TRAN KIEM MINH

L'APPRENTISSAGE DES FONCTIONS AU LYCEE AVEC UN ENVIRONNEMENT LOGICIEL : QUELLES SITUATIONS D'APPRENTISSAGE, QUELLES GENESES INSTRUMENTALES ?

kiemminh@gmail.com

LDAR, Université Paris Diderot

Résumé.

Cette recherche se situe dans le cadre de l'étude des usages d'un environnement logiciel géométrique et algébrique dédié aux fonctions au lycée. Nous nous intéressons plus particulièrement au travail des élèves, avec une étude de situations utilisant le logiciel Casyopée et des effets de ces situations sur l'apprentissage des fonctions. Nous proposons une approche qui considère les fonctions comme *modèles de dépendances* dans un domaine d'application. L'étude indique que les activités variées sur les fonctions ont facilité chez les élèves observés une aisance à travailler sur les différents aspects du concept de fonction et à explorer la dynamique de l'approche proposée. Notre recherche montre également chez les élèves un développement conjoint de connaissances mathématiques sur les fonctions et de connaissances sur Casyopée pendant la genèse instrumentale et comment l'utilisation régulière de l'artefact permet aux élèves d'articuler ces deux types de connaissances.

Introduction

Les fonctions jouent un rôle majeur dans les mathématiques et essentiel dans les sciences expérimentales pour la modélisation mathématique des phénomènes dynamiques. Le concept de fonction est un sujet important mais difficile dans les programmes du collège et du lycée. Il s'agit au début du lycée de rompre avec une conception « correspondance » qui a dominé au collège pour accéder à une conception des fonctions comme « modèles de dépendance ». Par conséquent, les tâches de modélisation fonctionnelle et les représentations dynamiques occupent une place particulière. Comment les potentialités des outils technologiques peuvent-elles favoriser une telle conception des fonctions ? Rendre compte des potentialités des environnements numériques pour l'apprentissage suppose également de disposer d'un cadre épistémologique et didactique organisant la diversité des activités sur les fonctions.

L'objet de ce texte est donc d'analyser un apprentissage des fonctions sur un temps long pendant lequel les élèves utilisent le logiciel géométrique et algébrique Casyopée[62]. Nous proposons une approche qui considère les fonctions comme *modèles de dépendances* dans un domaine d'application. Nous visons en particulier à analyser le développement conjoint de connaissances sur les fonctionnalités de Casyopée et de connaissances mathématiques sur les fonctions sur un temps long d'apprentissage. Nous nous intéressons également aux activités sur les fonctions avec Casyopée qui aident des élèves à construire les différentes représentations des dépendances et à atteindre une compréhension profonde des fonctions.

62 Une page pour télécharger Casyopée est disponible à http://www.casyopee.eu/

Approches didactiques des fonctions

Récemment, plusieurs recherches mettent l'accent sur l'expérience du changement et du mouvement et sur la compréhension de cette expérience comme covariation ou relation de dépendance entre grandeurs, comme éléments fondamentaux amenant à la notion de fonction. Par exemple, Comin (2005) a noté que la notion de fonction est fondée sur l'idée de relation de dépendance et ne peut prendre du sens que par l'étude des relations fonctionnelles entre grandeurs. Dans cette perspective, des recherches portent une attention spéciale aux potentialités de représentation des TICE pour la compréhension des dépendances fonctionnelles. En ayant utilisé un dispositif de capture de mouvements et une calculatrice graphique, Arzarello & Robutti (2004) ont demandé aux élèves de décrire les différents types de mouvement comme ainsi été fonctions mathématiques à l'aide de graphes et de tableaux de valeurs. Les covariations et les dépendances entre temps et distance dans le système physique ont été ensuite modélisées en fonctions mathématiques. Dans la perspective Vygotskienne de médiation sémiotique, Falcade, Laborde & Mariotti (2007) ont choisi la Géométrie dynamique comme domaine d'application afin de fournir aux élèves une expérience qualitative de covariations et de dépendances fonctionnelles. Leur étude a montré que les outils de la géométrie dynamique (Déplacement, Trace, Macro…) peuvent être utilisés pour amener les élèves à comprendre la notion de fonction.

Bloch (2003) distingue différents cadres pour la notion de fonction : numérique, algébrique, géométrique, graphique, formel et analytique. S'intéressant aux débuts de l'analyse, elle insiste particulièrement sur l'interaction des cadres graphique et formel. Elle souligne qu'au moment de son étude, le cadre géométrique était peu utilisé dans l'enseignement et elle estimait sa réintroduction potentielle coûteuse en termes de stratégie d'enseignement.

Le curriculum actuel du lycée postule que des environnements logiciels peuvent contribuer à cette réintroduction d'un cadre géométrique. C'est aussi une hypothèse que font des recherches récentes qui s'appuient sur les nouvelles potentialités de calculatrices et logiciels intégrant des représentations multiples et du calcul formel, rejoignant aussi une idée ancienne selon laquelle les environnements de calcul formel peuvent soutenir et changer l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (Hodgson & Muller, 1992).

Notre approche considère les fonctions comme *modèles de dépendances* dans un domaine d'application, et plus précisément dans un cadre géométrique tel que défini par Bloch (2003) et utilisé par Falcade, Laborde & Mariotti (2007). La modélisation fonctionnelle permet de relier ce cadre aux autres cadres et représentations des fonctions. Notre hypothèse est que les activités fondées sur l'étude des dépendances entre grandeurs ou mesures permettent aux élèves de comprendre les fonctions comme modèles de ces dépendances. Nous situons par ailleurs ces activités dans le cadre d'usages d'un environnement numérique intégrant des représentations multiples, géométriques et algébriques, et le calcul formel. Les représentations géométriques constituent le domaine d'application rendant possible une exploration des relations entre objets et entre grandeurs, et l'environnement offre des possibilités d'accéder aux autres représentations. Nous considérons également le développement conjoint d'usages et de connaissances sur l'environnement Casyopée et de connaissances mathématiques sur les fonctions sur un long processus d'apprentissage.

Cadres théoriques

Processus-objet et la conceptualisation des fonctions

Les recherches sur la compréhension des fonctions se sont intéressées à la dualité entre *processus* et *objet*. Sfard (1991) distingue la nature *opérationnelle* des fonctions en mettant l'accent sur les processus du calcul de la valeur de sortie pour une valeur d'entrée donnée, et leur nature *structurelle* comme objets constitués d'ensembles de couples. En s'appuyant sur des analyses historiques, épistémologiques et cognitives, Sfard (1992) a conclu que la fonction est un concept que les élèves acquièrent d'abord opérationnellement puis structurellement. Elle nomme « *réification des processus* » la transition de la conception processus à la conception objet. L'auteur a également souligné que les termes *processus* et *objet* devraient être compris comme différentes facettes de la même notion plutôt que comme composants séparés. Autrement dit, les deux aspects opérationnel et structurel sont complémentaires.

Dubinsky et ses collègues (Dubinsky & Harel, 1992 ; Breidenbach et al. 1992) s'intéressent aux transitions entre trois niveaux : actions – processus – objets. Leur idée principale dans ces travaux est que le processus d'apprentissage commence d'abord par des *actions* sur des objets. Lorsque l'action totale peut avoir lieu dans l'esprit du sujet sans courir à travers toutes les étapes spécifiques, nous disons que l'action a été intériorisée en *processus*. Ensuite, le sujet peut utiliser ce processus pour obtenir un nouveau processus, par exemple, en l'inversant, le transformant ou le combinant avec d'autres processus. Lorsqu'il est possible d'opérer de cette façon sur un processus, nous disons que le processus a été encapsulé en un *objet*. Finalement, cet objet peut être investi dans de nouvelles actions. Une des conclusions de ces travaux est l'affirmation que les TICE pouvaient soutenir les transitions « actions – processus – objets ».

Les chercheurs ont trouvé que l'acquisition d'une conception « processus » des fonctions n'est pas triviale pour les élèves. Une question, en particulier soulevée dans le contexte d'usages des environnements logiciels, est de savoir si les élèves devraient d'abord développer une conception « processus » avant de développer une conception « objet » des fonctions. Selon Thompson (1994), dans l'approche des fonctions par un élève, la conception « processus » de fonctions précède la conception « objet », et avec l'aide de nouveaux environnements logiciels, nous pouvons élaborer de nouveaux types d'expériences de façon à permettre aux élèves d'atteindre une conception « objet ».

White (2009) a conçu un environnement logiciel dédié à l'introduction des fonctions dans le contexte de la cryptographie. En portant l'attention sur la distinction entre deux points de vue « processus » et « objet », l'auteur montre comment les tâches données aux élèves dans cet environnement mettent en jeu différents aspects de la notion de fonction. De plus, il indique que la résolution des problèmes donnés dans cet environnement peut aider les élèves à atteindre un « increasing fluency in interpreting, selecting among and applying procedural and structural features of function toward a task objective », ce que nous appellerons dans notre travail une *compréhension flexible* des fonctions. Ainsi, l'approche des fonctions n'est plus vue comme une transition linéaire des actions aux processus puis aux objets, mais comme une progression vers un usage flexible des ces fonctions sous ces trois aspects.

De la conception « processus - objet » à la conception « covariation » : vers un cadre conceptuel de l'enseignement des fonctions

Lagrange & Artigue (2009) ont proposé une typologie ayant pour but de classifier et de relier les activités aux quelles ces tâches donnent lieu. Cette typologie croise deux dimensions : les domaines de représentation des dépendances et les types d'activités sur ces dépendances. La prise en compte de trois domaines distincts (Système physique, Grandeurs, Fonctions mathématiques) où s'exercent les activités sur les fonctions est basée sur l'idée que le concept de fonction est lié à l'expérience sensible des dépendances dans un système physique où s'observent des variations mutuelles d'objets. Les types d'activités (enactives-iconques, génératives, transformationnelles et global-méta) sont inspirés du travail sur différentes représentations de l'analyse de Tall (1996), complété par le modèle des activités algébriques de Kieran (2007).

En s'appuyant sur la typologie d'activités de Lagrange & Artigue (2009), nous proposons ci-dessous notre cycle de modélisation pour approcher les fonctions en environnements numériques d'apprentissage. Ce cycle de modélisation fonctionnelle se situe dans le cadre d'une résolution de problème via une modélisation algébrique. Cela n'implique pas que la résolution se fasse de manière standard, selon un schéma immuable. Dans ce schéma, nous mettons l'accent sur le domaine intermédiaire « Grandeurs » entre le « Système physique » et les « Fonctions mathématiques » (le monde mathématique). Le processus de mathématisation est divisé en deux étapes (étapes (1) et (2) dans la figure 1). Des situations ou problèmes sont données aux élèves dans le domaine « Système physique » (dans notre cas c'est la Géométrie dynamique) où ils peuvent observer, explorer et percevoir des relations de dépendances entre objets. Afin d'expliquer ces relations de dépendances, les élèves peuvent choisir une variable, puis créer une formule pré-algébrique exprimant la relation de dépendance (c'est l'étape (1)). Dans le domaine « Grandeurs », les élèves peuvent utiliser les potentialités des TICE pour quantifier des explorations et des observations et formuler des conjectures sur la solution du problème donné. La construction d'une formule pré-algébrique exprimant la relation de dépendance entre objets à ce niveau est utile pour soutenir ces explorations et observations. Ensuite, l'étape (2) permet de calculer et représenter algébriquement la formule pré-algébrique construite dans le domaine « Grandeurs ».

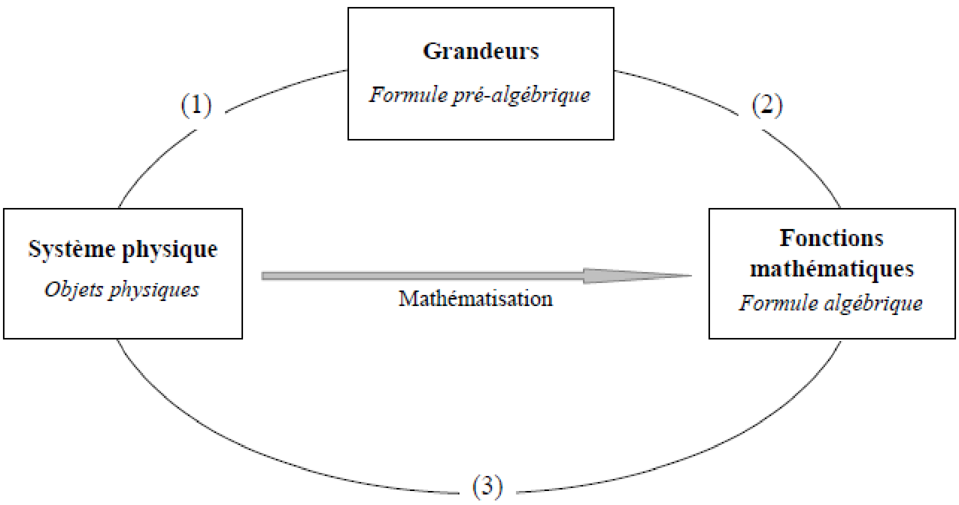


Figure 1. Cycle de modélisation fonctionnelle

Les élèves obtiennent ainsi dans le domaine « Fonctions mathématiques » une expression algébrique modélisant une dépendance fonctionnelle entre grandeurs dans la situation donnée dans le « Système physique ». Les élèves peuvent ensuite utiliser des potentialités des TICE pour faire des manipulations, des transformations algébriques ou une preuve algébrique afin de trouver la solution mathématique de la situation. L'étape (3) est un processus d'interprétation et de vérification du modèle mathématique obtenu. Il s'agit de revenir dans le « Système physique » pour interpréter les solutions mathématiques trouvées.

Nous considérons la typologie d'activités et le cycle de modélisation fonctionnelle présenté ci-dessus comme un cadre théorique local pour la construction et l'analyse de situations sur les fonctions en environnements numériques. Dans notre approche, les fonctions sont considérées comme *modèles de dépendance* dans un domaine d'application. En effet, proposer des activités s'amorçant dans le domaine intermédiaire « Grandeurs » permet de mettre l'accent sur la modélisation fonctionnelle qui relie les activités initiales et la formulation finale algébrique. Les activités dans ce domaine sont donc fructueuses pour la conceptualisation des fonctions : choisir une variable appropriée pour quantifier des observations, distinguer les dépendances fonctionnelles parmi des covariations, construire une formule pré-algébrique exprimant la dépendance fonctionnelle…

Genèse instrumentale

Drijvers, Kieran, & Mariotti (2010) s'intéressent aux cadres théoriques susceptibles d'éclairer les recherches récentes dans le domaine des TICE. Ils situent la théorie de l'instrumentation (Rabardel, 1995) comme un cadre important et fructueux. L'approche instrumentale, le corps de cette théorie, est particulièrement développée par des chercheurs français en relation avec une évolution des études en didactique des mathématiques sur les problèmes d'intégration des TICE (Guin, Ruthven, & Trouche, 2005 ; Haspekian, 2005 ; Bueno-Ravel & Gueudet, 2009). Nous rappelons brièvement ses principes.

L'approche instrumentale se situe dans la perspective socio-culturelle de Vygotsky (1978) sur les processus d'apprentissage. Le point de départ essentiel de cette approche est la distinction entre artefact et instrument (Rabardel, 1995). Un *artefact* est souvent, mais non nécessairement, un objet physique de l'activité humaine, conçu pour des activités spécifiques. Pour un individu donné, l'artefact n'a pas de valeur instrumentale en soi. Un *instrument* n'est pas spontanément disponible mais, à travers un processus appelé *genèse instrumentale*, le sujet se construit des schèmes d'utilisation de l'artefact pour réaliser un type de tâches. Un schème est considéré ici comme une organisation invariante de l'activité pour une classe de situations données (Vergnaud, 1990). Par conséquent, un instrument se compose d'une partie de l'artefact et de composantes psychologiques.

Au cours de la genèse instrumentale, une relation bilatérale entre artefact et sujet est établie : les connaissances du sujet le guident d'une part pour mettre l'artefact « à sa main » (ce processus est appelé instrumentalisation), et d'autre part, les potentialités et les contraintes de l'artefact influencent et conditionnent l'action et les stratégies de résolution de problèmes du sujet (ce processus est appelé instrumentation[63]). La recherche a montré que la genèse instrumentale est un processus complexe qui nécessite du temps et dépend des caractéristiques de l'artefact et de l'activité du sujet. Les genèses instrumentales sont d'abord des processus individuels. Cependant, ces genèses ont également une dimension sociale, car les élèves développent des schèmes mentaux dans le contexte de la communauté de classe.

Dans la perspective globale de l'approche instrumentale, nous nous intéressons dans cet article aux genèses instrumentales des élèves dans l'environnement Casyopée et à la manière dont ces genèses articulent l'appropriation de l'artefact et la construction de connaissances mathématiques. Notre accent est mis notamment sur les phénomènes relatifs au processus d'instrumentation en considérant l'interaction et l'imbrication entre le développement de connaissances mathématiques et de connaissances sur l'artefact chez des élèves pendant un temps long de la genèse. Dans le cas d'un artefact utilisé pour l'apprentissage des mathématiques comme Casyopée, la genèse instrumentale concerne à la fois les

63 Ici, il faudrait distinguer entre deux signification différentes du terme « instrumentation » dans deux contextes : la genèse instrumentale et la théorie de l'instrumentation.

connaissances mathématiques sur les fonctions et les connaissances sur les fonctionnalités de l'artefact. Les recherches en didactique des mathématiques ont montré qu'une telle genèse peut être complexe, même dans le cas des tâches simples comme le cadrage de la représentation graphique d'une fonction dans la fenêtre d'une calculatrice (Guin & Trouche, 1999, p. 217; Artigue, 2002, p. 250). Ainsi nous sommes conscients de la complexité des genèses chez les élèves lors de l'introduction de Casyopée en classe. De plus, la compréhension et la manipulation des différentes représentations offertes par Casyopée nécessitent également des connaissances mathématiques variées. Cette préoccupation d'une genèse instrumentale adéquate de Casyopée nous a conduits à concevoir une introduction progressive aux élèves en prenant en compte le développement de leurs connaissances mathématiques.

Méthodologie

Un artefact numérique

Casyopée est un logiciel dédié à l'enseignement et l'apprentissage des fonctions au lycée (Lagrange et al. 2011). Casyopée comprend deux modules principaux qui sont liés : le module symbolique et le module géométrique. Le module symbolique fournit aux élèves des outils de calculs symboliques, des capacités de représentation (représentation graphique, symbolique, numérique…) et ainsi que des aides pour la preuve algébrique (dérivée, étude de signes, variations…). Le module géométrique offre les caractéristiques principales d'un environnement de géométrie dynamique comme la création et l'animation des objets géométriques. Ce module facilite également la généralisation grâce à des paramètres qui peuvent être entrés dans la définition des objets géométriques.

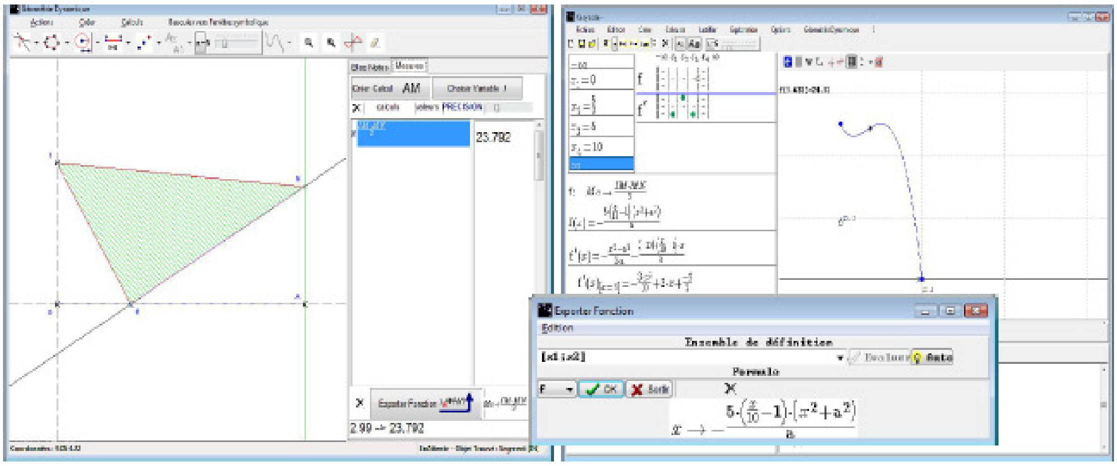


Figure 2. Module géométrique, module symbolique et la forme d'exportation de Casyopée

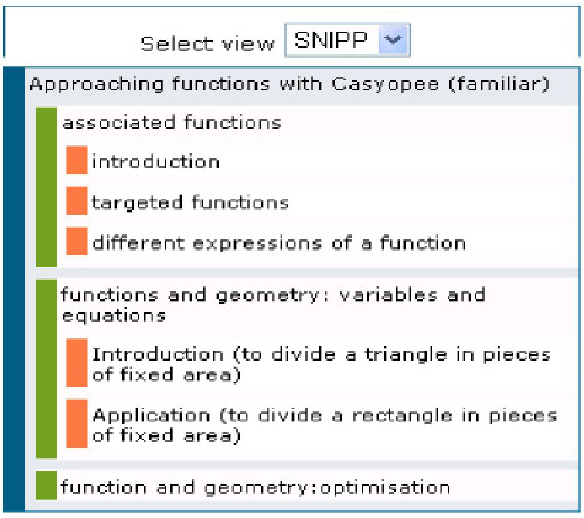
Pour le domaine « Grandeurs », la caractéristique spécifique de Casyopée est la capacité de relier les deux modules avec l'aide des « calculs géométriques » qui permettent de modéliser des dépendances entre grandeurs : dans Casyopée on peut créer un calcul géométrique exprimant la valeur d'une grandeur, en explorer les valeurs numériques, choisir une grandeur adéquate comme variable et finalement exporter, dans le module symbolique, une dépendance fonctionnelle, si elle existe, entre cette variable et le calcul géométrique, ceci pour obtenir une fonction mathématique exprimant cette dépendance. De plus Casyopée prend en charge l'expression de cette fonction mathématique, ce qui décharge les élèves de calculs sur lesquels ils butent souvent à ce niveau. Le but visé par le développement de Casyopée est donc d'aider les élèves à modéliser des relations de dépendance dans une situation géométrique donnée, de faciliter les activités sur les fonctions, et finalement de promouvoir une compréhension des fonctions.

Un dispositif d'expérimentation

a. Première expérimentation

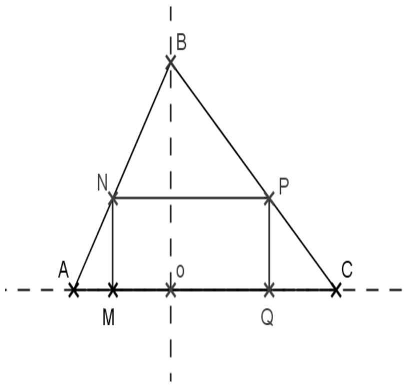
La première séquence d'observation a été implémentée en classe de Première S au premier trimestre de l'année scolaire 2007-2008 dans le cadre du projet ReMath[64]. Elle concerne deux classes de Première S de deux établissements distincts : le Lycée René Cassin à Montfort et le Lycée Maupertuis à Saint-Malo. Chaque classe se compose d'une vingtaine d'élèves. Les deux enseignants de ces classes sont expérimentés dans l'enseignement ainsi que dans le domaine des TICE. Ils participent au projet Casyopée depuis le debut. La plupart des élèves ne sont pas encore familiers avec les logiciels de géométrie dynamique en classe ni avec Casyopée. Toutes les séances ont eu lieu en salle informatique. Les élèves travaillent en binômes et nous avons fait des observations de quelques binômes tout au long des séances d'expérimentation.

Le scénario de notre équipe se compose de six séances et est organisé en trois parties. Chaque partie a été conçue afin que les élèves apprennent des notions mathématiques en découvrant les capacités associées de Casyopée :



Le problème de la séance 6 :

Soit a, b et c trois paramètres positifs. Dans un repère orthonormé *Oxy* on considère les points A(-a;0), B(0;b) et C(c;0). On construit le rectangle MNPQ avec M sur [OA], N sur [AB], P sur [BC] et Q sur [OC].



Existe-il une position du point M telle que l'aire du rectangle MNPQ soit maximale ?

Figure 3. Un problème d'optimisation donné en classe de Première S

La première partie a porté sur les fonctionnalités du module symbolique de Casyopée et sur des fonctions quadratiques. La deuxième partie a d'abord pour objectif de consolider les connaissances des élèves sur des situations géométriques et de leur présenter les fonctionnalités du module géométrique, ce qui est une spécificité de Casyopée. Finalement, pour la dernière partie, les élèves doivent profiter de toutes les caractéristiques de Casyopée et activer toutes leurs connaissances algébriques pour résoudre un problème d'optimisation. L'ensemble de ces six séances constitue une initiation à l'utilisation de Casyopée à travers une succession d'activités. L'accent est mis sur le potentiel a priori offert par Casyopée pour

64 Representing Mathematics with Digital Media, a Targeted European Project (IST4-26751), http://remath.cti.gr/

approcher des fonctions. Comme la séance présente une situation géométrique dont la résolution demande aux élèves de profiter des caractéristiques de deux modules de Casyopée, nous limitons pour notre première expérimentation notre observation à cette dernière séance (séance 6).

A travers l'analyse des observations d'un binôme (Elina et Chloé) et le bilan des autres binômes (Minh, 2011), les résultats obtenus font apparaître les constats suivants :

- Une potentialité riche des activités sur les fonctions avec Casyopée contre une utilisation faible chez les élèves observés
- Les genèses instrumentales des élèves sont encore très embryonnaires. Le rapport entre le développement de connaissances mathématiques sur les fonctions et de connaissances sur l'artefact est limité.

Nous faisons l'hypothèse que les objectifs énoncés dans la partie d'introduction pour le contexte que nous étudions supposent une étude de la genèse instrumentale sur un temps beaucoup plus long. Cette hypothèse conduit aux questions de recherche suivantes :

- Comment le cycle de modélisation fonctionnelle permet-il d'analyser et de relier les activités variées sur les fonctions en environnement Casyopée ? Comment ces activités favorisent-elles une *compréhension flexible* des fonctions ?
- Comment l'utilisation régulière de Casyopée sur un temps long en classe permet-elle aux élèves d'articuler le développement de leurs connaissances mathématiques sur les fonctions et de connaissances sur Casyopée ?

Afin de chercher des éléments de réponse pour les questions au-dessus, nous avons conçu une seconde expérimentation en classe de Terminale S pendant l'année scolaire 2008 – 2009.

b. Seconde expérimentation : une ingénierie didactique

Nous avons mis en place dans le cadre de la seconde expérimentation trois séances d'observations de l'activité des élèves et de ce qu'elle produit :

- Observations de classe :

Séance C1 (octobre, 2008): L'objectif est de consolider l'usage de Casyopée suite à la première expérimentation. Il s'agit de travailler sur les fonctions du second degré via l'étude de la maximisation d'une somme des aires inscrites dans un carré.

Séance C2 (novembre, 2008): Cette séance a pour but d'approfondir l'exploitation des potentialités de Casyopée. Il s'agit d'approcher les fonctions de troisième degré à travers l'étude de l'aire maximale d'un triangle rectangle en considérant différentes valeurs du paramètre qui conduisent à différentes fonctions.

Séance C3 (décembre, 2008) : Approcher une situation de problème réelle. Il est demandé aux élèves d'utiliser Casyopée pour modéliser et résoudre d'une manière plus autonome un problème de minimalisation d'une somme de longueurs dans un système de collecte des eaux de pluie et finalement de retourner au traitement du résultat dans la géométrie.

- Questionnaire *:* Les élèves ont répondu à un questionnaire de bilan à la fin de la séquence expérimentale en décembre.
- Interviews focalisés *:* Nous avons également réalisé les entretiens avec le binôme Elina-Chloé et avec l'enseignant à la fin de l'année scolaire (fin mai 2009). Ceux-ci nous ont permis de dégager et de comprendre des évolutions des élèves vis-à-vis de l'usage de Casyopée.

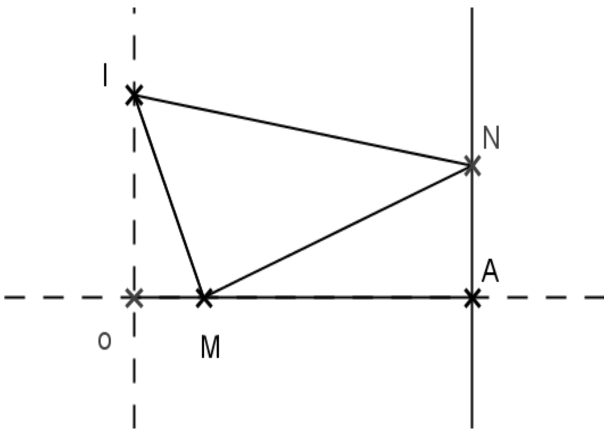
Les séances C1, C2 et C3 se situent sur le premier trimestre de l'année de Terminale. Le choix de grouper nos observations sur ce trimestre se justifie par le fait que lors des trimestres suivants, les élèves se centrent sur la préparation du baccalauréat. Casyopée est encore utilisé dans cette période, mais pour des problèmes plus en relation avec l'épreuve. Nous insérons une observation de bilan (interviews focalisés) en fin d'année pour faire le point sur la genèse instrumentale à l'issue de l'année de Terminale. De C1 à C2 il y a une gradation du besoin en connaissances mathématiques et en connaissances sur l'usage de Casyopée. Dans la séance C3, c'est davantage la capacité des élèves de mobiliser leurs connaissances mathématiques et connaissances sur Casyopée pour un problème d'optimisation qui est en jeu.

c. *Une séance d'observation clé*

Nous avons choisi la séance C2 de l'ingénierie comme un moment d'observation clé qui s'est déroulée en janvier 2009. Voici le texte donné aux élèves en Terminale S :

Le problème :

Soit a un paramètre positif. Dans un repère orthonormé Oxy on construit deux points A(10;0), I(0;a) et la parallèle à l'axe Oy passant par A. M est un point libre sur le segment [OA]. On crée le triangle IMN rectangle en M, avec N appartenant à la parallèle (le triangle étant « aplati » selon le segment [IA] quand M est en A).



Existe-il une position du point M telle que l'aire du triangle IMN soit maximale ?

1. Phase 1 : Le cas a = 5

Concevoir la figure avec Casyopée

Créer un calcul géométrique de l'aire du triangle *IMN* et explorer le problème en déplaçant le point libre *M*

Modélisation fonctionnelle : indiquer le choix de variable et l'expression algébrique de la fonction exportée

Chercher une preuve algébrique

Visualiser la réponse dans la fenêtre géométrique.

2. Phase 2 : Le cas a = 6

Re-explorer le problème.

Figure 4. Texte donné aux élèves en Terminale S

Le processus de résolution de ce type de problèmes avec Casyopée se divise en plusieurs étapes en référence au cycle de modélisation fonctionnelle proposé. Le tableau suivant (tableau 1) indique pour chaque étape les composants mathématiques, les composants relatifs à l'artefact et les fonctionnalités correspondantes offertes par Casyopée.

La fonction modélisant la dépendance a des propriétés différentes selon les valeurs du paramètre *a*. Par exemple, si on choisit la variable $x = OM$, l'expression de la fonction modélisant la dépendance entre cette distance OM et l'aire du triangle IMN sera :

$$f : OM \to \frac{IM.MN}{2}$$

$$f(x) = -\frac{5\left(\frac{x}{10}-1\right)\left(x^2+a^2\right)}{a}$$

Tâches	Composants relatifs à l'artefact	Aides et rétroactions fournies par Casyopée
Concevoir la figure	Créer des objets géométriques, définir et piloter des paramètres	Outils de géométrie dynamique ; « robustesse » de la construction.
Explorer et faire des conjectures	Bouger les objets géométriques libres	Création d'un calcul géométrique ; affichage dynamique des valeurs numériques du calcul.
Modéliser le problème	Choisir une variable adéquate, exporter une fonction dans la module symbolique	Fonctionnalité « choisir une variable » et « exporter une fonction », rétroactions sur le choix de variable ; calcul automatique de l'expression algébrique et du domaine de définition de la fonction exportée.
Travailler sur un modèle mathématique	Faire des transformations algébriques ; calculer la dérivée et trouver ses signes Travailler sur des paramètre	Fonctionnalité de calcul formel ; aider à trouver des signes ; visualiser le tracé graphique Pilotage des paramètres.
Interpréter dans le Système physique	Visualiser la réponse dans le module géométrique	Capacité de relier les deux modules ; lien entre la géométrie dynamique et la représentation graphique.

Tableau 1. Tâches, composants relatifs à l'artefact et rétroactions de Casyopée

Le texte donné aux élèves (figure 4) distingue deux phases principales. Dans la première phase, il est demandé aux élèves de travailler sur le cas $a=5$. Dans ce cas, la fonction exprimant l'aire du triangle *IMN* a un minimum et un maximum sur l'intervalle ouvert $]0;10[$.

La valeur de la fonction à l'origine *O* est égale à la valeur au point maximum. Il y a donc deux positions possibles du point libre *M* pour lesquelles l'aire est maximale : le point *O* et le point correspondant au maximum sur $]0;10[$. Pour la deuxième phase, les élèves explorent le problème avec le cas $a = 6$ où la fonction exprimant l'aire du triangle *IMN* est également un polynôme de troisième degré mais strictement décroissant sur son intervalle de définition. Il n'y a donc qu'une position possible pour le point *M*, l'extrémité *O* du segment [OA].

Données recueillies

Nous considérons la progression des élèves sous deux aspects : leur utilisation de Casyopée et leurs connaissances mathématiques sur les fonctions. Afin d'éclairer cette progression, nous nous appuyons non seulement sur des observations en classe mais encore sur un questionnaire de bilan et un entretien de fin d'année avec des élèves observés et avec l'enseignant. Ce questionnaire d'opinion leur a été donné à la fin de la seconde expérimentation. Il porte sur l'appropriation des fonctionnalités de Casyopée par des élèves et sur l'apport des caractéristiques spécifiques du logiciel pour l'apprentissage des fonctions, notamment pour la modélisation fonctionnelle. La séance d'entretien comprend deux parties. Dans la première partie, il est demandé aux élèves d'utiliser Casyopée pour résoudre un problème d'optimisation qui est similaire à ceux donnés dans les séances de la seconde expérimentation. La deuxième partie est réservée à un entretien court dont le contenu porte sur les étapes de la résolution de ce type de problème d'optimisation avec Casyopée.

Les données recueillies comprennent des notes d'observation des chercheurs, des fichiers vidéo de captures d'écran obtenus grâce au logiciel CamStudio, des fichiers audio, des productions écrites des élèves et des comptes rendus de l'enseignant. Après les expérimentations, des analyses a posteriori sont confrontées avec une analyse a priori des situations données afin d'en déduire des conclusions.

Synthèse des observations

Les résultats de recherche sont présentés sous forme d'évolutions des élèves tout au long de leurs processus d'apprentissage. Ces évolutions sont illustrées avec des exemples du travail des élèves ainsi que des extraits de l'entretien et du questionnaire à la fin de l'expérimentation.

Activités variées sur les fonctions

a. Activités dans le domaine « Système physique »

Le domaine « Système physique » ici est la géométrie dynamique où les élèves construisent une figure dynamique et font des explorations enactive-iconiques (Tall, 1996). Les observations ont montré que cette tâche est difficile et demande de mobiliser des connaissances mathématiques. Il s'agit des connaissances sur la parallélisme et la perpendicularité des côtés d'un rectangle ainsi que de la distinction entre point libre, point semi-libre et point restreint.

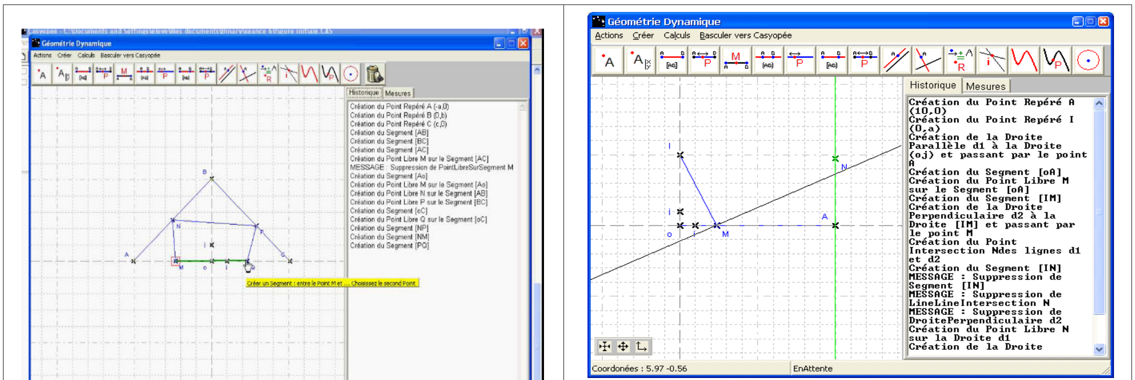


Figure 5. Difficultés du binôme Elina-Chloé pour la construction d'une figure géométrique dynamique

Durant la première expérimentation, le binôme a passé beaucoup de temps à construire la figure. Il a fait d'abord la construction du quadrilatère *MNPQ* « mou » en prenant en compte des propriétés de parallélisme et de perpendicularité mais seulement « au jugé ». La déformation de la figure lors du déplacement du point libre *M* l'a aidé à reconnaître cette erreur. Cependant, cette rétroaction n'a pas été suffisante pour le binôme et l'observateur a dû intervenir pour l'aider. Dans la deuxième expérimentation, ces difficultés ont persisté mais le binôme a pu les dépasser sans l'aide de l'observateur.

Le passage du domaine « Système physique » au domaine « Grandeurs » est caractérisé par la création des calculs géométriques pertinents pour explorer une covariation entre grandeurs ou mesures. Dans la première expérimentation, certains élèves avaient eu du mal à entrer un calcul géométrique de l'aire de rectangle MNPQ. Il a fait une erreur en tapant *MNxMP* au lieu de *MNxMQ*. En revanche, ces élèves ont créé correctement un calcul géométrique exprimant l'aire du triangle IMN dans la seconde expérimentation sans l'intervention de l'observateur.

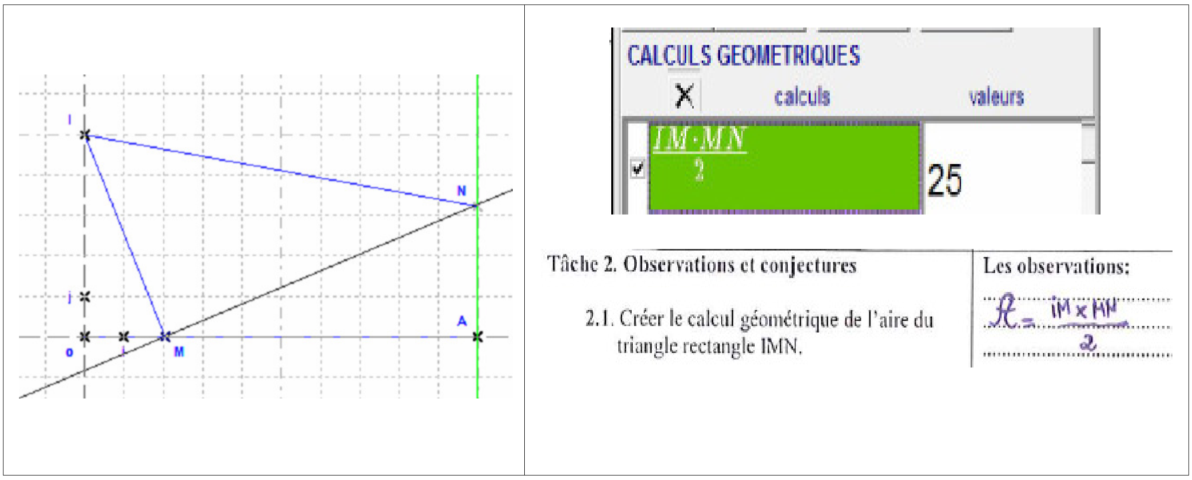


Figure 6. Passage du domaine « Système physique » au domaine « Grandeurs » du binôme Elina-Chloé

b. Activités dans le domaine « Grandeurs »

Les élèves ont fait dans ce domaine des explorations enactive-iconiques telles que : faire varier des grandeurs concernant le point M, observer et percevoir les variations de l'aire du rectangle MNPQ ou du triangle IMN, choisir une variable appropriée et une valeur pour constituer une dépendance fonctionnelle, et conjecturer une solution du problème.

Nous avons trouvé que certains élèves ont eu du mal à comprendre ce qui est une variable dans Casyopée pendant les premiers usages. Il s'agit ici d'une confusion entre deux actions « Créer un calcul » (pour explorer sa valeur numérique) et « Choisir une variable » (pour constituer une dépendance fonctionnelle). Durant la seconde expérimentation, les élèves ont beaucoup exploité la fonctionnalité « Calcul géométrique » de Casyopée afin d'explorer la covariation entre valeurs numériques des grandeurs en jeux (la distance OM et l'aire du triangle IMN). Ces explorations leur ont permis de choisir une variable appropriée OM et de faire des hypothèses sur le sens de variation de la valeur de l'aire ainsi que la position exacte du point M pour laquelle l'aire est maximale.

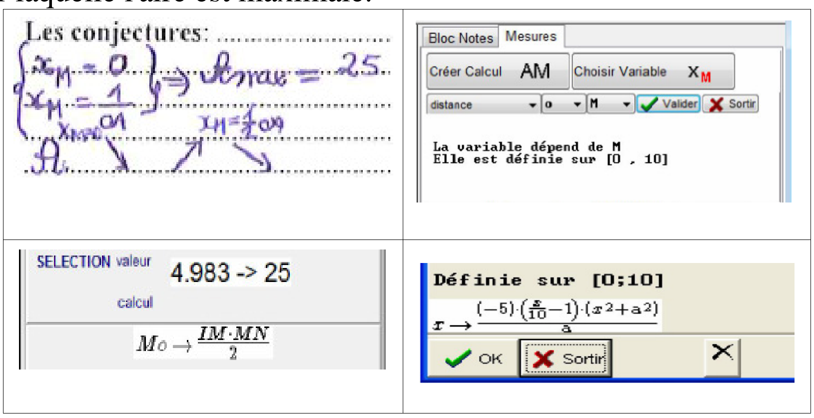


Figure 7. Activités des élèves dans le domaine « Grandeurs »

Chloé : C'est 25

Elina : Oui, soit xM = 0 quand M a les coordonnées (0 ;0) ou soit M a les coordonnées: demi de OA et zéro {M est le milieu de [OA]}

Chloé : C'est croissante puis décroissante

Elina : Mais non, regarde! On part de 25, c'est décroissante, puis croissante jusqu'à M a les coordonnées : demi de OA et zéro. Après, c'est décroissant.

L'extrait suivant montre une évolution du binôme observé de la compréhension du processus de modélisation fonctionnelle avec Casyopée après la seconde expérimentation :

Chloé : Choix d'une variable ? La dernière fois, on l'a fait avec la hauteur.
Elina : Non, *OM*. Je pense que ça c'est bon pour une variable
Chloé : Oui. {*Elle valide cette variable puis exporte la fonction*}
Elina : Son ensemble de définition ?
Chloé : C'est $]-\infty;+\infty[$. Ah non, c'est $[0;10]$
Elina : Regarde! C'est marqué, l'ensemble de définition.
Observateur : Et finalement, quelles sont les étapes de la modélisation ?
Chloé : On trace la figure, on fait des conjectures.
Elina : On fait le calcul.
Chloé : Oui, on trace la figure, on fait le calcul.
Chloé : Et après le calcul, il faut juste que l'on regarde ce qui se passe, et on conjecture.
Elina : Ensuite, on choisit la variable.
Chloé : Oui, on exporte la fonction et essaie de valider la conjecture.

L'exportation de la fonction géométrique (la formule pré-algébrique $OM \rightarrow \frac{1}{2} IM \times MN$) dans le module symbolique correspond à un passage du domaine « Grandeurs » au domaine « Fonctions mathématiques ». L'identification de la variable, de son domaine de définition et la validation de sa formule sont des étapes importantes. Casyopée donne une aide pour ces étapes en calculant le domaine et la formule, tout en laissant l'élève libre du choix de variable.

Ainsi, l'évolution des élèves montre l'effet positif des rétroactions et la variété d'activités offertes par l'environnement Casyopée : choisir la variable appropriée OM et la valider spontanément, reconnaître l'ensemble de définition de la fonction exportée, comprendre les différentes activités sur les fonctions dans Casyopée.

c. Activités dans le domaine « Fonctions mathématiques »

Après avoir obtenu une expression algébrique de la fonction, la plupart des élèves ont privilégié l'exploration du tracé graphique de la fonction dans le module symbolique de Casyopée. D'abord ils ont repéré la position du point M en faisant bouger le point mobile correspondant sur le tracé graphique de la fonction. Ensuite, ils ont utilisé Casyopée pour développer l'expression algébrique de la fonction puis calculer sa dérivée. L'étude de la fonction (trouver les zéros de la dérivée, faire un tableau de variation...) a été généralement réalisée en papier/crayon. La figure suivante montre une combinaison entre le travail aidé par Casyopée et le travail en papier/crayon dans la fiche du binôme Elina-Chloé : l'identification d'une variable, la création d'une formule pré-algébrique exprimant la dépendance fonctionnelle, et le calcul d'une formule algébrique sont aidées par Casyopée, et finalement un tableau de variation est complété en papier/crayon (dans ce cas le binôme a fait un tableau de variation incorrect. Il s'agit d'une confusion des signes de la dérivée).

La possibilité de basculer de l'un à l'autre entre deux modules de Casyopée a effectivement aidé les élèves à interpréter et vérifier la solution mathématique trouvée.

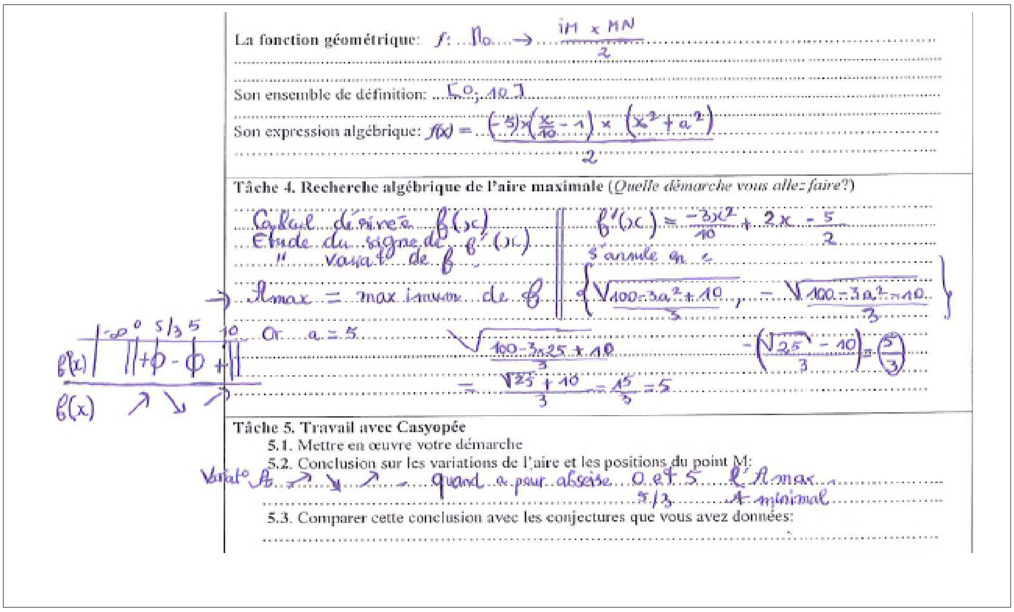


Figure 8. Une combinaison entre le travail aidé par Casyopée et le travail en papier/crayon

Vers une compréhension flexible des fonctions ?

Nous interprétons ici les observations du point de vue de la *compréhension flexible* des fonctions, c'est-à-dire une aisance à mobiliser les caractéristiques opérationnelle, structurelle ou covariationnelle des fonctions dans les différents domaines de représentation.

Dans le domaine « Grandeurs » les élèves ont exploré les fonctions comme processus dynamiques de covariation entre grandeurs : covariation entre la position du point libre M et l'aire du triangle IMN ou entre la distance OM et cette aire. L'exportation de la fonction dans le module symbolique a favorisé une première transition d'une conception « covariation » vers une conception « objet » où les élèves ont obtenu un objet fonctionnel (une formule algébrique ou un graphe). Dans ce domaine « Fonctions mathématiques », ils ont pu travailler sur les différents registres : graphique, symbolique, et numérique. Le registre graphique a encouragé à la fois les deux conceptions « processus » et « objet » chez les élèves : le cadrage du graphe pour le visualiser a favorisé d'une part une conception « objet », et d'autre part le repérage des coordonnées maximales en déplaçant un point mobile sur le graphe a aidé les élèves à développer une conception « processus ». Le passage au registre symbolique pour travailler sur des expressions algébriques a supposé d'abord une conception « objet » des fonctions. Le travail de transformation algébrique ultérieur mis en jeu un processus sur cet objet.

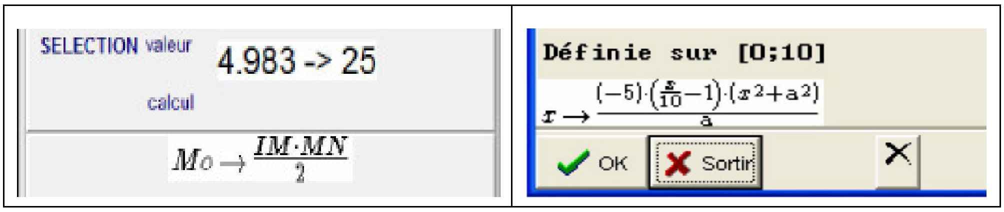


Figure 9. Illustration d'une conception « covariation » (l'image à gauche) et d'une conception « objet » (l'image à droite) des fonctions

L'extrait suivant du questionnaire montre que comment les élèves comprennent les fonctions dans Casyopée :

> On a en même temps le côté algébrique et géométrique du problème. On voit mieux comment une fonction « réagit ». C'est pratique et intéressant (Chloé).

On peut dire ici que les activités diverses dans les trois domaines de représentation et dans les différents registres de Casyopée ont facilité chez les élèves observés une compréhension flexible des fonctions. Il s'agit de reconnaître le même objet de fonction dans les différents domaines de représentation.

Développement conjoint de connaissances mathématiques et de connaissances sur l'artefact pendant un temps long de la genèse

Nous interprétons ici les observations du point de vue de la genèse instrumentale, vue comme le développement conjoint de connaissances mathématiques sur les fonctions et de connaissances sur Casyopée.

Les données recueillies à partir du questionnaire et des entretiens ont permis de mettre en évidence des problèmes significatifs concernant l'usage de Casyopée. Il apparaît clairement que les premiers usages ont été difficiles à cause de la variété des fonctionnalités de Casyopée. Les élèves confondent par ailleurs une fonction et une fonctionnalité :

> On ne connaît pas exactement les différentes fonctions, différents outils qu'il y a dans Casyopée. On obtient des calculs et on ne sait pas comment on a fait pour y arriver : déroulement de calcul (Elina).
>
> Le logiciel possède plusieurs fonctions, donc parfois on ne sait pas quelle fonction prendre (Marc).

Les élèves ont également rencontré des difficultés relatives à l'artefact mais aussi des difficultés mathématiques lors de la phase de modélisation fonctionnelle, particulièrement sur l'action de choisir une variable :

> La chose la plus dure, c'est le choix de variable. Après, il faut bien choisir la bonne variable (Chloé).

Ces élèves ont indiqué comment les difficultés ont été dépassées au long de l'expérimentation. Leur maîtrise de Casyopée est justifiée par l'utilisation régulière et l'aide de l'enseignant :

> J'ai téléchargé Casyopée sur Google donc je l'utilise quelques fois pour l'entraînement… Au début, j'avais du mal à trouver quelques fonctionnalités pour utiliser mais maintenant c'est bon… Avec l'aide du professeur qui nous explique comment faire pour résoudre certains problèmes (Chloé).

Malgré les difficultés repérées dans les premiers usages, les élèves ont eu à la fin de la seconde expérimentation des remarques positives par rapport aux caractéristiques spécifiques de Casyopée, notamment la modélisation fonctionnelle et la possibilité de relier dynamiquement les deux modules géométrique et symbolique :

> Le choix de variable, je trouve que cela est intéressant… Faire toutes les démarches est super : construction de la figure, tableau de variation, calcul de dérivée… Casyopée est plus rapide et plus commode qu'une calculatrice… On a en même temps le côté géométrique et algébrique du problème... On voit mieux comment une fonction « réagit », c'est pratique et intéressant (Chloé).
>
> Casyopée permet sur un problème géométrique d'étudier facilement en calculant les distances géométriques, de pouvoir établir des variables qui pourront ensuite servir pour étudier le problème par des fonctions (Amandine).

Les potentialités de Casyopée ont été perçues comme éléments favorables pour l'apprentissage des fonctions car elles ont permis d'aborder le problème de manière « pratique » et « intéressante ». La genèse instrumentale a créé chez les élèves une motivation à la fin de la deuxième expérimentation et a permis un travail significatif sur ce type de problème.

D'autres élèves avaient eu du mal à construire la figure dynamique et ont pris beaucoup de temps pour achever cette tâche durant la première expérimentation. La plupart d'entre eux ont d'abord construit un rectangle *MNPQ* « mou » avec des points *M*, *N*, *P*, *Q* libres dans le plan. Ils s'aperçoivent de cette erreur en faisant bouger les points. Certains élèves ont eu besoin d'aide de l'enseignant ou de l'observateur pour finir la construction de la figure. La création d'un calcul géométrique de l'aire ne leur pose en général pas de problèmes. Les choix de variables sont variés mais l'exportation d'une fonction a très souvent nécessité l'intervention de l'enseignant. Pour la preuve algébrique, les élèves ont principalement travaillé en papier/crayon sur un cas particulier des paramètres et ont peu utilisé les outils algébriques disponibles dans Casyopée pour le calcul de la valeur maximale.

En général, la seconde expérimentation a relativement témoigné d'une progression des élèves dans l'appropriation de Casyopée comme un instrument mathématique. Ils ont eu plus d'autonomie dans la construction de la figure. Tous les élèves observés ont correctement créé un calcul géométrique de l'aire du triangle *IMN*. On a observé beaucoup d'explorations numériques de la covariation entre le point libre M et l'aire du triangle. Il y a sept binômes (sur onze) qui ont donné des conjectures exactes sur les positions du point *M* correspondant à l'aire maximale. Le choix des variables et l'exportation des fonctions sont spontanés. Le choix de la variable *oM* est dominant. La plupart des binômes ont proposé une démarche de dérivée pour chercher une preuve algébrique. Cependant, il y a peu de binômes qui ont réussi à utiliser Casyopée pour soutenir cette démarche.

Dans le tableau ci-dessous, nous essayons de souligner les liens et les articulations entre la progression des usages de Casyopée et le développement des connaissances mathématiques du binôme Elina-Chloé sur un temps long de l'apprentissage.

Tâches	Progression des usages de Casyopée	Développement de connaissances mathématiques
Concevoir la figure	- Correction plus rapide des erreurs après l'observation des déformations inattendues de la figure.	- Meilleure compréhension des dépendances fonctionnelles dans la figure.
Explorer et faire des conjectures	- Définition correcte et usage d'un calcul géométrique pour l'aire - Distinction entre deux boutons « Créer un calcul » et « Choisir une variable »	- Compréhension de la formule d'aire du triangle comme covariation entre le point mobile M et la valeur de l'aire.
Modéliser le problème	- Usage spontané et facile des boutons « Choisir une variable » et « Exporter une fonction » - Adaptations rapides aux rétroactions du logiciel.	- Compréhension d'une dépendance fonctionnelle - Distinction d'une dépendance fonctionnelle parmi des covariations.
Travailler sur un modèle mathématique	- Usage facile des transformations algébriques offertes par Casyopée - Pilotage des paramètres.	- Compréhension de différents comportements de la fonction dépendant du paramètre - Compréhension d'une fonction dépendant d'un paramètre comme une famille de fonctions.

Tableau 2. Développement conjoint de connaissances mathématiques sur les fonctions et de connaissances sur Casyopée pour le binôme Elina-Chloé

Comme on le voit, chaque tâche mentionnée ci-dessus demande à la fois des connaissances mathématiques et des capacités à utiliser Casyopée. L'observation des élèves pendant un temps long nous a montré que l'épisode de modélisation fonctionnelle est une étape où l'association entre connaissances mathématiques et connaissances sur l'artefact est particulièrement en jeu. La distinction entre calcul, variable et fonction facilite les manipulations avec Casyopée et les adaptations à ses rétroactions. De plus, ce processus, mis en œuvre dans des situations *ad hoc*, permet de modéliser la notion de fonction dans un contexte de résolution de problèmes – ce qui était préconisé dans les programmes scolaires de ce niveau.

Conclusion et discussion

Conclusion

Nous reprenons ici nos questions principales que nous avons formulées dans ce texte :

Comment le cycle de modélisation fonctionnelle permet-il d'analyser et de relier les activités variées sur les fonctions en environnement Casyopée ? Comment ces activités favorisent-elles une *compréhension flexible* des fonctions ?

Comment l'utilisation régulière de Casyopée sur un temps long en classe permet-elle aux élèves d'articuler le développement de leurs connaissances mathématiques sur les fonctions et de connaissances sur Casyopée ?

L'analyse des observations a donné des éléments de réponse à ces questions de recherche.

Premièrement, nous avons présenté en nous appuyant sur la typologie d'activités (Lagrange & Artigue, 2009) un cycle de modélisation permettant de relier les différentes activités sur les fonctions dans les trois domaines de représentation. Nous avons mis l'accent sur le domaine intermédiaire « Grandeurs » dans le cycle de modélisation proposé qui a permis de relier un domaine initial d'existence des grandeurs (Système physique) et le modèle mathématique (Fonctions mathématiques). De notre point de vue, les activités des élèves dans ce domaine telles que créer un calcul géométrique exprimant la valeur d'une grandeur, explorer les covariations entre grandeurs et mesures, choisir une grandeur appropriée comme une variable pour quantifier la dépendance fonctionnelle géométrique, calculer une fonction mathématique exprimant cette dépendance fonctionnelle... sont fructueuses pour la conceptualisation des fonctions. L'analyse des observations en classe a montré les potentialités de ce cycle de modélisation pour la recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des fonctions au lycée. Il a en effet aidé à la conception des situations d'apprentissage et permis d'analyser et d'éclairer les activités variées des élèves sur les fonctions.

Bien que le cycle de modélisation et l'environnement Casyopée aient eu les potentialités d'offrir aux élèves des opportunités de travailler sur des covariations et des dépendances fonctionnelles dans les trois domaines différents de représentation, nous ne pouvons pas dire que tous les élèves ont atteint une compréhension flexible des fonctions à la fin de l'expérimentation. Cependant, en ayant observé l'usage de Casyopée sur un temps long par les élèves, nous pouvons conclure que les activités diverses dans les différents domaines de représentation avec Casyopée ont aidé les élèves à explorer les aspects « processus-objet » et « covariation », à travailler sur le symbolique des dépendances fonctionnelles et des variables. Ce sont les éléments essentiels d'une perspective fonctionnelle sur l'enseignement de l'algèbre (Kieran, 2007). Ces activités variées ont également facilité chez les élèves une aisance à travailler sur les différents aspects du concept de fonction et à explorer la dynamique d'une approche « covariation ».

Deuxièmement, nous nous somme intéressés aux apprentissages des fonctions au lycée sur un temps long d'utilisation de l'environnement Casyopée. L'analyse des observations sur un temps long a montré les progrès des élèves observés. Ces progrès avec Casyopée peuvent être interprétés comme une genèse instrumentale adéquate, particulièrement en ce qui concerne les fonctionnalités de modélisation de Casyopée (Créer un calcul géométrique, Choisir une variable, Exporter une fonction) et les connaissances mathématiques qui y sont liées. Notre recherche a indiqué chez le binôme observé Elina-Chloé et chez autres élèves un développement conjoint de connaissances mathématiques sur les fonctions et de connaissances sur Casyopée pendant la genèse instrumentale et a montré comment l'utilisation régulière de l'artefact permet aux élèves d'articuler ces deux types de connaissances. Les élèves ont perçu l'importance et les difficultés de l'étape de modélisation fonctionnelle et comment la réalisation de cette étape mobilise ce développement conjoint de connaissances. Nous pensons que le développement conjoint de ces deux types de connaissances est une caractéristique de la genèse instrumentale. L'originalité de notre étude est qu'elle se situe sur le temps long de l'apprentissage d'une notion. Nous montrons que l'ingénierie construite dans le projet ReMath, bien qu'elle prenne en compte les besoins instrumentaux des situations proposées ne constitue qu'une première étape dans une genèse qui, même à la fin de la Terminale, ne paraît pas totalement achevée.

Discussion

Un des résultats de notre travail est de montrer la possibilité d'une approche où les fonctions sont considérées comme modèles de dépendances dans un cadre géométrique. Les activités fondées sur l'étude des relations de dépendances entre grandeurs ou mesures ont permis aux élèves observés de progresser dans leur compréhension de la notion de fonction. Une telle approche est en phase avec ce qui est actuellement visé par les programmes dans l'enseignement des fonctions au lycée. Cette approche des fonctions se révèle efficace, mais au prix d'une analyse fine des activités possibles et des potentialités du logiciel. Cela nécessite une analyse avec un cadre théorique approprié articulant un cadre ergonomique - l'approche instrumentale, un cadre cognitif – la distinction processus-objet et un cadre épistémologique – la typologie d'activités.

Notre étude confirme tout d'abord qu'il est important de ne pas sous-estimer la durée nécessaire à une véritable genèse. Le développement de connaissances sur les fonctions s'inscrit dans le temps long de l'apprentissage, c'est-à-dire plusieurs années. Notre étude montre que la genèse instrumentale d'un logiciel dédié aux fonctions comme Casyopée s'inscrit aussi nécessairement dans cette durée. Ceci montre de façon particulièrement évidente qu'une tendance à considérer les TICE comme simples adjuvants pédagogiques utilisés ponctuellement, empêcherait de prendre en charge les genèses instrumentales et leurs implications avec les apprentissages des mathématiques et de concevoir des tâches appropriées pour soutenir les apprentissages dans environnements numériques. Ce serait donc un obstacle didactique majeur.

Notre ingénierie didactique se révèle efficace dans le contexte institutionnel actuel de l'enseignement des fonctions en France et dans un contexte local où Casyopée est partie intégrante des pratiques du professeur. Cela peut amener à une étude de l'influence des éléments contextuels (des théorisations sous-jacentes ou implicites, des données curriculaires ou institutionnelles, habitus des enseignants…) et des conditions pour mettre en œuvre cette ingénierie dans d'autres contextes. Cette perspective se situe dans le cadre des recherches récentes sur des problèmes liés aux contextes dans la pratique de recherche et dans la diffusion des technologies numériques pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (Morgan, Kynigos, & Lagrange, 2010 ; Lagrange & Psycharis, 2011). Il est clair qu'une expérimentation est d'autant plus sensible aux effets de contexte qu'elle se déroule sur un temps long.

Par ailleurs, notre étude intègre les deux premières dimensions du modèle de compétences de Weigand & Bichler (2010) : la compréhension des fonctions et les compétences relatives à l'outil, tout en les considérant dans un processus de développement sur un temps long. Cependant, ce modèle vise une analyse plus fine des compétences à un moment donné de l'activité des élèves et il sera intéressant de considérer son utilisation pour analyser plus précisément des moments clé des apprentissages que nous avons étudiés.

Bibliographie

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectic between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7(3),* 245–274.

Arzarello, F., & Robutti, O. (2004). Approaching functions through motion experiments. *Educational Studies in Mathematics*, *57(3)*, Special Issue, CD-Rom.

Bloch, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enables students to conjecture and prove? *Educational Studies in Mathematics, 52(1)*, 3-28.

Breidenbach, D. E., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). The development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics, 23,* 247-285.

Bueno-Ravel, L., & Gueudet, G. (2009). Online resources in mathematics, teachers' geneses and didactical techniques. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 14(1)*, 1-20.

Comin, E. (2005). Variables et fonctions, du collège au lycée : méprise didactique ou quiproquo interinstitutionnel. *Petit x, 67,* 33-61.

Drijvers, P., Kieran, C., & Mariotti, M. A. (2010). Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology – Rethinking the Terrain* (pp. 89-132). New York: Springer.

Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). The Nature of Process Conception of Function. In G. Harel, & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 85-106). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Falcade, R., Laborde, C., & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics*, *66(3)*, 317-333.

Guin, D., & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3(3)*, 195–227.

Haspekian, M. (2005). An « instrumental approach » to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: the case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *10(2)*, 109-141.

Hodgson, R., & Muller, E. R. (1992). The Impact of Symbolic Mathematical Systems on Mathematics Education. In B. Cornu, & A. Ralston (Eds.), *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and Its Teaching. Science and Technology Education Series, 44* (pp. 93-107). Paris: UNESCO.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Lagrange, J.-B., & Artigue, M. (2009) Students' activities about functions at upper secondary level: a grid for designing a digital environment and analysing uses. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. &

Sakonidis, C. (Eds.), *Proceedings of 33rd Conference of the International Groupe for the Psychology of Mathematics Education,* Vol.3, pp. 465-472. Thessaloniki, Greece: PME.

Lagrange, J. –B., Artigue, M., Cazes, C., Gélis, J. M., & Vandebrouck, F. (2011). Représenter des Mathématiques avec l'ordinateur. In M. Abboud-Blanchard, & A. Fluckiger (Dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (pp. 67-100). Paris : IREM de Paris 7.

Lagrange, J.-B., & Psycharis, G. (2011). Combining theoretical frameworks to investigate the potential of computer environments offering integrated geometrical and algebraic representations. Paper presented at the 10th International Conference on Technology in Mathematics Teaching, ICTMT10, Portsmouth, UK.

Minh, T. K. (2011). Apprentissage des fonctions au lycée avec un environnement logiciel : situations d'apprentissage et genèse instrumentale des élèves. Thèse de Doctorat, Université Paris Diderot. Available at http://tel.archives-ouvertes.fr/

Morgan, C., Kynigos, C., & Lagrange, J. –B. (2010). Research Forum: The Conceptualisation and Role of Context in Research with Digital Technologies. In Pinto, M. F. & Kawasaki, T. F. (Eds.). *Proceedings of 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Belo Horizonte, Brazil: PME.

Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies : Approche cognitive des instruments contemporains. Paris : Armand Colin.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22(1)*, 1-36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification–The case of function. In G. Harel, & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 59-84). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Tall, D. (1996). Functions and calculus. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Thompson, P. W. (1994). Students, functions and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, 1* (Issues in Mathematics Education, vol.4, pp. 21-44). Providence, RI: American Mathematical Society.

Guin, D., Ruthven, K., & Trouche, L. (2005). The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument. New York: Springer.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10 (2/3)*, 133-170.

Weigand, H.-G., & Bichler, E (2010). Towards a competence model for the use of symbolic calculators in mathematics: the case of functions. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *42(7)*, 697-713.

White, T. (2009). Encrypted objects and decryption processes: problem-solving with functions in a learning environment based on cryptography. *Educational Studies in Mathematics*, *72(1)*, 17-37.

Vygotsky, L. (1978). *Mind and Society*. Cambridge, MA: Havard University Press.