CLAIRE VAUGELADE BERG

Le développement de la pensée algébrique au sein d'une communauté d'inquiry: Etude de la collaboration entre trois enseignants et un chercheur

Claire.V.Berg@uia.no

Résumé

Cette présentation offre les aspects principaux de mon travail de thèse portant sur l'étude de la collaboration entre trois enseignants de niveau collège et un chercheur (moi-même). Cette collaboration a été organisée autour d'ateliers de travail durant lesquels plusieurs tâches mathématiques ont été discutées dans le but d'utiliser l'outil algébrique comme outil de preuve. Les résultats montrent l'émergence de différents modes de participation et il semblerait qu'il existe une relation entre la nature de la tâche proposée et les modes de participation observés. L'articulation de la pensée algébrique permet de mettre en valeur une recherche structurée de régularités (patterns) ou/et de structure(s) numériques ou geometriques.

Mots clés : Communauté d'inquiry, pensée algébrique, médiation du sens, négociation du sens, modes de participation, cycle d'inquiry

Je voudrais tout d'abord remercier vivement Mariam Haspekian et Sylvie Coppé pour cette invitation à présenter les résultats de mon travail de thèse au cours de ce séminaire. Je suis très heureuse et très honorée d'avoir eu cette opportunité qui m'a donné l'occasion de reprendre contact avec la communauté française de recherche en didactique des mathématiques.

Introduction

A l'origine ce travail de thèse (Berg, 2009) a été nourri par mon expérience à la fois en tant qu'enseignante au collège et responsable d'un projet de développement de l'enseignement des mathématiques au niveau école primaire et collège, le projet MATHIAS (Mathematics in Arendal in St. Franciskus school). C'est cette étroite collaboration avec les enseignants de cette école pendant deux ans, de 2002 à 2004, qui a éveillé ma curiosité et m'a conduite à m'engager dans un travail de recherche. De plus j'ai toujours eu un intérêt particulier pour l'algèbre et son enseignement, aussi il ne m'a pas été très difficile de choisir le thème de ma thèse. Ainsi ma démarche et mon entrée dans « le monde de la recherche » est de nature pragmatique, basée sur mon expérience précédente et guidée par mes réflexions issues de cette collaboration. Entrer progressivement dans le rôle de doctorant nécessite une démarche particulière, démarche qui consiste à sélectionner un sujet précis, articuler des questions de recherche, élaborer ou choisir un cadre théorétique et une approche méthodologique qui soient cohérents et qui permettent d'apporter des réponses pertinentes aux questions de recherche. Ce parcours s'est effectué sous la direction de Barbara Jaworski et Hans Erik Borgersen, et ma soutenance de thèse a eu lieu en Juin 2009 avec Paul Cobb et Julian Williams parmi les membres du jury.

Élaboration du cadre théorique

Le but de ce travail de recherche est d'étudier le développement de la pensée algébrique au sein d'une communauté d'inquiry, communauté étant composée de trois enseignants au niveau collège et d'un chercheur (moi-même). Le cadre théorique choisi devra donc permettre l'articulation des composantes sociales (communauté d'inquiry) et des composantes plus spécifiques concernant le développement de la pensée algébrique.

Théorie sociale de l'apprentissage

L'élaboration du cadre théorique adopté dans ce travail est basé sur une théorie social de l'apprentissage (Lave, 1988 ; Lave & Wenger, 1991 ; Wenger, 1998) qui permet d'articuler et de mettre en valeur le processus de participation sociale au sein de communauté de pratique. Ainsi la pratique comprend l'apprentissage et le but de celui-ci est la recherche de sens et l'adaptation dans la réalisation de projets au sein de la communauté en question. Suivant Lave et Wenger (1991), l'idée de « situated learning » est articulée de la façon suivante:

> In our view, learning is not merely situated in practice – as if it were some independently reifiable process that just happened to be located somewhere: learning is an integral part of generative social practice in the lived-in-world. (p.35)

Wenger (1998) propose une théorie sociale de l'apprentissage suivant quatre composantes : le sens, la pratique, la communauté, et l'identité. La première, le sens, est définie comme faisant référence à notre capacité, individuelle ou collective, à être en contact avec la vie et le monde de façon significative. La seconde, la pratique, concerne nos ressources communes, aussi bien historiques que sociales, ainsi que les contextes de travail et les perspectives qui soutiennent notre engagement mutuel dans l'action. La troisième composante, la communauté, fait référence à des configurations sociales au sein desquelles nos engagements sont définis comme valables (worth pursuing) et notre participation est reconnue en termes de compétence. Finalement, la dernière composant, l'identité, se réfère au processus de construction d'identité consistant en une série de négociations de sens au sujet de notre propre expérience comme membre de communautés sociales. L'articulation entre l'individu et le social est ainsi définie de façon à éviter une dichotomie trop simpliste. Suivant la théorie sociale de l'apprentissage, la connaissance est une question de compétence en rapport avec des projets de développant au sein de communautés de pratique. De fait l'apprentissage a pour but la recherche de sens, notre habilité à découvrir et à connaitre le monde et à s'y engager de façon significative. Rogoff, Matusov et White (1996) soulignent le fait que la notion d'apprentissage implique la transformation de notre participation au sein de projets collectifs. Cette approche théorique est utile pour ma recherche puisqu'elle me permet de conceptualiser notre engagement (les trois enseignants et moi-même) au sein de notre communauté dont le but est de développer notre compréhension de la notion d'algèbre et de pensée algébrique. Une des caractéristiques principales de notre engagement est la volonté de s'engager, de questionner et d'explorer différentes taches mathématiques. Cette démarche a été par la suite conceptualisée comme démarche d'inquiry.

Articulation de la notion d'inquiry

La dimension d'inquiry (Jaworski, 2005, 2006 ; Wells, 1999) n'était pas présente lors de la planification de ma collaboration avec les trois enseignants. Celle-ci est apparue graduellement au cours du processus d'analyse des données lorsque j'ai cherché à caractériser la nature de notre collaboration et de notre communauté de pratique. C'est la raison pour laquelle il m'a semblée pertinent de parler de « communauté d'inquiry ». Cette idée fait référence à une démarche de recherche, d'enquête, ou d'investigation, ou les étapes successives peuvent être définies de la façon suivante: (1) se poser des questions, (2) reconnaitre les différents problèmes et chercher à les résoudre, (3) discuter, confronter et réfléchir à ses idées et ses résultats entre pairs, (4), proposer des conjectures, les tester et les transformer, (5) questionner son approche, en proposer d'autres et les explorer, (6) considérer son travail de façon critique. Ces différentes étapes constituent un cycle d'inquiry qui s'établie au sein d'un processus de développement de sens. Une des caractéristiques de la démarche d'inquiry est qu'il n'est pas nécessaire de passer par tous les différents stades mentionnés ci-dessus au cours de chaque cycle d'inquiry, ni de suivre l'ordre dans lequel ceux-ci sont présentés.

Importance des critères de pertinence et de cohérence

Le cadre théorique proposé ci-dessus permet l'articulation d'une théorie sociale de l'apprentissage basée sur les notions de sens, pratique, communauté, et identité. Cependant ce cadre théorique est très vaste et permet d'étudier la notion d'apprentissage dans de nombreuses communautés, toutes de nature différentes. Afin d'adresser la spécificité de ce travail de recherche et d'élaborer un cadre pertinent, je considère qu'il est nécessaire d'ajouter un autre perspective à celle de Wenger (1998), perspective qui va permettre d'articuler la spécificité de l'apprentissage en mathématiques et de conceptualiser la pensée algébrique. L'élaboration d'un cadre théorique au sein duquel plusieurs perspectives se côtoient nécessite de prendre en considération le citerion de cohérence, au sens épistémologique. Cela implique une base épistémologique commune aux différentes perspectives théoriques prises en considération. (Radford, 2008). Dans ce travail de thèse, je propose d'élaborer un cadre théorique pertinent (théorie sociale de l'apprentissage en tenant compte de la spécificité de l'apprentissage en mathématiques) et cohérent (élaboration du cadre employé dans cette recherche en tenant compte des bases épistémologiques des différentes perspectives). C'est pourquoi je propose d'élaborer mon cadre théorique à partir de la théorie de communauté de pratique (Wenger, 1998) et de l'idée de médiation du sens des concepts scientifiques (Vygoytky, 1986 ; Kozulin, 2003). Ainsi en associant Wenger, Vygotsky, Kozulin, et Jaworski, la notion de médiation par la négociation de sens à l'aide d'actes d'inquiry devient la base de mon cadre théorique. Je suis maintenant en mesure d'étudier la transformation de notre participation au sein de notre communauté d'inquiry en analysant l'évolution de la médiation de la pensée algébrique par la négociation de sens des différentes tâches proposées à l'aide d'actes d'inquiry. Ces idées sont développées dans les exemples présentés ci-dessous.

Articulation de la pensée algébrique dans une théorie sociale de l'apprentissage

Kozulin (2003) introduit l'idee de mediation de sens en ces termes :

> Mediation of meaning is an essential moment in the acquisition of psychological tools, because symbolic tools derive their meaning only from the cultural conventions that engendered them. (p.26)

Suivant Kozulin (2003) la façon dont le sens des artefacts psychologiques est mediated durant le processus d'acquisition ou appropriation joue un rôle central. En ce qui concerne les symboles algébriques, l'idée de « conventions culturelles» fait référence au développement historique de ces symboles et à la façon dont la communauté des mathématiciens utilise ces symboles. Suite à mon travail de recherche j'ai pu observer l'importance du contexte social au sein duquel la médiation de sens prend place, ainsi je propose de prendre en considération aussi bien l'importance des conventions culturelles qui ont permis l'émergence de sens des artefacts psychologiques que le contexte social au sein duquel les artefacts psychologiques sont utilisés.

De nombreux chercheurs ont étudiés l'articulation de la pensée algébrique et de l'algèbre (Booth, 1984 ; Kieran, 1992 ; Küchemann, 1981 ; Sfard, 1991 ; Gray & Tall, 2001).

Différentes approches sont proposées, par exemple Sierpinska (1993) considère l'algèbre comme une arithmétique généralisée, Mason and Pimm (1984) proposent d'étudier les régularités numériques nécessitant une généralisation, Mason, Burton et Stacey (1982) ainsi que Mason et Davis (1991) prennent des situations de modélisations comme point de départ vers une introduction de l'algèbre. Dans ce travail de recherche je propose de séparer « pensée algébrique » et « algèbre » et je propose les définitions suivantes:

Je considère la notion de « pensée algébrique » comme étant une démarche caractérisée par une recherche structurée de régularités (patterns) ou/et de structure(s), par exemple l'étude de régularités numériques, régularités de figures géométriques, recherche de structure d'une situation de modélisation. Suivant cette perspective, l'algèbre sera donc considéré comme un langage symbolique permettant la communication des régularités ou/et des structures observées à l'aide de symboles algébriques aux autres participants de la communauté. Ici il est important d'insister sur les aspects suivants: en tant que langage symbolique il est fondamental d'aborder à la fois l'aspect syntaxique (règles de manipulations des expressions) ainsi que l'aspect sémantique (le sens donnés à ces expressions) de l'algèbre (Drouhard & Teppo, 2004). Cette séparation entre pensée algébrique et algèbre est illustrée au cours des exemples proposes ci-dessous.

Approche méthodologique

L'approche méthodologique suivie dans ce travail de recherche est la « recherche développement » (developmental research) élaborée à partir des travaux de Gravemeijer (1994), van den Akker (1999), et Goodchild (2008). Une des caractéristiques fondamentales de la recherche développement est l'existence d'un processus cyclique entre développement et recherche. Goodchild (2008) décrit le cycle de la recherche développement en ces termes :

> Theory and evidence from prior research leads to an envisaging of development, this leads to actions which are evaluated and fed back into a new cycle of envisaging and action. (p.208)

Il est possible de distinguer deux cycles, le cycle développement et le cycle recherche (Figure 1). Le premier cycle, cycle développement, consiste en un processus cyclique entre expérience pensée (thought experiment) et expérience pratique (practical experiment). Dans le cadre de ma recherche le terme « expérience pensée » renvoie à une séance d'atelier de travail envisagée à l'avance, alors que « expérience pratique » fait référence à l'actuelle réalisation de l'expérience pensée au sein de notre groupe. Tout au long de mon travail de recherche, je me suis engagée dans un processus d'analyse a priori avant chaque atelier de travail, ceci faisant partie de l'expérience pensée, et d'analyse a posteriori après chaque atelier. Ainsi, les réflexions émergeant de l'analyse a posteriori du précédent atelier de travail étaient incorporées dans l'analyse a priori du prochain atelier de travail. Ce processus souligne le caractère cyclique du cycle de développement.

Le second cycle, *cycle de recherche,* consiste en un processus cyclique entre théories globales et théories locales. Dans le cadre de ma recherche la notion de « théories globales » renvoie aux cadres théoriques présentés précédemment (Lave, Lave & Wenger, Wenger, Vygotsky, Kozulin, Jaworski), ceux-ci constituant la base de la théorie locale utilisée dans ce travail de recherche et élaborée suivant les critères cohérence et pertinence. Ces éléments sont représentés dans la Figure 1.

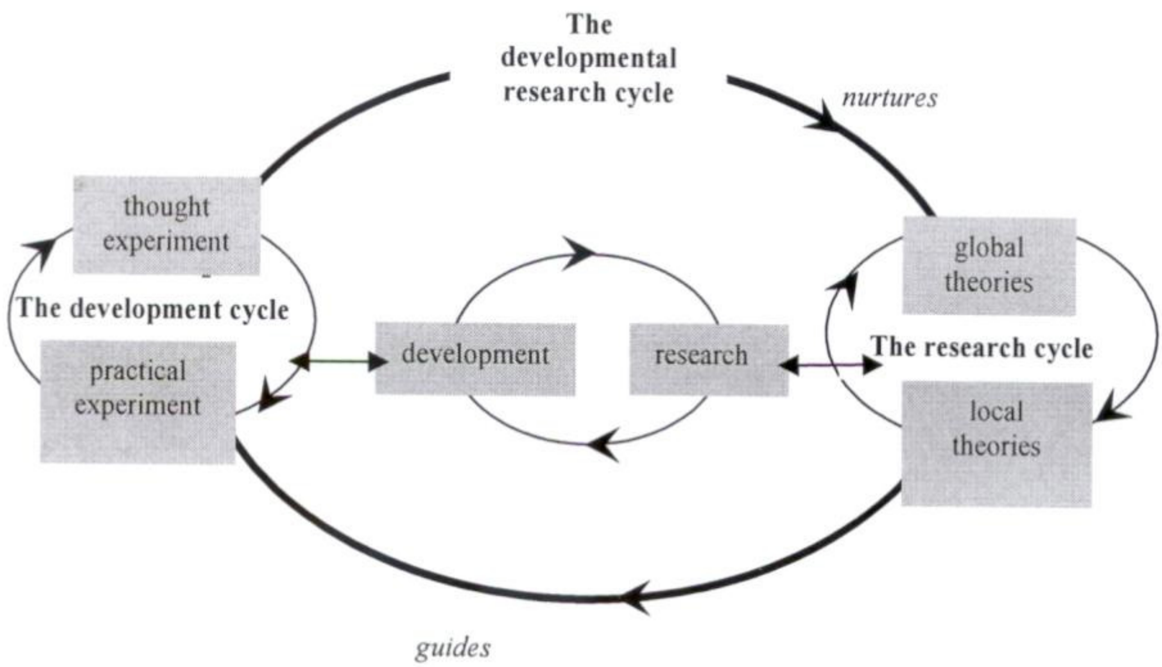

Figure 1 : le cycle de la recherche de développement (Goodchild, 2008)

Une des caractéristiques de la recherche développement est le fait que le type de recherche, de par sa nature, à la fois trace et favorise le développement.

Après l'exposition de mes cadres théorique et méthodologique, je propose maintenant deux exemples tirés des ateliers de travail organisés durant l'automne 2004. Un aperçu complet des différents ateliers de travail organises pendant l'année scolaire 2003-2004 est proposé en appendice 1.

Deux exemples de tâches

a. Le théorème de Viviani

Le premier exemple concerne la tâche appelée le théorème de Viviani. Cette tâche a été présentée lors de l'atelier de travail du 10 novembre 2004 et son but était d'explorer la relation entre algèbre et géométrie et de développer une preuve de ce théorème. Le théorème de Viviani énonce le résultat suivant : Soit un triangle équilatéral ABC et un point P situe à l'intérieur du triangle. La somme des distances du point aux sommets du triangle (d1 + d2 + d3) est égale à la hauteur du triangle (d4). Une représentation du théorème de Viviani est proposée en Figure 2.

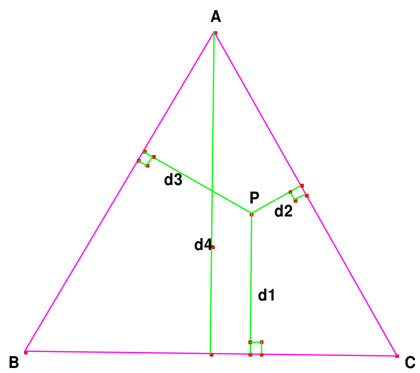

Figure 2 : Le théorème de Viviani

Le déroulement de l'atelier de travail peut se résumé de la façon suivante : Les enseignants ont rapidement démontré le théorème en considérant la somme des surfaces les trois triangles suivants : APB, BPC, CPA (Figure 3) comme étant égale à la surface du triangle ABC.

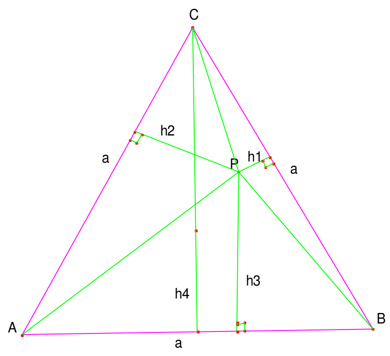

Figure 3 : Elaboration de la preuve du théorème de Viviani

Cette relation permet de déduire facilement le résultat énoncé par le théorème de Viviani. Les résultats de l'analyse du déroulement de cet atelier montrent la façon dont les enseignants ont ensuite pris l'initiative de modifier la tâche proposée et d'explorer d'autres tâches. Par exemple, l'un des enseignants proposa de considérer un point P dans le plan et sachant que celui-ci est distant de 3, 5, et 7 cm des 3 sommets d'un triangle équilatéral, d'explorer les différentes façons de construire le triangle. Cette nouvelle tâche provoqua beaucoup d'activités et les enseignants prirent progressivement le contrôle de l'organisation de l'atelier de travail et décidèrent de l'évolution de celui-ci. C'est en analysant les différents modes de participation au cours de cet atelier de travail que les notions de « taking-over » et de « silent-participation » sont apparues. Le premier mode de participation fait référence à l'engagement des 3 enseignants, prenant progressivement la responsabilité du déroulement de l'atelier de travail. Le second mode de participation fait référence à mon propre rôle, d'organisateur et responsable au début de l'atelier á observateur vers la fin de celui-ci.

b. Les nombres palindromes

Le thème de l'atelier du 30. novembre était d'aborder l'idée de preuve dans un cadre différent de celui de l'atelier consacre au théorème de Viviani. Ici mon but était d'élaborer une preuve dans un cadre numérique. L'atelier de travail commença par l'énoncé de la tâche suivante :

> Un de mes amis affirme que tous les nombres palindromes à 4 chiffres sont divisibles par 11. Est-ce vrai?

Apres une clarification de la notion de « palindrome », les enseignants ont commencé par choisir des exemples concrets de palindromes à 4 chiffres et de vérifier si l'affirmation était correcte. Ils ont ainsi progressivement découvert plusieurs régularités numériques et ont été de plus en plus fasciné par ces régularités (patterns). Ainsi l'un des enseignants, John, a étudié les palindromes de la forme 2332, 5665, 8998, et a été surpris de trouver les résultats suivants après division par 11 : 212, 515, 818. Il est donc parvenu au résultat suivant : si l'on choisit un palindrome de la forme n(n+1)(n+1)n, le résultat de la division par 11 donne le quotient suivant : n1n.

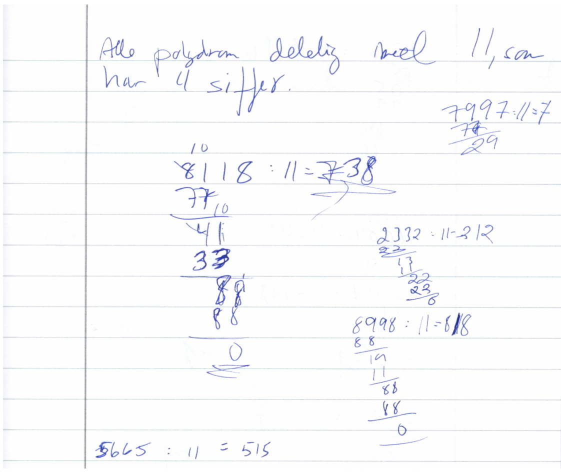

Figure 4 : Recherche de régularités numériques (John)

Un autre enseignant, Paul, a étudié les palindromes suivants : 1001, 2002, 3003, 4004 et a découvert que la différence entre les différents quotients, c'est-à-dire entre 91 et 182, 182 et 273, 273 et 364 était constante et égale à 91.

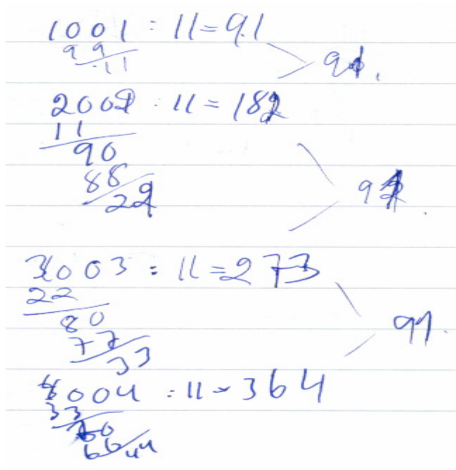

Figure 5 : Recherche de régularités numériques (Paul)

Ces différentes découvertes de régularités numériques ont complètement capturé l'attention des enseignants et il m'a été difficile de revenir au but initial de l'atelier de travail qui consistait à explorer utilisation de l'outil algébrique comme outil de preuve, c'est à dire à écrire tout palindrome à 4 chiffres de la façon suivante:
$a.10^3 + b.\ 10^2 + b.\ 10^1 + a.\ 10^0$
pour pouvoir ensuite en déduire $a.\ (10^3 + 10^0) + b.\ (10^2 + 10^1)$ et donc $11\ (91.\ a + 10.\ b)$, ce qui implique que tout palindrome à 4 chiffres est divisible par 11.

Au cours de cet atelier, les résultats de l'analyse des données m'ont permis de mettre en évidence le mode « didactique » de participation, en référence à mon propre mode participation, puisque malgré de nombreux essais de réorienter l'atelier vers l'exploration de l'utilisation de l'outil algébrique comme outil de preuve, ce n'est que vers la fin de cet atelier que les enseignants se sont dirigés vers une écriture symbolique et se sont intéressés a l'élaboration d'une preuve.

Ce mode « didactique » de participation a été aussi observé au cours d'un autre atelier de travail, l'atelier du 11 janvier 2005, au cours duquel la tâche appelée « student – professor problem » (Herscovics, 89) était proposée. Ici, c'est John qui a pris le mode « didactique » de participation, aidant ainsi ses collègues a réaliser la conversion correct entre l'énoncée de la tâche « six times as many students as professors » et l'écriture algébrique « 6P = S », ce qui nous a permis de différentier entre une traduction (conversion) purement de type syntactique sans préserver l'aspect sémantique (le sens de cette affirmation) et une traduction prenant en compte aussi bien l'aspect syntactique que l'aspect sémantique. John, ayant adopté le mode « didactique » de participation a utilisé un exemple numérique de façon à illustrer la signification de l'expression « 6S = P », expression choisie en premier lieu par Mary.

Résultats et pistes de recherche

Au cours de l'année scolaire 2004-2005, neuf ateliers de travail (voir appendice 1) ont été organisés dans le but d'explorer l'utilisation de l'outil algébrique comme outil de preuve dans différents contextes, par exemple contexte géométrique ou de régularités numériques. L'analyse des données rassemblées au cours de ces ateliers de travail a mis en évidence six modes différents de participation. Je donne ici un résumé de ceux-ci :

Différents modes de participation identifiés:

mode "novice – expert"
mode "questionnement"
mode "réflexion"
mode "taking – over"
mode "didactique"
mode "participation silencieuse"

Différentes hypothèses de travail et pistes de recherche ressortent de ces résultats: la première concerne l'importance du mode « questionnement » de participation. Il semblerait qu'il soit nécessaire pour les enseignants de questionner le choix des tâches et les raisons pour lesquelles celles-ci pourraient être utilisées en classe. C'est à la suite de cette étape que les enseignants ont commencé à être plus actifs et prendre plus d'initiative, au lieu de rester dans le mode « novice-expert » de participation. Je considère ce mode de participation comme un premier pas vers une démarche d' «empowerment», c'est-à-dire l'acquisition d'une certaine autonomie et ce processus illustre la thèse de Rogoff, Matusov et White (1996) soulignant le fait que la notion d'apprentissage implique la transformation de notre participation au sein de projets collectifs.

Une seconde piste de recherche indique une possible influence de la nature de la tâche sur le mode de participation: en effet il semblerait qu'un contexte géométrique facilite le passage en mode de participation « taking-over » comme observé lors de l'atelier de travail consacre au théorème de Viviani. Cette tâche a en effet permis aux enseignants d'explorer le théorème de Viviani de différentes façons et d'énoncer de nouvelles approches pour la construction d'un triangle équilatéral.

Une autre piste de recherche importante concerne l'articulation de la pensée algébrique et de l'algèbre : les résultats de l'analyse des données permettent de mettre en évidence l'articulation de la pensée algébrique comme étant une démarche caractérisée par une recherche structurée de régularités (patterns) ou/et de structure(s), par exemple l'étude de régularités numériques, régularités de figures géométriques, recherche de structure d'une situation de modélisation. Suivant cette perspective, l'algèbre sera donc considéré comme un langage symbolique permettant la communication des régularités ou/et des structures observées à l'aide de symboles algébriques aux autres participants de la communauté.

Ces résultats sont en accord avec les perspectives offertes par Mason and Pimm (1984), Mason, Burton et Stacey (1982) ainsi que Mason et Davis (1991).

Ces hypothèses et pistes de recherche sont une source d'inspiration pour mes travaux de recherche actuels.

Références

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor, UK: NFER-Nelson.

Drouhard, J. P., & Teppo, A. (2004). Symbols and language. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), The future of the teaching and learning of algebra, The 12th ICMI Study (pp. 227-264). Boston, MA: Kluwer Academic Publishers.

Goodchild, S. (2008). A quest for 'good' research. In B. Jaworski & T. Wood (Eds.), *International handbook on mathematics teacher education: Vol. 4. The mathematics teacher educator as a developing professional: Individuals, teams, communities and networks* (pp. 201-220). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(5), 443-471.

Jaworski, B. (2005). Learning communities in mathematics: Creating an inquiry community between teachers and didacticians. In R. Barwell & A. Noyes (Eds.), *Research in Mathematics Education: Papers of the British Society for Research into Learning Mathematics, Vol. 7* (pp 101-119). London: BSRLM

Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*, 187-211.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Kozulin, A. (2003). Psychological tools and mediated learning. In A. Kozulin, B. Gindis, V. S. Ageyev, & S. M. Miller (Eds.), *Vygotsky's educational theory in cultural context* (pp. 15-38). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. Hart, M. Brown, D. Küchemann, D. Kerslake, G. Ruddock, & M. McCartney (Eds.), *Children's understanding of mathematics* (pp. 102-119). London: John Murray.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Mason, J., & Davis, J. (1991). *Fostering and sustaining mathematics thinking through problem solving*. Victoria, Australia: Deakin University Press.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. London: Addison-Wesley Publishers.

Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, *15*, 277-289.

Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. *ZDM, 40*(2), 317-327.

Rogoff, B., Matusov, E., & White, C. (1996). Models of teaching and learning: Participation in a community of learners. In D. R. Olson & N. Torrance (Eds.), *The handbook of education and human development. New models of learning, teaching and schooling* (pp. 388-414). Oxford, UK: Blackwell.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

Sierpinska, A. (1993). The development of concepts according to Vygotski. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *15*(2&3), 87-107.

Tall, D. & Gray, E. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 1*(1), 81-104.

Van den Akker, J. (1999). Principles and methods of development research. In J. v. d. Akker, R. M. Branch, K. Gustafson, N. Nieveen, & T. Plomp (Eds.), *Design approaches and tools in education and training* (pp. 1-14). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Vygotsky, L. (1986). *Thought and language* (A. Kozulin, Trans. and Ed.). Cambridge, MA: MIT Press.

Wells, G. (1999). *Dialogic inquiry: Towards a sociocultural practice and theory of education*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning and identity*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Appendice 1 : Ateliers de travail de juin 2004 à juin 2005

Atelier de travail 30-11-04	Choix et utilisation des symboles algébriques - Preuve	Nombres palindromes Régularités numériques
Atelier de travail 11-01-05	Choix et utilisation des symboles algébriques	Tâche: traduire et traiter une situation (Student – Professor)
Atelier de travail 09-03-05	Choix et utilisation des symboles algébriques	Tâche: traduire et traiter une situation
Ateliers de travail 10-05-05 14-06-06	Claire Vaugelade Berg - University of Agder, Norway Seminaire national, Paris, Mars 2012	Organisation par Mary, Paul, et John Résumé 9