idée que

p est un point intérieur à *A* : ……………..
p est un point adhérent à *A* : ……………..



Pour élaborer cette séquence, nous nous sommes appuyée sur des leviers qui sont selon nous susceptibles d'amener les étudiants à donner du sens aux nouvelles notions. Nous pensons que le recours à l'intuition géométrique, avec un travail sur des dessins grâce à la notion de boule, associé au vocabulaire utilisé (« être à l'intérieur », « être adhérent » sont des expressions du langage courant) peuvent aider les étudiants à choisir la caractérisation correcte. L'absence du registre symbolique permet aussi aux étudiants de se focaliser sur les dessins et les mots et de construire une image mentale plus robuste que celle qui pourrait se construire avec des symboles.

Du côté des activités attendues, les étudiants doivent réaliser la tâche en autonomie, il n'est pas prévu que l'enseignant intervienne durant sa réalisation. Il nous semble aussi important d'insister sur le changement de point de vue à apporter sur le type de justification attendu. Les étudiants sont habitués à devoir expliciter leur raisonnement en travaillant dans le registre symbolique, donc en manipulant des écritures quantifiées dont on sait qu'ils leur donnent peu de sens alors qu'ici ce sont au contraire des dessins qui sont attendus. Comment les étudiants vont donc s'emparer de cette consigne ?

Cette séquence a été testée trois fois : une fois dans le dispositif et deux fois auparavant. Les activités observées ont à chaque fois été conformes aux activités attendues. Tous les étudiants ont à chaque fois retenu la caractérisation correcte pour la notion de point intérieur et un seul étudiant a choisi une caractérisation erronée pour la notion de point adhérent.

Après avoir travaillé sur cette tâche, les étudiants ont donc caractérisé les notions de point intérieur et de point adhérent dans la langue naturelle à partir de la notion de boule. C'est là un autre choix didactique que nous avons fait par rapport à l'enseignement initial. Ici, le début de l'enseignement ne sollicite que la notion de boule pour caractériser les notions, celle de suite intervient plus tard dans l'enseignement. Avec l'aide de l'enseignant, ces caractérisations sont ensuite traduites dans le registre symbolique. Du point de vue de la syntaxe formelle, démarrer l'enseignement par l'introduction de types de points permet de manipuler une écriture contenant un unique quantificateur (par exemple, p est un point intérieur à A si $\exists r > 0, B(p,r) \subseteq A$).

Ces premières notions permettent ensuite d'introduire les notions visées dans l'enseignement avec un questionnement justifié. Prenons comme exemple l'itinéraire qui découle de la notion de point intérieur. Un cheminement tout à fait semblable est envisagé à partir de la notion de point adhérent. Au terme de l'activité, l'étudiant a tout d'abord l'image qu'un point p est intérieur à l'ensemble A si p a un peu de place autour de lui dans A. Cette image est tout d'abord formalisée de la manière suivante : p est un point intérieur à A si A contient une boule ouverte de centre p puis dans le registre symbolique. La notion de point intérieur amène alors l'idée naturelle de considérer, pour un ensemble A, l'ensemble des points qui lui sont intérieurs, ce qui permet de définir l'intérieur de A à partir du formalisme suivant : $\operatorname{int} A = \{p \in A : B(p,r) \subseteq A\}$. Une fois cette notion introduite, une question qui émerge tout aussi naturellement est de se demander si un ensemble peut coïncider avec son intérieur et d'introduire ainsi la notion d'ensemble ouvert en disant qu'un ensemble A est ouvert si $A = \operatorname{int} A$. Un cheminement équivalent peut être suivi à partir de la notion de point adhérent pour parvenir à la notion de fermé.

Dans le dispositif, le début de l'enseignement ne sollicite que la notion de boule pour caractériser les notions ; celle de suite apparaît plus tard dans le cours, contrairement à l'enseignement initial où les deux notions étaient d'emblée utilisées dans les définitions.

Les tâches de manipulation des définitions

Concernant les exercices, nous avons respecté la contrainte de proposer des tâches de manipulation des définitions. Dans l'enseignement initial, ces tâches étaient complètement laissées à la charge des étudiants. Nous avons précédemment montré la complexité du travail mathématique engendré par ce type d'exercices, nous amenant à penser que de laisser chercher les étudiants de manière autonome pour résoudre ces exercices ne leur permet pas de dépasser les difficultés repérées.

Ainsi, un autre aménagement de l'enseignement initial consiste à intégrer de nombreux exemples, tant au niveau des types de points que des types d'ensembles étudiés. Nous pensons que l'exemplification peut au moins contribuer à enrichir le stock de référence des étudiants et à mieux se représenter la structure topologique des ensembles en repérant les ressemblances et les différences dans les exemples traités. Mais nous faisons également l'hypothèse que la multiplication des exemples peut favoriser les apprentissages des étudiants en topologie moyennant une gestion adaptée du travail de l'enseignant en classe.

Nous avons donc intégré des phases durant lesquelles c'est l'enseignant qui prend en charge la résolution des exercices de manipulation des définitions en montrant aux étudiants le fonctionnement des connaissances mathématiques en jeu, par le biais de commentaires méta-mathématiques. Ces commentaires concernent notamment l'utilisation des connaissances en logique et en théorie des ensembles sollicitées dans ces exercices. Le choix fait ici ne consiste donc pas à prévoir un cours avant l'enseignement portant sur ces connaissances mais bien de les expliciter et de les travailler au fur et à mesure qu'elles apparaissent dans l'enseignement de topologie.

Pour illustrer notre propos, nous donnons deux exercices proposés à différents moments de l'enseignement. L'exercice 1 est donné juste après l'introduction des notions de point intérieur et de point adhérent, l'exercice 2 apparaît quant à lui à la fin de l'enseignement.

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, on donne un point p et un ensemble A. Dites si le point p est intérieur à A ou non, adhérent à A ou non. Justifiez votre réponse.

1) $p = \frac{1}{3}, A = [0,1] \subseteq R$

2) $p = -\sqrt{2}, A = [-2,1] \subseteq R$

3) $p = 1, A = [0,1[\subseteq R$

4) $p = \frac{1}{2}, A = \left\{\frac{1}{n} : n \in N^*\right\} \subseteq R$

5) $p = 0, A = \left\{\frac{1}{n} : n \in N^*\right\} \subseteq R$

6) $p = (2,4), A = \left\{(x,y) \in R^2 : y = x^2\right\} \subseteq R^2$

7) pour $x, y \in R$ et $r > 0$, $p = \left(x, y - \frac{r}{3}\right), A = B\left((x,y), r\right) \subseteq R^2$

Exercice 2

Les ensembles suivants sont-ils ouverts ? Fermés ? Justifiez votre réponse.

1) $[\pi, +\infty[\subseteq R$

2) $]-\infty, -2[\subseteq R$

3) $\{3\} \subseteq R$

4) $\left\{\frac{1}{n} : n \in N^*\right\} \subseteq R$

5) $\left\{(x,y) \in R^2 : 3x + 2y = 6\right\} \subseteq R^2$

L'exercice 1 a pour objectif la manipulation des caractérisations en termes de boule qui ont émergé de la tâche d'introduction et du symbolisme associé. La nature des nombres et des ensembles se complexifie au fur et à mesure de l'exercice. Aux points 6) et 7) par exemple, un changement de cadres apparaît (on passe de R à R^2) qui nécessite d'adapter les raisonnements précédents dans R sur des couples de nombres réels. L'exercice 2 porte sur la structure topologique de sous-ensembles classiques de R et de R^2 (intervalles, singleton, droite du plan…). Nous choisissons de rendre compte de l'analyse a priori des exemples 4) dans chaque exercice et du déroulement en classe qui a été observé.

Dans l'exercice 1, l'exemple 4) nécessite tout d'abord de savoir si le point *p* est intérieur ou non à l'ensemble. Il faut alors montrer que la négation de la caractérisation en terme de boule est vérifiée par le point *p*, c'est-à-dire $\forall r > 0, B\left(\frac{1}{2}, r\right) \not\subset A$. Une connaissance du cours est alors sollicitée : dans R, la boule ouverte de centre x et de rayon r est l'intervalle $\left]x - r, x + r\right[$. Le raisonnement qui en découle consiste à trouver un réel y tel que $y \in B\left(\frac{1}{2}, r\right)$ et $y \notin A$. Il convient ensuite de justifier que le choix de y convient en manipulant des inégalités (utilisation de connaissances anciennes).

Dans l'exercice 2, l'exemple 4) requiert en premier lieu de savoir si l'ensemble est ouvert ou non. L'ensemble, que nous notons *A*, n'est pas ouvert, ce qui revient à prouver que nous avons $A \not\subset \operatorname{int} A$. Cette non-inclusion d'ensembles se traduit en la recherche d'un réel y tel que $y \in A$ et $y \notin \operatorname{int} A$. Le travail de justification attendu pour montrer que le choix fait pour y convient engendre un travail mathématique semblable à celui réalisé décrit précédemment dans l'exercice 1.

Concernant le déroulement de l'exercice 1, nous (le « nous » s'associe ici à notre posture d'enseignant qui mène l'expérimentation) avons tout d'abord organisé un temps de recherche individuelle pour que les étudiants prennent connaissance des différents exemples à traiter. Ensuite, prenant appui sur les difficultés répertoriées dans la réalisation de ce type de tâches, nous avons corrigé l'exercice sous la forme d'une discussion collective durant laquelle nous avons insisté sur le type de justifications et la rigueur attendus en mettant en évidence les connaissances logiques et ensemblistes qui apparaissent dans chaque exemple. Rappelons que ces connaissances ne sont pas disponibles chez un grand nombre d'étudiants à ce stade de l'enseignement, d'où l'intérêt d'expliciter comment celles-ci sont adaptées ici.

La gestion en classe de l'exercice 2 est différente. Celui-ci commence par une recherche individuelle assez longue, pour que les étudiants aient le temps de traiter chaque exemple. C'est donc en autonomie qu'ils doivent cette fois réaliser les adaptations nécessaires à l'étude de chaque ensemble. Compte tenu des analyses a priori, nous faisons l'hypothèse que la gestion envisagée à l'exercice 1 permettra aux étudiants « d'imiter » le travail montré par l'enseignant. Alors que la gestion prévue a priori envisageait 25 minutes de travail individuel, c'est un temps de recherche de 40 minutes qui a été observé en classe. Aucun blocage particulier n'a toutefois été repéré chez les étudiants pendant la réalisation de la tâche.

Les étudiants ont travaillé individuellement tout en discutant entre eux mais nous nous sommes déplacée auprès d'eux pour maintenir les conditions de travail. Nous avons ainsi pu repérer que la majorité des étudiants parvenait à conjecturer si les ensembles étaient ouverts, fermés ou non. Quelques justifications incomplètes ont été repérées dans certaines productions (par exemple une inclusion d'ensembles non prouvée) et celles-ci ont pu être complétées à notre demande. Le travail réalisé semble donc conforme à celui prévu dans l'analyse a priori mais il est bien sûr impossible d'avoir accès à la production de chaque étudiant en classe. La correction de cet exercice a pris une forme identique à celle de l'exercice 1, c'est-à-dire celle d'une discussion collective entre les étudiants et l'enseignant, ce dernier présentant au tableau les réponses dictées par les étudiants, en les ajustant au besoin.

Apprentissages des étudiants

Pour caractériser les apprentissages des étudiants réalisés après l'expérimentation de notre dispositif, nous nous sommes appuyée sur le dépouillement de leurs copies aux évaluations. Dans les universités belges francophones, une première évaluation est organisée au mois de juin. Les étudiants qui échouent ont la possibilité de se prêter à une deuxième évaluation au mois d'août. Nous regardons ici la question portant sur la manipulation des définitions proposée à la deuxième évaluation. Une question similaire a été donnée en juin. En voici l'énoncé :

Soit $A \subseteq R^N$.

1) Définissez « A est un ensemble ouvert ».
2) Définissez « A est un ensemble fermé ».
3) À partir des définitions précédentes, dites, pour chacun des ensembles suivants, s'il est ouvert ou fermé :

- $E_1 = \{(x,y) \in R^2 : |x| \leq y\} \subseteq R^2$
- $E_2 = \left\{\frac{n+1}{n} : n \in N^*\right\} \subseteq R$
- $E_3 = \{x \in R : x^3 + x^2 + x + 1 < 1\} \subseteq R$

Dans notre thèse, nous présentons une analyse a priori de cet exercice et nous montrons que le travail mathématique à réaliser est identique à celui réalisé dans des exercices proposés durant l'expérimentation, tant du point de vue des connaissances à utiliser que des adaptations à réaliser sur celles-ci. Ainsi, un aspect important du travail attendu chez l'étudiant est de particulariser des variables communes à cet exercice et à ceux réalisés au cours, telles que la nature des nombres, le choix du rayon d'une boule, etc. Ainsi, pour inférer des éléments sur les apprentissages des étudiants, notre démarche consiste à analyser, sur la base de leurs copies, comment ils étudient la nature topologique de quelques ensembles présentant des traits communs avec ceux étudiés dans le cours et les difficultés rencontrées dans la manipulation du symbolisme.

Le dépouillement des copies montre que les étudiants ont progressé tant dans la restitution des définitions que dans les tâches de manipulation de ces dernières puisque nous avons un taux de réussite de 80%, au terme des deux évaluations, sur ce type de questions. Les erreurs observées sont désormais très ponctuelles. Par exemple, un étudiant définit l'intérieur d'un ensemble A par $\forall x \in A, \exists r > 0, B(x,r) \subseteq A$. Un autre étudiant définit un ensemble fermé par $\forall x \in A, \forall (x_n) \subseteq A$, si $x_n \to x$ alors $x \in A$. Concernant la manipulation du registre symbolique utilisé dans les définitions, nous avons rencontré un « principe du tout ou rien ».

En effet, soit l'étudiant répond correctement à la question soit il est bloqué au démarrage de l'exercice et n'écrit pratiquement rien sur sa copie et il est donc presque impossible de comprendre quelles sont ses difficultés. Voici quelques exemples d'erreurs observées dans les copies. Pour montrer que l'ensemble E_2 n'est pas ouvert, deux étudiants ne parviennent pas à trouver un réel *y* tel que $y \in B(2,r)$, pour un certain *r,* et $y \notin E_2$. Pour l'ensemble E_3, deux étudiants ne s'intéressent pas à la résolution de l'inéquation pour remarquer que E_3 est un intervalle et ne parviennent pas à conjecturer si l'ensemble est ouvert ou non, fermé ou non. Enfin, deux étudiants traduisent la non-inclusion $E_1 \not\subset \operatorname{int} E_1$ de la manière suivante : « soit $z \in E_1$. Montrons que $z \notin \operatorname{int} E_1$».

Conclusion

C'est tout d'abord en tant qu'enseignante que nous nous sommes intéressée au domaine de la topologie, voulant comprendre pourquoi les questions posées aux évaluations étaient mal réussies alors que, de notre point de vue, il s'agissait de restituer des définitions et de les manipuler sur des exemples simples. Pour aborder cette problématique avec un point de vue didactique, nous avons choisi comme premier point d'entrée d'étudier les spécificités des notions de topologie dans le cours en question. Nos analyses nous ont amenée à interpréter ces notions en termes de notions FUG et nous avons montré que les exercices de manipulation des définitions proposés à nos étudiants, dans lesquels la formalisation devrait apporter de la simplification, s'avèrent être des tâches très difficiles pour eux. Ce type d'exercices, qui apparaît comme une contrainte stricte délimitant l'enseignement, met également en jeu un travail exclusivement syntaxique, ne nécessitant finalement pas de réelles connaissances en topologie. Cet enseignement ne permet donc pas aux étudiants de donner du sens aux notions étudiées.

Partant de ce premier diagnostic, une partie de notre recherche a ensuite été consacrée à l'élaboration d'un scénario d'enseignement (cours, exercices et évaluation) respectant les contraintes institutionnelles et pour lequel nous avons fait le pari qu'il pouvait mener aux apprentissages visés tout en amenant les étudiants à travailler davantage sur le sens des notions de topologie.

De manière à nous dégager de l'institution, une étude du phénomène de transposition didactique a alors été réalisée à partir d'une étude historique de la genèse et du développement de certaines notions de topologie complétée par une analyse de quelques manuels. En orientant nos investigations historiques et épistémologiques par cette idée que les notions de topologie sont des notions FUG, nous avons pu reconstituer des éléments qui ont enrichi notre compréhension de ces différents caractères. En confrontant cette partie du travail aux difficultés précédemment répertoriées chez les étudiants, nous avons pu développer des leviers didactiques à intégrer dans l'enseignement initial de manière à l'enrichir pour mener les étudiants aux acquisitions visées. En ce sens, ces analyses menées en amont de l'élaboration de notre dispositif ont contribué à mettre une forme de relief sur les notions à enseigner (au sens de Robert, 2007) en donnant des éléments qui peuvent donner une certaine intelligibilité aux notions à enseigner, à leur fonction et à leurs enjeux.

Pour motiver l'introduction des notions, nous avons choisi de rendre visible aux étudiants un questionnement tel que l'objet à définir présente un intérêt, notamment en recourant au levier méta. Du côté des tâches de manipulation des définitions, nous avons montré comment leur réalisation en classe a été associée à un rôle spécifique de l'enseignant. Le travail d'introduction qui a été ménagé et nos choix de gestion montrent bien de quelle manière nous avons à la fois pris en compte le caractère FUG des notions et les contraintes institutionnelles.

Le dépouillement des copies des étudiants aux évaluations après expérimentation montre que la restitution des définitions est correcte chez la majorité des étudiants et l'organisation attendue, en termes d'adaptations, dans les exercices de manipulation des définitions et des écritures symboliques est réalisée correctement par 80% des étudiants.

Dans l'élaboration de notre dispositif, nous nous sommes toutefois privée de certains éléments, compte tenu des contraintes institutionnelles que nous ne nous sommes pas autorisée à franchir. Par exemple, alors que notre étude historique montre bien l'émergence des notions de topologie dans leur caractère outil pour résoudre des problèmes liés à des questions de convergence, notre dispositif ne prend pas en compte cette dimension et propose un travail sur les notions qui reste du côté de leur caractère objet. Cette limite montre toute l'importance de l'inscription des contraintes institutionnelles dans une recherche en didactique des mathématiques.

Concernant les apprentissages réalisés par les étudiants, des questions restent ouvertes, comme par exemple la question de savoir comment faire travailler sur le sens des notions, tout en ne négligeant pas la technique tout comme la question de savoir par où commencer dans l'enseignement. Ces problématiques offrent des perspectives pour poursuivre le travail entrepris sur l'enseignement des notions de topologie.

Bibliographie

Bridoux S. (2011). *Enseignement des premières notions de topologie à l'université. Une étude de cas.* Thèse de Doctorat, Université Paris Diderot. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00660249/

Cantor G. (1883). Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, *Math Ann.,* 5, 123-132, 1872, *Gesamm.Abh.,* 92-101, Springer, Berlin, 1932, trad. Française *Acta Mathematica* , 2, 336-348, 1883.

Cauchy A.L. (1821). *Œuvres complètes,* Gauthier-Villars, Paris.

Chevallard Y. (1991). *La transposition* didactique, 2ème édition, Grenoble : La Pensée Sauvage.

Dieudonné J. (dir.) (1978). *Abrégé d'histoire des mathématiques,* 2 volumes, Hermann, Paris.

Dorier J.-L. (1997). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en* question, Grenoble : La Pensée Sauvage.

Dorier J.-L. (2000). Recherche en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'Algèbre linéaire-Perspectives théoriques sur leurs interactions, *Les cahiers du Laboratoire Leibniz,* Numéro 12, Laboratoire Leibniz-IMAG.

Douady R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet, Recherches en Didactique des Mathématiques, 7/2, 5-31.

Duval R. (1995). Sémiosis et pensée humaine – Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels, Berne, Peter Lang.

Fréchet M. (1906). Sur quelques points du Calcul Fonctionnel, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 22, 1-74.

Hausdorff F. (1914). *Grundzüge der Mengenlehre,* Veit, Leipzig.

James I.M. (1999). *History of Topology,* Elsevier.

Jordan C. (1893). *Cours d'analyse, tome 1,* seconde édition, Gauthier-Villars, Paris.

Manheim J.H. (1964). *The Genesis of Point Set Theory,* Pergamon Press.

Pariès M., Robert A., Rogalski J. (2008). Analyses de séances en classe et stabilité des pratiques d'enseignants de mathématiques expérimentés du second degré, *Educational Studies in Mathematics,* 68, 55-80.

Robert A. (1982). L'acquisition de la notion de convergence des suites dans l'enseignement supérieur, Thèse d'État, Université Paris 7.

Robert A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en Didactique des mathématiques,* 18/2, 138-190.

Robert A. et al. (2007). Mettre du relief sur les mathématiques au collège et au lycée – Quelques exemples, *Document pour la formation des enseignants,* Numéro 7, Université Paris 7.

Robert A., Robinet J. (1996). Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 16/2, 145-175.

Robert A., Rogalski J. (2004). Problèmes d'introduction et autres problèmes de recherche au lycée, *Repère IREM,* 54, 77-103.

Vandebrouck F. (dir.) (2008). La classe de mathématiques, activités des élèves et pratiques des enseignants, Toulouse : Octarès.

Weierstrass K. (1894). *Mathematische Werke,* Band I.Berlin : Layer une Müller.