

De la circulation des savoirs mathématiques dans la classe aux activités des élèves et à leurs productions en contrôle : questionner les relations, questionner les différences

Chesnais A., Dumail A., Horoks J., Pariès M., Robert A.

Laboratoire de Didactique André Revuz

Universités : Paris 7 – Denis Diderot, Paris 12, Cergy Pontoise, Arras

Résumé

Les travaux que nous présentons abordent la question des relations entre les pratiques des enseignants de mathématiques, notamment en classe (collège, lycée), et les activités des élèves, prises comme intermédiaires de leur conceptualisation potentielle (et donc de leurs apprentissages) et éventuellement « évaluées » à partir de contrôles proposés en classe.

Compte tenu de l'inscription de ces travaux en théorie de l'activité, les variables que nous retenons pour les analyses sont, pour une séance, les tâches proposées (au sein d'un itinéraire cognitif global précisant aussi les déroulements a priori) et les déroulements effectifs, incluant la circulation du savoir mathématique que l'enseignant organise dans la classe. Le premier exposé permettra de préciser ces caractéristiques et d'indiquer notre orientation méthodologique commune, y compris dans une perspective « différentielle » (Aline Robert, Monique Pariès).

La mise en relation des pratiques, des activités et des productions des élèves sera questionnée plus précisément dans le deuxième exposé où l'analyse des contrôles que les élèves produisent est présentée comme une méthode pour détecter certains effets, éventuellement différentiels, des séances étudiées. Des résultats seront donnés (Julie Horoks, Anne Dumail).

Dans cette perspective, on peut être amené en particulier à introduire explicitement la composition des classes comme variable externe (pas indépendante !). Le troisième exposé (Aurélien Chesnais) donnera à voir les résultats de la mise en relation précédente à partir d'un même scénario (sur la symétrie axiale) dans deux classes de sixième différentes, dont l'une dans un établissement très défavorisé.

En conclusion, nous reviendrons sur la portée et les limites de ce type de travaux, en dégageant des perspectives.

Mots clefs

Pratiques des enseignants de mathématiques, différenciation, circulation du savoir, activités des élèves

I Introduction générale

Le symposium de Rennes autour du thème « Équité/efficacité » (Chesnais 2008) nous a permis une première présentation, avec Lalina Coulangue, d'une lecture de nos recherches orientée par un questionnement particulier : il s'agissait de traquer des aspects différentiels des relations entre les pratiques des professeurs de mathématiques et les activités mathématiques correspondantes des élèves, notamment en regard de la composition (sociale) des classes.

Dans le présent exposé, nous élargissons le propos à des différences qu'on peut mettre en évidence, sans privilégier pour l'instant celles qui seraient spécifiquement liées aux classes, même si, souvent, c'est en contrastant des classes ordinaires et des classes faibles ou ZEP que

nous les avons repérées. Il va sans dire que, par delà la mise en évidence de ces différences, c'est une certaine compréhension que nous en recherchons, sachant que trop de données diverses et éventuellement inaccessibles, comme par exemple l'appréciation des effets du temps long, interviennent pour autoriser quelque jugement que ce soit.

Nous mettons l'accent dans cet exposé à plusieurs voix sur des recherches à partir de données recueillies pendant les séances en classe (en mathématiques, au lycée et au collège). Ce niveau, local, peut sembler isolé mais il n'en est rien : tout travail de ce type s'appuie sur, ou permet de remonter à, des questionnements plus larges, sur les mathématiques en jeu, les programmes, les élèves, l'établissement, etc. Nous ne les montrons pas aujourd'hui, ce qui indique seulement que nous considérons ce niveau, local, comme aussi important dans l'effort de recherche que le niveau global (et pas plus important) !

Pourquoi un tel effort de recherche, une telle sensibilité diraient certains ? Qu'est-ce qu'on gagne ? C'est ce que nous allons essayer d'illustrer devant vous – en indiquant aussi quelques orientations méthodologiques, des perspectives et aussi des limites de nos travaux.

Si dans chaque recherche des adaptations méthodologiques sont indispensables, tous les travaux présentés ici partagent un certain nombre d'options théoriques, dont voici un résumé.

1. A quoi s'intéresse-t-on pendant une séance de classe ? Pourquoi ? Retour sur les activités mathématiques des élèves, intermédiaires vers les apprentissages

Les activités mathématiques des élèves désignent un processus associé à ce qu'ils pensent, disent, font, ne font pas... dans leur mise en fonctionnement des connaissances mathématiques – elles sont donc en partie inaccessibles. Elles sont cependant à nos yeux un élément constitutif, une source essentielle, certes partielle, des apprentissages visés que nous étudions (Robert 2008). De plus ce sont les productions des élèves (orales et surtout écrites) qui nous renseignent sur ces apprentissages, sorte de critère, là encore partiel, plus ou moins adapté.

Le mot apprentissage reste vague, on peut parler d'acquisition, de construction des connaissances – en fait notre référence est la conceptualisation des notions du programmes – ou plus exactement un niveau de cette conceptualisation, même si cette référence peut être plus ou moins éloignée des objectifs sur certaines notions, plus pratiques que conceptuels. Conceptualisations éventuellement partielles, comprenant l'organisation des concepts en réseaux (cf. champs conceptuels) et leur disponibilité (à la fois comme objets et comme outils, pouvant être utilisés à bon escient).

Les évolutions actuelles (injonctions institutionnelles notamment, idée de socle) et certaines contraintes d'autre part, liées aux élèves, ne sont pas toujours cohérentes avec cette conception de l'apprentissage ; l'usage massif des TICE tel qu'il est préconisé peut aussi questionner sur cette définition des acquisitions mais ce n'est pas l'objet de cet exposé.

Or, pour un même chapitre, voire pour une même séance, ces activités mathématiques des élèves sont variables selon l'enseignant, la classe, les élèves.

Par exemple on peut constater que certains élèves réagissent très vite, répondent à toutes les questions (voire les anticipent), pendant que d'autres ont l'air de s'y mettre plus lentement, semblent avoir besoin de davantage d'éclaircissements pour travailler – on a évoqué des activités a minima ou a maxima au sein des activités possibles, sachant que ce n'est pas nécessairement une indication de qualité de ces activités mais bien un indice de variabilité possible dont le lien avec les apprentissages n'est pas transparent.

Enfin les productions des élèves sont elles aussi variées et leur mise en relation avec les activités développées par les élèves en amont peut contribuer à éclairer le lien des activités et des apprentissages.

2. Comment aborder la diversité des activités mathématiques possibles ?

Dans ces conditions il y a plusieurs postures de recherche. On peut essayer de définir des conditions essentielles, par delà la conjoncture et la contingence, pour garantir ou étudier l'avancée du savoir dans la classe ; les milieux et contrats sont des outils privilégiés pour ces travaux. Les sujets cognitifs n'ont pas directement leur place dans ces recherches, dans la mesure où ils jouent seulement leur rôle, remplissent leur fonction d'élèves (ou d'enseignants) dans des jeux d'apprentissage qui modélisent en termes de savoirs ce qui se passe.

On peut aussi interroger davantage (et de manière imbriquée), à travers le déroulement en classe, le contexte, la conjoncture, ce qui est imprévisible avant la classe mais pas nécessairement aléatoire et son influence sur l'avancée du savoir. Là encore il y a plusieurs manières de mener cette interrogation. On peut travailler à retrouver au niveau micro des éléments des modèles organisant la lecture de l'avancée du savoir au niveau méso ou macro, en se donnant les moyens de reconstituer les différentes genèses y intervenant (avancée du temps, répartition des rôles, changements de milieux successifs).

D'autres chercheurs, introduisant les sujets dans leur variété cognitive, travaillent à mieux comprendre les relations entre les activités mathématiques des élèves et les choix, y compris liés à la conjoncture de la classe, qu'on peut détecter chez les enseignants. Ils travaillent à saisir, par delà les différences, les variabilités, en repérant aussi les contraintes. Et, peut-être, arrivent-ils à aborder les questions des alternatives, y compris locales, à l'échelle du déroulement de la classe. C'est notre point de vue, on l'aura compris.

3. Quelles variables retenons-nous pour caractériser les activités des élèves en relation avec les pratiques des enseignants ?

Les activités des élèves dépendent des élèves mais aussi de ce qui est proposé par l'enseignant en classe. Cette prise en compte des déroulements en classe, et donc de la conjoncture se justifie ainsi par le fait que c'est une source importante des activités mathématiques des élèves. Elles dépendent, de notre point de vue, certes des tâches proposées, dans leur ensemble, avec leur organisation, mais aussi de « choses » très locales¹ que nous retenons dans la mesure où, du fait même que c'est sur les activités que nous travaillons, le point de vue du travail de l'élève « acteur ou sujet singulier » - et pas seulement celui de la fonction, du rôle d'élève – doit être pris en compte.

Revenons sur les différentes variables qui interviennent.

La plus globale est constituée par le scénario sur un chapitre donné – avec l'ordre adopté pour présenter le cours et les exercices et leurs contenus précis, le choix de l'introduction, la gestion imaginée *a priori*, qui permettent d'y associer des objectifs globaux des enseignants. Au sein de cet itinéraire cognitif que définit ce scénario, la variété des tâches et des mises en fonctionnement mathématiques correspondantes est retenue. Ces analyses *a priori* sont complétées par leur mise en regard avec l'étude des séances en classe. Nous retenons les formes

¹ D'une part l'organisation globale de la fréquentation des mathématiques qui leur est proposée, d'autre part la variété des tâches qu'ils ont à travailler (y compris en contrôles) et enfin le travail effectif sur chaque tâche avec l'accompagnement qui en est fait – c'est ce que nous appelons « choses » très locales.

de travail des élèves et la nature de ce travail, au sein d'un découpage inspiré des différentes tâches mises en évidence dans l'analyse *a priori* et précisé par un repérage chronologique. Enfin les activités possibles ainsi détectées sont encore précisées par l'analyse des accompagnements fins de l'enseignant, son discours, pour apprécier l'enrôlement des élèves, leur maintien dans le travail, les aides apportées, le repérage et l'exploitation de ce travail. Par exemple l'aide d'un enseignant sur un exercice peut débloquer l'élève et entraîner une activité de résolution réduite, sans qu'aucun apprentissage n'en résulte peut-être, ou au contraire, entraîner une construction de connaissance de l'élève, notamment si cette aide vient après un certain travail de cet élève, même sans succès.

Nous avons ainsi choisi pour analyser les activités des élèves des variables liées aux hypothèses que nous admettons sur les apprentissages, liées à ce qui peut influencer les apprentissages – en termes de scénarios, tâches et de gestion fine. D'autres variables pourraient intervenir, en termes de prérequis des élèves par exemple – nous y reviendrons dans les questions.

C'est bien entendu le cadre théorique choisi, adapté aux mathématiques scolaires, qui est à la source de ces variables. Ce cadre résulte d'une adaptation didactique des théories de Piaget articulées avec celles de Vygotski (Rogalski 2008). Ces théories ne fournissent pas un modèle des apprentissages mais indiquent des dimensions pouvant influencer les apprentissages – cela nécessite d'aller voir !

Enfin, ces variables qui influencent les activités des élèves ne sont pas indépendantes – en particulier le déroulement d'hier conditionne le choix des tâches d'aujourd'hui et réciproquement c'est ce choix des tâches qui détermine le déroulement, nous y reviendrons dans les questions présentées ci-dessous...

Ces variables sont aussi liées en grande partie à des activités des enseignants, il en y a une double lecture. C'est d'ailleurs pour qualifier la gestion fine de la classe par l'enseignant que nous utilisons le mot « circulation du savoir » : cela correspond à la vie dans la classe de l'ensemble des couples {énoncés/déroulement} prévus initialement par l'enseignant, à la mise en actes (ou « en musique ») de l'itinéraire cognitif déterminé a priori – même si ce qu'on voit est très différent de ce qui était prévu.

Dans l'exposé présenté ici, on développe plus particulièrement les aspects locaux, et les variables correspondantes des pratiques des enseignants, ce qui ne veut pas dire qu'on ignore les interdépendances avec le reste.

4. Retour à notre problème de la relation entre pratiques et activités

Finalement nous interrogeons la mise en regard

- des pratiques à l'origine des activités des élèves – notamment en classe, ici
- des activités observées (possibles) des élèves
- et de leurs productions

pour nous renseigner sur les relations entre ces pratiques enseignantes et les « apprentissages » et sur des différences éventuelles - avec grande prudence !

Nous faisons intervenir des interprétations de ces variabilités – enseignants et élèves - qui mettent en jeu autre chose que ce qui se passe en classe (par exemple différentes contraintes, institutionnelles, sociales, personnelles) et qui permettent de réfléchir à des alternatives – mais ce n'est pas l'objet de cet exposé.

5. Plan

1. Un zoom sur les déroulements et la circulation du savoir en classe (déroulements « fins ») – relations avec les activités des élèves et premières différences (exemples et méthodologie) (Pariès, Robert)

Dans le premier exposé nous développons la démarche adoptée pour étudier cette circulation du savoir en classe (Chappet Pariès et al 2009, Chappet Pariès 2009). Nous illustrons à partir d'exemples contrastés, morceaux choisis tout exprès, des relations et des différences entre cette circulation du savoir en classe et les activités possibles d'élèves. On contraste à cet effet deux séances de deux classes de sixième du même enseignant, et deux classes de troisième de deux enseignants différents dans des établissements très contrastés.

Mais dans quelle mesure ces activités diverses sont bien en relation avec les apprentissages ?

2. Liens entre les activités possibles des élèves, détectées à partir des pratiques enseignantes, et les productions des élèves en contrôle (éléments méthodologiques et premiers résultats différentiels) (Horoks, Dumail)

Dans le deuxième exposé Julie Horoks et Anne Dumail donneront des éléments d'une méthodologie mettant justement en regard productions d'élèves (en contrôles), circulation du savoir et activités des élèves : cela permet d'avancer, au moins partiellement sur cette question. Elles indiqueront certains résultats qui ne nous font pas changer d'avis (Horoks 2008 ; Dumail 2007) !

De plus, dans quelle mesure les différences constatées sont-elles liées aux classes ou aux enseignants (ou aux deux) ?

3. Le cas de la symétrie axiale dans deux sixièmes contrastées : déroulements et circulation du savoir, activités et liens avec les productions des élèves en contrôle (Chesnais)

L'exposé d'Aurélié Chesnais permet de préciser ce point, en présentant la mise en acte du même scénario sur la symétrie axiale en sixième, l'une ZEP et l'autre pas. Les circulations du savoir qui sont organisées sont différentes, adaptées aux enseignants et aux classes et les relations avec les activités des élèves, mises en regard des productions aux contrôles dans les deux classes, révèlent des différences très informatives sur les élèves et l'adaptation correspondante des enseignants.

Restent des questions : comment se combinent dans les pratiques, les différences

- de scénarios (et de la préparation à la construction du sens des notions compte tenu de nos analyses épistémologiques),
- de la variété des adaptations proposées dans les exercices (et du travail sens/technique)
- et de circulation du savoir

Y a-t-il des seuils ?

Dans quelle mesure interviennent les différences entre les élèves, les différences de posture vis-à-vis du savoir, l'hétérogénéité ?

Dans le cas des ZEP, quel positionnement par rapport aux différentes logiques déjà mises en évidence dans le premier degré (cf. travaux de Glorian, Butlen, Pezard, Masselot, Peltier) ou ailleurs (Bautier) – par exemple en termes de socialisation/réussite/apprentissage

Enfin, en lien avec ce qui précède, y a-t-il vraiment le choix dans les mises en circulation du savoir (et les deux autres niveaux), y a-t-il des alternatives, et même si les pratiques en classe sont variables, sont-elles pour autant modifiables pour un enseignant donné, compte tenu des contraintes et de son mode de fonctionnement ?

Ce qu'on en voit en classe ne correspond qu'à la partie émergée de l'iceberg et on sait bien que de nombreuses contraintes pèsent sur les activités des enseignants en classe. Des recherches antérieures ont montré par exemple certaines régularités inter-enseignantes ainsi que la stabilité des choix de gestion intra-individuel (pour des types de classe donnés). L'importance des anticipations et des représentations des enseignants sur les élèves n'est plus à démontrer (Perrin 1997 ; Butlen et al. 2007).

II Circulation du savoir en classe : relations avec les activités des élèves et premières différences

M. Pariès et A. Robert

Pour préciser et justifier notre propos nous présentons quelques exemples assortis de morceaux choisis.

Les fragments de discours du professeur sont extraits de nos transcriptions.

Ces exemples donnent à voir la circulation du savoir dans deux classes de sixième du même enseignant sur la même tâche puis dans deux classes de troisième l'une ZEP et l'autre non, sur des tâches voisines. Ils permettent une première illustration des activités des élèves correspondantes et de leurs différences éventuelles. Nous donnons quelques précisions sur notre méthodologie systématique et terminons par une série de questions.

1. Premier exemple : Deux classes de sixième, un même enseignant.

C'est le même enseignant qui intervient dans deux classes de sixième dont l'une est faible. Il propose les mêmes tâches à ses élèves, ici la correction du même exercice portant sur la divisibilité d'un nombre par 2, 3, 5, 9.

Enoncé

Voici une liste de dix nombres : 207 ; 815 ; 79 ; 116 ; 48 ; 135 ; 950 ; 29 ; 5 208 ; 360.

Faire un tableau comme ci-dessous et le remplir.

Divisibles	Nombres de la liste
Par 2	
Par 3	207
Par 5	
Par 9	207

La présentation des exercices est à peu près identique, les élèves travaillent à leur place et certains sont interrogés au tableau, la succession des sous tâches présentée par l'enseignant est exactement la même sauf en ce qui concerne les durées de chaque phase. Pourtant à y regarder de plus près, en comparant phrase à phrase les discours de l'enseignant c'est-à-dire en introduisant ce qu'on a appelé la circulation du savoir, on constate des différences en ce qui concerne les activités possibles des élèves.

Enrôler tout le monde et structurer le travail, récapituler de manière détaillée prend du temps dans la classe faible

— La mise au travail est plus consistante, plus détaillée dans la classe faible.

« Alors vous sortez vos cahiers d'exercices. On corrige l'exercice n° 12 heu n° 39... »
(classe forte)

« Alors vous sortez votre cahier d'exercice...Alors l'exercice qui était à faire pour aujourd'hui c'était donc un exercice qui utilisait les critères de divisibilité. » (classe faible)

On voit ici que l'exercice n'est recadré que dans la classe faible.

– La synthèse reprend la plupart des résultats trouvés dans la classe faible.

Voici le tableau complété et les commentaires de l'enseignant dans les deux classes :

Divisibles	Nombres de la liste
Par 2	116, 48, 360, 950, 5208
Par 3	207, 48, 135, 360, 5208
Par 5	135, 360, 815, 950
Par 9	207, 135, 360

« Alors on remarque dans ce tableau qu'il y a des nombres qui n'ont leur place nulle part : 79 et 29. 79 et 29 ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 9. Il y a des nombres qui ont leur place partout comme quoi par exemple ? » (classe forte)

« Alors parmi les nombres qui sont là, qu'est ce qu'on constate ? On constate qu'il y en a deux qu'on a laissé en plan qui sont 79 et 29. 79 et 29 qui sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 9, d'accord. Et puis on constate qu'il y en a un par exemple comme 360 qu'on retrouve à toutes les lignes. Et puis il y en a, comme 48 qu'on retrouve seulement sur deux lignes mais pas sur les deux autres ou qu'y en a un comme 950 qu'on retrouve seulement sur une ligne et puis qu'il y en a un comme 207 sur deux lignes mais la 3 et la 9. » (classe faible)

L'enseignant reprend le détail du tableau, dans la classe faible alors qu'il ne s'intéresse qu'aux nombres qui vont faire le lien avec l'exercice suivant dans l'autre classe.

On retrouve tout au long du déroulement, de manière constante que l'enseignant dit plus de choses dans la classe faible. Il répète, redit la tâche à résoudre, il donne tous les exemples, multiplie les questions/réponses, questionne tous les élèves. Au fur et à mesure de la séance, il restitue systématiquement une histoire du travail fait en classe plus ou moins en relation avec les mathématiques abordées pour enrôler les élèves. Cette circulation du savoir différente peut engendrer des activités possibles éventuellement différentes : tout est dit aux élèves. De plus enrôler tout le monde et structurer le travail, récapituler de manière détaillée prend du temps dans la classe faible. Certaines phases du déroulement sont allongées et, par suite, d'autres abrégées.

On revient maintenant à la tâche précédente, le remplissage du tableau

Un déplacement de la tâche qui peut la réduire, une banalisation du vocabulaire utilisé

– Un déplacement de la tâche dans la classe faible peut la réduire

Ben S qui a envie de parler va venir s'occuper des 4 premiers... alors des 5 premiers, voilà, vous mettez le son aussi, d'accord ? »» (classe forte)

Donc vous nous remplissez le tableau et vous nous expliquez pourquoi. Pendant ce temps là je vérifie comment c'est fait. Bon alors quelqu'un va venir me remplir le tableau pour les uns 2, 3, 4, 5 premiers nombres, jusqu'à 48. Et quand vous avez mis un nombre quelque part dans le tableau ou à plusieurs endroits, vous le barrez, d'accord ? Alors en revanche pendant que K va nous remplir ça et bien je circule pour voir comment l'exercice est fait dans vos cahiers d'exercices. » » (classe faible)

Dans cet extrait on constate que l'enseignant introduit une tâche matérielle sans rapport avec la résolution de la tâche mathématique. Ce peut être dans un souci de simplifier la tâche des élèves mais ça peut aussi brouiller leur travail, ce qui a été le cas dans la séance analysée.

– Le vocabulaire est quelquefois peu mathématique

Un bilan de l'exercice plus général, plus mathématisé et plus partagé avec les élèves est fait dans l'une des classes alors que dans l'autre l'enseignant utilise un vocabulaire peu mathématique

« Bref on se rend compte que quand on donne un nombre on peut pas savoir, savoir avant d'essayer, ce qui va se passer. Y en a pour lesquels ça va marcher, y en a pour lesquels ça va pas marcher et c'est pas parce que ça marche pour 2 que ça marche pour 3. » (classe faible).

On ne retrouve rien de tel dans l'autre classe.

L'enseignant modifie souvent les tâches qu'il propose aux élèves (déplacement, découpage dans la classe faible ou au contraire ajout dans l'autre) et simplifie le vocabulaire qu'il met en oeuvre avec des commentaires plus ou moins mathématisés dans la classe faible. Cette circulation du savoir peut être renforcée par une certaine anticipation des difficultés des élèves qui semble justifiée par les erreurs effectives commises. Cependant les sociologues soulignent les dangers d'une simplification systématique qui limiterait les élèves à l'exécution d'une tâche matérielle au lieu de la résolution d'une tâche mathématique.

Un appui sur le travail des élèves différent selon leurs réactions

Des réactions d'élèves différentes « nécessitent » par exemple une correction plus ou moins longue et détaillée. Dans la classe faible, pour la tâche précédente, l'enseignant doit expliciter une correction complète avec justification détaillée du remplissage du tableau, pour le premier exercice car il n'a pas été réussi. La correction prend donc beaucoup de temps.

Donnons un deuxième exemple sur un exercice proposé plus tard dans la séance. Il s'agit d'effectuer des divisions et de les poursuivre après la virgule jusqu'à ce que la division s'arrête ou jusqu'à ce que vous deviniez la suite.

Dans la classe forte le professeur peut s'appuyer sur une élève Marjorie pour exposer la procédure de division d'un nombre à trois chiffres ici 118 par un nombre à deux chiffres, 66.

« Alors l'idée de Marjorie c'est de dire en 118 combien de fois 66 ou alors en 11 combien de fois 6 : ça va nous aider pour nous donner un ordre de grandeur du chiffre du quotient. »

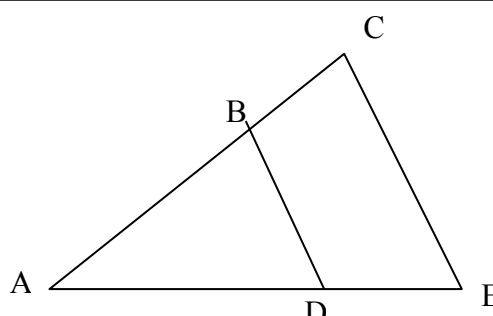
Il n'y a pas de Marjorie dans la classe faible et c'est l'enseignant qui expose cette procédure.

Nous avons comparé dans un premier temps un même enseignant dans deux classes différentes sur des contenus identiques et des déroulements analogues et non avons pu mettre en évidence que la circulation du savoir n'était pas la même. Nous allons maintenant comparer deux enseignants de troisième.

2. Deuxième exemple : deux classes de troisième, deux enseignants l'un en ZEP, l'autre en non ZEP

Les deux enseignants proposent aux élèves un exercice de géométrie demandant l'utilisation du théorème de Thalès et mélangeant les cadres algébrique et géométrique (introduction de x pour une longueur), dans un cotexte global analogue.

Énoncé de l'exercice proposé par l'enseignant de ZEP

	Le point B appartient au segment $[AC]$, le point D au segment $[AE]$ et les droites (BD) et (CE) sont parallèles. Les longueurs sont exprimées en centimètres. On donne $AB=x$; $BC=4,5$; $CE=8$ et $BD=5$ Calculer x.
---	---

Le premier enseignant en classe de ZEP pour enrôler et motiver les élèves ponctue leur travail initial, en autonomie, qui dure 12 min, de différentes remarques avant de donner une aide à fonction procédurale (utiliser le théorème de Thalès). On se rend compte qu'il ne s'agit que d'engager tous les élèves dans un travail d'abord géométrique puis algébrique, choix qui n'est pas immédiat pour tous. La possibilité d'émergence et d'interprétation des difficultés des élèves est favorisée.

Voilà quelques phrases de son discours :

Vous avez le droit à tout ce que vous voulez du moment que ça marche ...

Par élimination vous aurez pas tant de choix que ça ...

Qu'est ce que ça vous donne, comme point de départ ? Dites vous si j'avais pas x , qu'est ce que je ferais ?

....

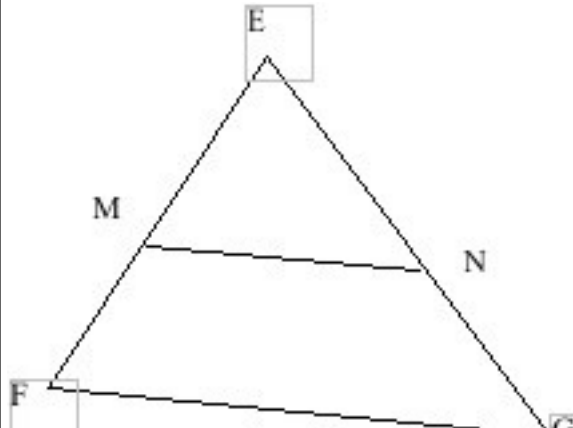
Pour le moment y deux points de départ différents y ceux qui sont partis sur une équation directement et y a ceux qui sont partis sur la géométrie ...

....

Au niveau géométrique, vous êtes partis sur quel théorème ? ...

Voilà parce qu'il y a des droites parallèles, donc on part sur Thalès ça paraît naturel hein. Et après vous faites ce que vous pouvez mais en attendant y a Thalès

Énoncé proposé par l'enseignant de la classe non ZEP

	EFG est un triangle tel que $EF = 5$, $EG = 7$, $FG = 9$ (l'unité est le cm). On prend un point M sur le segment $[EF]$ et on pose $EM = x$. Un point N est sur le segment $[EG]$ et tel que les droites (MN) et (FG) sont parallèles. Exprimer EN et MN en fonction de x.
---	---

L'enseignant de la classe non ZEP propose rapidement la recherche de la stratégie en ayant orienté elle-même un travail initial géométrique (figure). Il les familiarise, par des questions à l'intrusion du cadre algébrique dans un exercice de géométrie. Il donne de plus une place à l'oral collectif. Ainsi certains d'élèves peuvent démarrer au bout de 5 min 30 même s'ils n'ont pas été associés à la recherche de la stratégie.

Voici quelques phrases prononcées par l'enseignant :

Bon alors ceci dit vous faites une figure, donc je répète que vous pouvez la faire à main levée, enfin à main levée ou avec votre règle...,

Donc la situation est assez banale, hein, vu tout ce que l'on a fait, quelle est la seule nouveauté Bertrand ?

...

Alors avant de démarrer, qui est-ce qui me dit comment on va procéder ?

Le début me semble sans tellement de surprise..

...

Attends tu me dis la grande idée, tu vas rédiger convenablement sur le cahier.

...

Voilà on va appliquer le théorème de Thalès parce qu'on évidemment on a des droites ?...

Des droites parallèles. Alors la seule chose qui va être un petit peu différente de d'habitude, c'est que...

Y aura x. Bon alors vous démarrez, allez-y

Quelles différences dans la circulation du savoir avons-nous relevées dans ces deux séances ?

Des aides différentes amenant des activités diversifiées

On vient de voir que l'enseignant fournit une aide à fonction procédurale qui intervient au bout de 5 min 30 dans la classe non ZEP et après 12 min en ZEP.

Plus généralement, dans la classe ZEP (celle-ci et d'autres), le professeur attend longtemps avant de donner des aides permettant de démarrer. Tout se passe comme si il voulait que ces aides s'adressent à tous les élèves ayant tous travaillé. De ce fait, le temps qui reste pour un travail productif est minoré d'autant pour beaucoup. Les corrections sont données très rapidement. Peut-on faire autrement ?

Dans l'autre classe, les aides à fonction procédurale sont données rapidement laissant du temps avant la correction. Elles concernent des élèves qui de ce fait développeront des activités peut être *a minima* mais leur permettant de s'intégrer assez vite dans le travail.

La circulation du savoir organisée en ZEP par l'enseignant ménage beaucoup de temps pour un travail non aidé et peu de temps au travail entre la donnée de l'aide et la correction.

Dans l'autre cas, certains élèves ne sont pas associés à la recherche de la stratégie mais tous bénéficient d'un vrai temps de travail une fois l'aide donnée.

3. En guise de conclusion

On constate que dans les deux classes faibles l'adaptation de l'enseignant n'est pas la même, et qu'elle diffère de ce qui est proposé aux élèves des deux autres classes, notamment au niveau de choix fins (circulation du savoir) ; les activités mathématiques des élèves diffèrent en conséquence.

Retour sur la méthodologie

Ces exemples étant donnés, revenons rapidement sur la méthodologie correspondante (Chappet-Pariès et al. 2009, Chappet-Pariès 2009).

A partir des transcriptions et de l'analyse *a priori* des tâches nous faisons une première analyse des activités possibles des élèves grâce à la chronologie et au repérage du travail des élèves sur chaque tâche. Puis, pour caractériser systématiquement la circulation du savoir dans la classe, nous avons déterminé un certain nombre d'indicateurs s'appliquant au discours

de l'enseignant (transcrit) en relation avec ce qui peut influencer les activités des élèves (enrôlement, maintien dans le travail, repérage, aides et exploitation du travail, cohérence et suivi du projet...).

Par exemple, nous identifions dans le discours de l'enseignant ce qui peut aider les élèves soit à démarrer la résolution d'un exercice (fonction procédurale de l'aide) soit ce qui peut transformer leur travail en connaissance (fonction constructive de l'aide). Nous notons les phrases qui mutualisent, les phrases où l'enseignant donne des éléments de structuration, ou se place au niveau méta, les interprétations.

Il peut manquer certains indicateurs, liés au vocabulaire, à la logique élémentaire.

Comme à chaque fois qu'il y a codage, certaines décisions sont prises par le chercheur dans des cas où plusieurs interprétations se présentent, d'autant plus qu'il peut y avoir une incertitude. Car, bien entendu, cela dépend aussi des élèves. L'indication d'utiliser le théorème de Thalès dans la classe non ZEP peut avoir une portée constructive pour les élèves ayant déjà trouvé la stratégie ; les indications qui servent aux autres élèves pour appliquer le théorème leur permettent d'envisager la généralisation. Pour les autres élèves, on ne peut pas savoir si la portée de cette aide est seulement procédurale. Ainsi il reste à apprécier davantage les relations entre les activités a minima, a maxima, les aides de l'enseignant, peut-être en précisant ce qui est dans les têtes au moment où tout cela a lieu, en se référant au modèle de la Zone Proximale de Développement...

Quoi qu'il en soit, on vérifie que ces analyses ne peuvent être faites sans des analyses préalables de la tâche et des caractéristiques plus globales du déroulement (chronologie, découpage des tâches...).

III Quelques exemples d'analyse des relations entre pratiques enseignantes et apprentissages des élèves à partir de leurs productions. Méthodologie et résultats

Anne Dumail et Julie Horoks

L'étude présentée ici propose l'analyse de trois séries d'observations réalisées dans des classes de 3ème et 2nde, avec pour objectif de mesurer la portée de certains choix de l'enseignant en classe sur les apprentissages de ses élèves. En particulier, nous nous demandons si certains modes de travail (magistral ou individuel, en classe ou à la maison, avec ou sans intervention de l'enseignant), compte tenu des tâches proposées, sont bénéfiques pour tous les élèves de la même façon. Cependant, nous n'essayons pas de déterminer ici des pratiques "idéales" en terme d'efficacité par rapport aux apprentissages : nous essayons de tenir compte en effet des contraintes du métier pour interpréter les choix faits par les enseignants et leur portée sur les apprentissages des élèves, y compris de manière différenciée suivant leur niveau.

1. Méthodologie particulière

Partant de l'hypothèse que les apprentissages des élèves se font, au moins en partie, par leurs activités en classe, nous essayons de déterminer quelles ont pu être les activités des élèves sur une notion donnée (la racine carrée en classe de 3ème, les triangles semblables et la trigonométrie en classe de 2nde), et pour cela nous nous intéressons aux tâches proposées par l'enseignant et aux déroulements associés à la résolution de ces tâches.

Reconstitution des activités possibles des élèves sur une notion donnée

Nous avons choisi d'analyser l'ensemble de ce qui a été proposé en classe au cours d'un chapitre de mathématiques, et d'évaluer par la suite des apprentissages des élèves qui pourraient en découler, à l'issue du chapitre, par l'intermédiaire des contrôles posés en classe sur cette notion. Nous considérons qu'une réussite au contrôle est un témoin des apprentissages des élèves, mais nous savons que ce n'est qu'un témoin partiel, en particulier en ce qui concerne la pérennité des apprentissages observés².

Dans les trois études la démarche est la même : nous observons l'intégralité des séances portant sur la notion choisie, et en analysons l'ensemble des tâches au sein desquelles cette notion est travaillée pendant le chapitre. Cette analyse dépend des contenus, mais aussi des déroulements associés (et en particulier du travail des élèves et du discours de l'enseignant) qui nous permettent de déterminer toutes les activités possibles des élèves mettant en jeu cette notion – a minima et a maxima suivant l'implication des élèves.

En effet, une analyse des contenus des tâches mathématiques à elle seule ne nous permet pas de reconstituer ce qui est resté réellement à la charge des élèves lors de la résolution de chacune des tâches en classe compte tenu des interventions de l'enseignant. Dans le tableau 1 par exemple, nous pouvons voir à quel point les tâches sur lesquelles ont travaillé les élèves sont modifiées voire réduites par les diverses interventions de l'enseignant.

0'30	Introduction d'intermédiaires (angles égaux), Mélange avec autres connaissances (angles inscrits)	
0'30	Indication: associer les angles homologues	
0'30	Reconnaissance des hypothèses (homologues) Mélange avec une autre connaissance	
0'30	Indication : Mélange avec une autre connaissance	
1'30	Un élève donne une paire d'angles homologues, et l'enseignant en donne une deuxième	
0'30	Un élève donne le rappel de cours	
1'30	Travail prescrit par l'enseignant sur la connaissance ancienne	
4'	Un élève donne la réponse exacte, commentée par l'enseignant	

Interventions de l'enseignant
 Complexité de ce qui reste à faire par les élèves

clair = simple, isolée
foncé = complexe

Tableau 1 : reconstitution des activités possibles des élèves (triangles semblables)

Par exemple, on peut se demander si, lorsque l'enseignant fournit aux élèves une aide avant ou au début de la réalisation d'une tâche, cela ne va pas empêcher certaines élèves par la suite de réussir à résoudre seuls cette même tâche. Nous pouvons supposer aussi que ces choix n'auront pas le même impact sur les apprentissages, en fonction du niveau des élèves.

2 Nous ne nous sommes pas toujours donné ici les moyens de traiter la question de la durée dans les apprentissages : nous avons tenu compte de la durée uniquement dans le cas de la racine carrée, pour évaluer les apprentissages au fur et à mesure des séances et à plus long terme.

Analyse des résultats des élèves aux contrôles pour approcher leurs apprentissages

A la suite de l'analyse de l'ensemble des séances, une comparaison des tâches données lors du contrôle avec le travail précédemment effectué en classe, ainsi qu'une analyse statistique des résultats des élèves à ces contrôles, nous permettent de questionner l'influence de certains choix de l'enseignant sur la réussite des élèves. Cette comparaison, et l'interprétation des résultats des élèves, peut cependant s'avérer problématique, d'une part en fonction du niveau général de la classe, et d'autre part, étant donné l'écart plus ou moins grand entre la complexité de ce qui a été fait en classe et celle des tâches du contrôle (l'énoncé de celui-ci ayant été composé par l'enseignant, et non pas le chercheur). Comme on peut le voir dans le Tableau 2, dans lequel nous avons comparé la complexité des tâches réalisées en classe et en contrôle chez trois enseignants. Comment interpréter les résultats moins bons de la classe de Mme B, qui est de niveau plus faible que les deux autres classes, et dans laquelle les exercices du contrôles sont relativement complexes par rapport aux exercices traités en classe ? De même, les résultats de la classe de Mme F doivent être rapportés aussi à la simplicité des tâches posées lors du contrôle.

	Mme B	Mme P	Mme F
niveau de la classe	faible	moyen	fort
tâches à la charge des élèves en classe	simples	complexes	simples
tâche du contrôle	complexes	complexes	simples
résultats	mauvais	bons	bons

Tableau 2 : complexité des tâches en classe et en contrôle (triangles semblables)

Aussi il nous a fallu trouver des points d'appui, pour réaliser cette comparaison malgré ces différences. Nous avons choisi de regarder dans chaque cas les exercices les mieux (ou moins bien réussis) par les élèves lors du contrôle, et de les mettre en regard des activités préalables en classe. Nous nous sommes aussi posé la question de la différenciation suivant le niveau des élèves, en considérant lorsque cela était possible leur réussite suivant leur niveau en mathématiques, et la stabilité de ce niveau au cours du temps.

Les données recueillies dans chaque cas

Dans les trois analyses, des vidéos ont été réalisées pour chacune des séances du chapitre, chez des enseignants différents, qui nous ont fourni le texte des cours et des exercices proposés ainsi que des informations sur le niveau des élèves.

— La taille de ce qui est regardé

Le nombre d'enseignants filmés n'est pas le même dans chacune des études :

- Dans l'étude sur l'enseignement des triangles semblables en 2^{nde}, nous avons comparé trois classes³ dans des établissements différents et avec des élèves de niveaux différents. Un seul contrôle a été proposé dans chacune des classes.
- Dans le cas de la racine carrée en 3^{ème}, nous n'avons filmé qu'un seul enseignant, mais avons relevé trois évaluations des élèves, au fur et à mesure du chapitre.
- Enfin, pour la trigonométrie, nous avons filmé un enseignant, et avons relevé le seul contrôle proposé en fin de chapitre.

En dépit de ces disparités (ou grâce à elles) nous avons pu mettre en lumière des influences comparables de certains choix des enseignants sur les résultats des élèves.

3 Deux autres enseignants ont été observés par la suite, et les résultats de ces deux dernières analyses sont venus confirmer nos premières constatations.

– Des éléments propres aux mathématiques observées

L'analyse de la notion mathématique, mais aussi des programmes scolaires s'y rapportant, nous permet de réfléchir à ce qui peut être proposé en classe par les enseignants, et de quelle façon. Cela nous permet en particulier de remarquer des différences entre les choix faits par les enseignants observés, en terme de contenus, mais aussi des "manques" dans ce qui est proposé, par rapport au possible.

Certains éléments sont communs aux trois notions choisies, en particulier le mélange avec des connaissances plus anciennes.

- Le chapitre des triangles semblables présente l'occasion de réviser la géométrie du collège (les propriétés des configurations de base, les théorèmes de Thalès et Pythagore, les isométries), d'où un mélange, dans les exercices proposés, de la notion nouvelle avec d'autres plus anciennes.
- Dans le cas de la racine carrée, on trouve un mélange avec le travail sur les écritures littérales, déjà abordé précédemment au collège.
- En ce qui concerne la trigonométrie, des connaissances sur les nombres sont aussi en jeu, de même que des connaissances plus anciennes sur la trigonométrie du triangle rectangle.

Nous tiendrons compte de ces mélanges pour expliquer les erreurs des élèves, lorsqu'elles sont dues à l'ancien plus qu'au nouveau, et pour analyser la prise en compte de ce mélange par les enseignants.

– Des éléments spécifiques à chaque notion

- Une analyse des tâches des manuels sur les triangles semblables nous montre que le repérage des sommets homologues de ces triangles est une étape incontournable dans la plupart des exercices, pourtant rien n'est écrit à ce sujet dans les programmes, et pour cause : les mathématiques nécessaires pour justifier ou automatiser ce repérage ne sont pas disponibles⁴ en classe de 2^{nde}. Nous regarderons donc particulièrement comment la gestion de cette difficulté par l'enseignant est faite en classe. Cela nous amène aussi à prendre en compte la configuration géométrique dans nos analyses de tâches, puisqu'elle peut rendre plus complexe ce repérage, en particulier lorsque les deux triangles sont emboîtés l'un dans l'autre, et non, par exemple, en configuration de Thalès.
- Dans le cas de la racine carrée en troisième, les nombres s'écrivant avec des radicaux n'ont pas de statut précis : on fait travailler les élèves avec ces nombres alors même que rien ne permet à ce niveau de justifier ni leur existence, ni *a fortiori* les opérations sur eux. Certes, le chapitre intitulé « calcul avec les radicaux » prévoit de faire travailler les élèves dans la continuité, en prolongeant les règles de calcul connues jusqu'alors à ces « nouveaux nombres », mais ces derniers manquent de statut, on ne peut pas les situer parmi les nombres déjà connus puisqu'aucune formalisation sur les ensembles de nombres n'est prévue au collège. Nous verrons, qu'en pratique, les élèves calculent avec les radicaux « presque comme avec les x », dans un jeu permanent mais implicite entre cadre numérique et cadre algébrique. La question légitime que peut alors se poser un enseignant concerne la part à accorder au travail du sens par rapport au travail de la technique. Est-ce préjudiciable à la construction des connaissances mathématiques que les élèves calculent avec les racines carrées sans avoir vraiment compris qui elles sont ? Compte tenu du temps imparti, des orientations différentes envisagées par les élèves d'une même classe, des sujets proposés au brevet des collèges, quel « niveau de conceptualisation » sur la notion « racine carrée » est-il raisonnable et souhaitable d'atteindre en fin de collège ? Le peu de réponses apportées par les textes officiels laissent au professeur une liberté très grande dans l'organisation de

4 Conformément aux programmes de 2002.

son enseignement sur ce thème (Bronner 1997). Or, dans le cadre théorique choisi, les variables « tâches/déroulements » retenues pour reconstituer les activités mathématiques des élèves dépendent justement des choix de l'enseignant.

- L'enseignement de la trigonométrie en 2^{de} nous paraît comporter une difficulté dans la gestion des différents registres impliqués : la géométrie du triangle rectangle, le cercle trigonométrique, les courbes de fonctions trigonométriques. Il nous semble que le passage d'un registre à l'autre n'est pas évident, et nous nous demandons donc comment ce passage est pris en charge par l'enseignant en classe, et combien de ces registres sont mobilisés par les élèves lors de la réalisation d'une tâche lors du contrôle.

Nous allons illustrer par trois exemples comment nos outils nous permettent de rapprocher les apprentissages des élèves de ce qui a été proposé par l'enseignant en classe.

2. Trois exemples d'application de la méthodologie et premiers résultats

Le cas des triangles semblables : les élèves apprennent... ce qu'on leur apprend

Nous analysons un exercice tiré de l'un des contrôles relevés dans les classes, et faisons la comparaison avec l'ensemble de ce qui a été proposé en classe auparavant. Nous nous intéressons ici à l'énoncé de l'exercice de contrôle suivant, donné dans l'une des trois classes observées :

On considère un cercle (C) et MNP un triangle inscrit dans ce cercle. La bissectrice de l'angle NMP coupe [NP] en D et (C) en E.

- 1) Démontrer que le triangle MNE et le triangle END sont semblables.
- 2) En déduire que $EN^2 = EM \times ED$

Pour résoudre cet exercice, il faut tout d'abord démontrer que les deux triangles ont deux angles égaux, à l'aide des angles opposés par le sommet d'une part, et du théorème de l'angle inscrit d'autre part. D'après la propriété D (deux triangles ayant deux angles respectivement égaux sont semblables), les deux triangles sont donc semblables. Par la propriété P (deux triangles semblables ont des côtés proportionnels), on déduit que les côtés des triangles sont proportionnels, et après repérage des sommets homologues, on obtient $MP / BP = PA / PN$, et l'égalité recherchée.

Ce n'est pas une tâche simple, puisqu'elle implique plusieurs connaissances mathématiques et nécessite l'introduction d'intermédiaires. L'exercice fait appel aux propriétés D et P, et ce sont donc parmi les tâches mettant en jeu ces deux propriétés que nous allons chercher celles qui ressemblent le plus à l'exercice posé lors du contrôle.

Grâce à la comparaison de cet exercice de contrôle avec tous les exercices donnés au cours de ce chapitre, mettant en jeu successivement les connaissances nouvelles D et P, nous pouvons voir (cf. *Tableau 3*) que trois exercices ont été proposés mettant en jeu ces deux propriétés, et que parmi eux, un exercice semble se rapprocher plus que les autres de l'exercice du contrôle, en regard des variables d'analyse des tâches que nous avons retenues. L'exercice 9 porte en effet sur les mêmes connaissances mathématiques, associées aux mêmes connaissances anciennes. Dans les deux cas, la configuration travaillée est un cercle, mais pour l'exercice fait en classe, la configuration est un peu moins complexe, car les triangles semblables ne sont pas emboîtés. Cet exercice a donc pu préparer les élèves à cette question, mais bien entendu, tout ce qui a été donné auparavant a pu préparer les élèves au contrôle.

	Configurat ion	Connaissances		NMF	Type de travail en classe	Types d'aides
		anciennes	nouvelle			
Ex. du contrôle	Cercle, triangles emboîtés	Angle inscrit	D	Calcul d'intermédiaires		
		Algèbre sans x	P	Reconnaissance des modalités d'application		
Ex. 7	2 triangles	Égalité d'angles	D	Reconnaissance des modalités d'application	Pas de temps de recherche	Sur méthode et ancien
		Algèbre sans x	P	Reconnaissance des modalités d'application		
Ex. 9	Cercle	Angle inscrit	D	Reconnaissance des modalités d'application	Module Long temps de recherche	Individuelles
		Algèbre sans x	P	Calcul d'intermédiaires		
Ex. 11	Cercle	Triangle rectangle	D	Introduction d'étapes	Module Long temps de recherche	Individuelles
		Algèbre	P	Reconnaissance des modalités d'application		

Tableau 3 : comparaison des tâches en classe et en contrôle (triangles semblables)

D'après les résultats des élèves pour cet exercice, nous pouvons voir que la seconde question (l'application de P) a été beaucoup mieux réussie que la première. Cette deuxième question avait été préparée par une adaptation⁵ plus difficile que celle attendue au contrôle, dans le cadre de l'exercice 9. Il semblerait ici que la plupart des élèves ne réussissent pas une application plus complexe lors du contrôle, s'ils n'ont pas été amenés à travailler auparavant en classe cette adaptation de leurs connaissances avec un niveau de fonctionnement égal ou supérieur. Dans le cas de ces deux questions tirées du contrôle, les élèves avaient bénéficié d'un long temps de recherche individuelle en classe, ce qui, pour réussir la première question, semble globalement n'avoir été bénéfique qu'à une minorité des élèves⁶.

D'autre part, si on regarde les procédures des élèves pour résoudre la deuxième question sans avoir traité la première, on constate que beaucoup n'ont pas su repérer les sommets homologues des triangles semblables, et qu'ils sont alors souvent partis du résultat à obtenir (le rapport des longueurs) pour réaliser cette association.

contrôle	question 1	question 2
exercices similaires en classe	3 exercices	3 exercices
configuration	la même qu'en classe	la même qu'en classe
notions anciennes	les mêmes qu'en classe	les mêmes qu'en classe
notion nouvelle	identique application de D	identique application de P
NMF contrôle / classe	plus difficile	plus facile
type de travail	long temps de recherche	long temps de recherche
application correcte / abordé	10 / 25	23 / 25

Tableau 4 : résultats des élèves à l'exercice 3 du contrôle (triangles semblables)

5 Nous parlons d'adaptation lorsque la connaissance du cours à appliquer nécessite au préalable une reconnaissance des modalités d'application, voire un calcul d'intermédiaires, l'introduction d'étapes dans la démarche, ou encore la nécessité de faire des choix ou de changer de registre. Nous considérons différents niveaux de mise en fonctionnement de cette connaissance (notés NMF dans les tableaux), classés ainsi suivant un ordre de difficulté croissant selon nous, et qui nous permettent de décrire la complexité de la tâche considérée.

6 Ici un partage de la classe en deux groupes de niveau (à partir des informations données par l'enseignant) nous permet de constater que les seuls élèves ayant réussi cette première question se trouvent dans le groupe des meilleurs élèves.

Cette analyse et la mise en relation avec les activités en classe ont été réalisées pour chaque tâche de chacun des contrôles, et c'est la comparaison des résultats obtenus dans les trois classes, parallèlement à l'analyse des déroulements des exercices qui avaient pu préparer les élèves à ces contrôles, qui nous a permis de mettre en lumière des liens entre pratiques et apprentissages.

Le cas de la racine carrée : des pratiques plus ou moins différenciatrices

– *Une classification des tâches pour faciliter l'analyse de ce qui s'est passé en classe.*

Nous avons filmé un enseignant de 3ème dans sa classe, et relevé les trois évaluations des élèves portant (entre autre) sur la racine carrée : une interrogation en cours de chapitre, un contrôle de fin de chapitre, et un brevet blanc après la fin du chapitre. Le nombre total de tâches proposées dans le chapitre sur la racine est carrée est beaucoup plus important que dans l'étude précédente, d'où notre choix d'isoler 3 tâches particulières pour mettre en valeur leur fréquence en classe et en évaluation, regarder l'évolution des résultats des élèves sur ce type de tâches à plus ou moins long terme, en distinguant les caractères outil/objet de la notion dans chaque tâche.

Nous nous intéressons ici pour illustrer notre démarche à la *tâche 1* : "*mettre sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers et b le plus petit possible*". Nous analysons la présence de cette tâche dans tous les énoncés proposés. La *tâche 1* est presque toujours prescrite uniquement dans le cadre numérique :

- en classe : la *tâche 1* est toujours objet de l'exercice dans lequel elle intervient. On la retrouve au total dans 11 exercices pour 85 écritures à transformer, dont 72 s'écrivent sous la forme $a\sqrt{b}$. Sur les 31 expressions du même type (somme algébrique de radicaux) transformées en classe, 25 donnent un résultat sous la forme ab , 2 donnent un résultat littéral qui s'écrit sans radical, 4 donnent des résultats de formes différentes : $a+bc$, $ab+cd$ ou $ab+cd+e$. L'enseignante renvoie systématiquement pour cette tâche à la méthode vue dans la leçon (avec une présentation en 2 colonnes pour décomposer le radicande en nombres premiers) mais jamais justifiée. A plusieurs reprises, elle encourage cette méthode car elle permet « à coup sur d'arriver au résultat » et déconseille de « tenter d'autres décompositions ».
- en évaluation : la *tâche 1* est parfois objet de l'exercice (dans l'exercice 2 de l'interrogation, dans l'exercice 1 du contrôle et dans l'exercice 1 du brevet blanc), parfois outil pour résoudre l'exercice (dans les exercices 1,3, 4 et 5 de l'interrogation).

En plus des variables des adaptations décrites dans le premier exemple, nous avons complété notre comparaison en prenant en compte les différentes formes de la consigne (« calculer », « transformer », « écrire le plus simplement possible », « écrire sans radical », « mettre sous la forme de... »), celles de l'expression donnée dans la consigne, les transformations à réaliser, et enfin la forme et la nature du résultat obtenu.

– *Pour interpréter les résultats : prise en compte du niveau des élèves*

Nous avons réalisé une classification ponctuelle des élèves, établie à partir d'une observation initiale : les réponses, dans nos 3 paquets de copies, aux 17 questions portant sur les racines carrées : 13 élèves ont donné entre 9 et 17 bonnes réponses (groupe B, les "bons élèves"), 13 élèves ont donné entre 0 et 8 bonnes réponses (groupe A, les "moins bons élèves"). Cette classification nous permet de relier les résultats des élèves aux pratiques de l'enseignant, suivant leur niveau, mais aussi de regarder la stabilité de ce niveau, sur chaque type de tâche, tout au long du chapitre.

– Un exemple d'analyse détaillée pour un exercice d'évaluation comportant la tâche 1

La tâche 1 était un outil pour résoudre l'exercice 4 de l'interrogation. L'expression donnée dans la consigne est presque semblable à celles transformées en classe avec la consigne « simplifier » ou « mettre sous la forme ab ». Les résultats des élèves, suivant leur niveau, sont consignés dans le *Tableau 5*.

Prouver que A est un nombre entier sachant que $A = \sqrt{8} \times \sqrt{2} - 2\sqrt{75} + 5\sqrt{12}$.

$A = \dots$

		groupe A (13 présents)	groupe B (13 présents)
exercice non abordé		1	5
exercice réussi		8	2
exercice avec des erreurs	essais justes non aboutis	2	3
	transformations avec erreur(s)	2	3

Tableau 5 : résultats des élèves à un exercice de l'interrogation portant sur la tâche 1

Cette expression ressemble à celles travaillées en classe, à un détail près : son premier terme « $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$ ». C'est donc ce calcul-là que nous allons regarder en priorité sur les copies des élèves. Nous avons distingué deux stratégies possibles pour transformer le produit :

- S1 : utilisation de la propriété du produit de racines carrées: $\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$

- S2 : utilisation de la racine carrée d'un produit et du produit des racines

$$\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{(4 \times 2)} \times \sqrt{2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4 \times (\sqrt{2})^2 = 2 \times 2 = 4$$

En regardant le lien entre la stratégie employée et la réussite à cette question de l'interrogation (*Tableau 6*), nous constatons que globalement, les élèves du groupe A choisissent plutôt la stratégie S1 et ils réussissent, et ceux du groupe B choisissent plutôt la stratégie S2 et ils échouent.

	stratégie	groupe A	groupe B	nombre total d'élèves
élèves ayant réussi	S1	7	2	9
	S2	1	0	1
élèves ayant fait des essais justes non aboutis	S1	2	0	2
	S2	0	2	2
	indéterminée	0	1	1
élèves ayant transformé A avec des erreurs	S1	1	0	1
	S2	1	1	2
	indéterminée	0	2	2

Tableau 6 : lien entre stratégie et réussite à un exercice de l'interrogation

Il semble que le choix de la stratégie conditionne ici la réussite, avec cependant une restriction : ce sont les élèves du groupe A qui choisissent S1 mais réussissent-ils parce qu'ils ont choisi cette stratégie ou pour d'autres raisons qui les font appartenir à ce groupe ? (ce sont des « bons » élèves, qui ont répondu correctement à plus de la moitié des questions). Nous pouvons ainsi nous demander si, en ayant imposé la stratégie S2 à ces mêmes élèves, ils n'auraient pas encore réussi. Le choix de S1 ne serait alors ici que le signe d'une capacité d'anticipation, d'une « vision » des calculs plus simples à effectuer, d'une possibilité de se dégager des effets de contrat : les élèves du groupe A se rendraient tout de suite compte que « $8 \times 2 = 16 = 4^2$ » tandis que ceux du groupe B resteraient dépendants des méthodes de transfor-

mation du type *tâche 1* (répétées de nombreuses fois en classe, et fortement suggérées comme étant la bonne méthode pour arriver au résultat) et cherchent avant tout à décomposer le radicande 8 en nombres premiers, comme dans la leçon.

Ainsi, dans cet exercice, le bénéfice des nombreuses transformations effectuées en classe n'est plus si évident : au contraire, les élèves doivent être capables de se détacher de ce qui a été fait en classe, d'oublier les règles du contrat implicite construit entre eux et leur professeur (« on décompose en premier le radicande », « on va obtenir un résultat sous la forme ab ») pour réussir. Et pour cela, les répétitions importantes de la même tâche, avec les mêmes niveaux de mises en fonctionnement en classe, peuvent devenir des handicaps.

Le cas de la trigonométrie : l'importance des liens faits par l'enseignant

Dans ce dernier exemple, nous analysons la prise en compte de plusieurs registres convoqués lors d'un ensemble de séances sur la trigonométrie en 2^{de} :

- la géométrie du triangle rectangle, vue en 3^{ème}, dans laquelle sont introduits le cosinus et le sinus d'un angle
- le cercle trigonométrique, sur lequel on lit la valeur du cosinus et du sinus d'un angle, représenté par un point sur le cercle
- et les courbes de fonctions cosinus et sinus, généralement tracées dans un même repère.

Il nous semble en effet que les objets en question ici (les angles, leur sinus et leur cosinus) ont des représentations qui varient en fonction du registre choisi (cf. *Tableau 7*), et que cela peut entraîner des confusions pour les élèves.

	dans le triangle	dans le cercle	dans le graphique
angle	géométrique	point du cercle	abscisse
cosinus	rapport de deux longueurs	abscisse	ordonnée
sinus	rapport de deux longueurs	ordonnée	ordonnée

Tableau 7 : objets étudiés dans les différents registres.

Nous avons regardé comment, en classe, l'enseignant reliait les différents registres et constate chez l'enseignant observé que ces registres étaient juxtaposés, dans le discours de l'enseignant et dans les tâches proposées, sans que le passage de l'un à l'autre soit jamais pris en charge par les élèves tout au long du chapitre.

Par la suite, lors du contrôle posé en fin de chapitre, nous regardons comment les élèves maîtrisent ces différents registres, et s'ils sont capables d'en mobiliser plusieurs, en fonction de leur pertinence pour répondre aux questions posées⁷. Nous constatons que seuls 7 élèves sur 33 mobilisent à la fois le registre du cercle trigonométrique et celui des courbes des deux fonctions, dans les exercices du contrôle⁸. Parmi ces 7 élèves, 5 sont des élèves dont le niveau en mathématiques est bon (et qui réussissent le contrôle), et un autre prend des cours particuliers en mathématiques.

⁷ Par exemple, lorsqu'on recherche l'ensemble des réels pour lesquels le cosinus prend une valeur donnée, le registre du cercle trigonométrique peut paraître plus approprié que celui des courbes de fonctions trigonométriques (qui sont plus longues et plus difficiles à tracer).

⁸ Dans le contrôle, le registre graphique était imposé par le 1^{er} exercice où une partie des courbes était représentée, mais dans les exercices suivants, c'était le registre du cercle qui semblait plus efficace pour résoudre les problèmes posés.

3. Résultats et discussion

Nous déclinons les résultats obtenus à l'issue de ces trois études en termes d'effets⁹.

Des effets de certains choix de contenu et de déroulement sur les réussites des élèves au(x) contrôle(s)

– La répétition des tâches semble avoir un effet positif sur les résultats des élèves

En comparant les contrôles sur les triangles semblables dans les trois classes considérées, nous constatons que dans chacune des trois classes l'exercice de contrôle le mieux réussi est associé à une préparation préalable en classe, à travers des applications plus difficiles ou de même difficulté que celle du contrôle, et parfois même à travers une répétition d'applications similaires. Dans les trois cas, il s'agissait d'un exercice nécessitant l'application de D qui est la propriété qui a été travaillée le plus souvent dans les classes. C'est aussi celle que l'on retrouve le plus fréquemment dans les exercices des manuels. Enfin, dans les trois cas, l'exercice en classe qui se rapproche le plus de celui du contrôle a été réalisé dans des conditions où l'élève peut bénéficier d'un certain temps de travail individuel (travail en module ou à la maison).

Il semble donc que les élèves sont capables de réaliser seuls certaines tâches lorsqu'ils y ont été réellement confrontés au préalable, et qu'ils ont eu à les travailler par eux-mêmes, alors qu'elles étaient associées aux mêmes connaissances et dans des configurations similaires à celles du contrôle. Nous remarquons par ailleurs que lorsque le travail préalable en classe n'est pas aussi difficile que celui qui est attendu au contrôle, les élèves échouent au contrôle de manière significative, et ce quelle que soit la forme de travail adoptée en classe. Cela semblerait indiquer que les connaissances des élèves ne sont pas transférables à des niveaux de mise en fonctionnement plus élevés.

– Mais dans certains cas, la répétition des tâches semble avoir un effet bloquant sur les procédures des élèves !

Nous pouvons faire l'hypothèse dans le cas de la racine carrée, que la répétition d'une même tâche en classe accroît encore la réussite lors des évaluations, toujours à la condition que la tâche proposée nécessite les mêmes adaptations. Dans le cas contraire, si les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances varient, avoir répété la tâche à de nombreuses reprises n'est d'aucun recours pour surmonter les difficultés posées par les nouvelles adaptations nécessaires. Et il arrive même que l'effet inverse se produise et que les répétitions, en plus d'être inefficaces, soient nuisibles à la réussite de certains exercices. Ainsi, certaines productions d'élèves laissent penser que la répétition de la tâche 1 en classe a pu être un obstacle à la réussite en devoir. Les élèves, conditionnés par le contrat entre eux et l'enseignante, contrat implicite mais très fort qui demande d'écrire toute expression avec des radicaux sous la forme ab , sont désarçonnés quand cette transformation s'avère impossible. Ils ne parviennent pas à se détacher des habitudes prises et leurs tentatives de décomposition sous les radicaux (avec la présentation en deux colonnes vue dans la leçon associée) attestent de leur volonté de se ramener au cas qu'ils ont tant de fois traité.

– Les interventions de l'enseignant "réduisent" souvent l'autonomie des élèves et donc les activités possibles

⁹ Quitte à nous répéter ! Si l'étude des effets des répétitions fréquentes de tâches nous apporte des résultats en lien direct avec les apprentissages des élèves, une analyse plus poussée montre aussi des effets différenciateurs et sur le plus long terme.

Dans le cas de la racine carrée, les interventions automatisent systématiquement les procédures des élèves. Ainsi, pour la tâche 1, l'enseignant renvoie toujours à la « technique » vue dans la leçon (jamais justifiée) car elle « permet à coup sûr d'arriver au résultat » et déconseille de « tenter d'autres décompositions », et nous avons vu que cela entraînait un échec à certaines questions des évaluations.

Dans le cas des triangles semblables, les exercices de contrôle qui ont posé plus de difficultés aux élèves portent sur des applications de propriétés différentes. Mais il s'agissait dans les trois cas de questions qui nécessitaient un repérage non trivial des homologues de la figure. Cette difficulté avérée pour les élèves n'est pas liée uniquement à l'organisation du travail en classe par le professeur, mais il s'agit tout de même d'un élément important de ses choix : nous constatons que les trois professeurs n'ont pas proposé de travail spécifique sur ce repérage, et qu'ils ont laissé peu d'autonomie aux élèves sur cette tâche en classe, en prenant rapidement en charge cette étape, à travers les énoncés ou déroulement choisis¹⁰. Cela semble avoir une influence négative sur la réussite à cette tâche de repérage par la suite. Dans ce cas, le manque d'initiative qui est laissé aux élèves peut s'expliquer à travers les programmes et le manque de mathématiques à proposer aux élèves pour installer une automatisation et une justification du repérage.

Des effets différenciateurs des pratiques suivant le niveau des élèves

– Répétition des tâches : un travail trop cadré qui désavantage particulièrement les moins bons élèves

Notre étude sur la racine carrée semble montrer que la répétition des tâches est très différenciatrice suivant le niveau des élèves. La répétition semble en effet faire obstacle surtout pour les élèves plus faibles. Dans les cas d'exercices d'évaluation où le niveau de mise en fonctionnement est plus élevé, et où la méthode répétée en classe s'avère inefficace, seuls quelques élèves du groupe A, cependant, en minorité, surmontent alors le réflexe de la méthode habituelle et réussissent. La majorité d'entre eux laissent leur réponse inachevée, réalisant le caractère impossible de leur démarche mais n'arrivant pas, la plupart du temps, à en envisager une autre. Les élèves du groupe B, eux, sont souvent amenés à écrire des assertions fausses : ils font davantage confiance pour valider leur réponse aux habitudes prises qu'aux mathématiques et « s'arrangent » pour parvenir à un résultat qui leur convienne. Tout se passe ainsi comme si, pour appartenir au groupe A et mieux encore réussir à adapter les connaissances différemment de ce qui a été fait auparavant, il fallait paradoxalement pouvoir « oublier » les méthodes apprises en classe, garder l'esprit ouvert aux initiatives, faire preuve d'une capacité d'anticipation des calculs. Or, ces conditions paraissent difficilement compatibles avec l'application systématique d'une démarche dont les étapes sont à l'avance figées et n'ont pas ou peu été justifiées.

– Autonomie laissée aux élèves : un travail moins cadré qui avantage les bons élèves

En ce qui concerne les triangles semblables, nous avons cherché ce qui caractérisait l'exercice de chacun des trois contrôles pour lequel les élèves avaient obtenu les résultats les moins homogènes dans chaque classe, c'est à dire ceux pour lesquels il y avait une différence notable entre les réponses des "bons" et des "mauvais" élèves, tels que nous les avons classés, à partir des appréciations données par les enseignants. Dans chaque cas, il s'agit d'un exercice qui a été préparé uniquement à travers des activités laissant une plus grande autonomie aux élèves : lors d'un travail à la maison, ou en classe, mais surtout sans intervention du professeur pen -

¹⁰ Dans certaines des classes observées, les enseignants vont jusqu'à donner les sommets des deux triangles dans le "bon ordre", pour contourner la difficulté du repérage. Les élèves de ces classes ne sont pas capables de prendre en charge cette tâche lors du contrôle lorsque les sommets sont donnés dans le désordre.

dant, ou après l'activité. Cela semblerait indiquer que le travail autonome des élèves n'est pas bénéfique de la même façon pour tous les élèves, et cela rejoint les résultats obtenus par Félix (2004).

Des effets des pratiques à plus ou moins long terme

Nous nous étions demandé dans l'étude sur la racine carrée quel était le rôle du facteur temps dans l'acquisition des connaissances, et nous étions donné les moyens de prendre en compte ce facteur en considérant plusieurs évaluations au cours du temps. Au regard de nos analyses, il n'y a pas d'évolution majeure sur le court, moyen ou long terme : ceux qui réussissaient/échouaient à court terme réussissent/échouent encore à moyen et à long terme.

Cependant, nous avons observé au cours de notre étude quelques phénomènes particuliers intéressants. Si les erreurs persistent, leurs causes évoluent, elles, au cours du temps : d'erreurs identifiées spécifiques dans la mise en fonctionnement des connaissances nouvelles à court terme, on passe à moyen et surtout à long terme, à une grande proportion d'abstention (ou, dans une moindre proportion, à des erreurs plus difficilement identifiables). Certains élèves n'essaient même plus : soit ils savent « en automate », soit ils ne savent pas. Bien que nous n'ayons pas accès à leurs brouillons, il semblerait que la phase de recherche soit très réduite voire inexistante. Or les interventions découragent les démarches du type « essais/erreurs », les initiatives permettant d'arriver plus vite ou de façon plus astucieuse au même résultat. Il semble raisonnable de faire alors l'hypothèse d'un lien entre l'automatisation systématique recherchée des tâches, reposant au moins autant sur la mémoire que sur une réelle compréhension des étapes, et l'évolution constatée à long terme vers un nombre croissant d'erreurs et de questions non abordées. Ainsi, pour la tâche 1, les élèves du groupe B progressent entre l'interrogation et le contrôle, très proche dans le temps de ce qui a été fait en classe, mais obtiennent de moins bons résultats lors du brevet blanc, alors que les adaptations y sont clairement plus simples.

Cela nous amène à nous poser une nouvelle question : si une connaissance semblait acquise à un moment donnée mais ne l'est plus deux mois plus tard, qu'a-t-on approché grâce au contrôle : les apprentissages ou les qualités de mémorisation à court terme des élèves ? Nous pouvons peut-être parler ici de « connaissances fragiles », de « pré-connaissances » ou encore d'« apprentissages transitoires » qu'il faudrait « transformer », pour qu'elles trouvent leur place, consolidées, dans un réseau plus large de connaissances.

Des effets du discours de l'enseignant en classe : l'importance des liens

– liens entre plusieurs registres

Dans le cas de la trigonométrie, la juxtaposition de plusieurs registres par l'enseignant sans explication ne semble pas permettre aux élèves de passer de façon autonome d'un registre à l'autre en contrôle. Cela peut être mis en relation avec la difficulté connue des élèves pour mélanger leurs connaissances et l'adoption au moins transitoire d'un seul domaine de travail privilégié, mais s'il est moins économique. Non seulement les explications de l'enseignant sont nécessaires, mais aussi faut-il sans doute suffisamment d'exercices où l'expérience du mélange peut être faite.

– liens entre connaissances anciennes et nouvelles

Nous avons examiné le rôle des connaissances anciennes dans les réussites et échecs constatés des élèves, en particulier en ce qui concerne la question des ensembles de nombres et celle du calcul algébrique.

Le symbole $\sqrt{}$, tel qu'il a été vu en classe de 4ème sur la calculatrice, privilégie l'aspect transformation (on prend la racine carrée d'un nombre). Et cette première approche peut inciter les élèves à considérer qu'un nombre s'écrivant avec un radical n'est pas un résultat mais plutôt une étape dans une suite de transformations d'écritures. Dans ce que nous avons observé, ceci ne semble pas faire obstacle à la réussite des exercices présentés dans le cadre numérique. Par contre, dans le cadre géométrique, des difficultés apparaissent : problème pour donner une longueur de segment avec un radical, questions liées aux valeurs exactes ou approchées à utiliser dans les calculs intermédiaires pour avoir un résultat final exact, attestent des difficultés à considérer $\sqrt{2}$, par exemple, comme un nombre « comme les autres ». Et rien dans les programmes n'est véritablement proposé pour remédier à cela. De plus, dans la gestion des calculs, les élèves travaillent avec les racines carrées presque comme ils avaient l'habitude de le faire jusque là avec les « x » : on peut faire l'hypothèse que ceci n'aide pas les élèves à considérer comme des nombres. Nous en venons alors à la question du jeu implicite entre cadre numérique et cadre algébrique : ce sont les connaissances anciennes apprises dans un cadre algébrique, souvent dans les chapitres traitant du calcul littéral, qu'il faut utiliser ici pour calculer correctement avec les racines carrées. Nous avons qualifié dans notre étude le cadre associé de « pseudo-algébrique » (pas de lettres mais une gestion des calculs comme s'il y en avait).

Cependant, ce ne sont pas strictement des connaissances anciennes puisqu'elles ont été vues pour des nombres autres que les racines carrées : il faut donc prolonger à cette nouvelle catégorie de nombres s'écrivant avec des radicaux, non identifiée précisément, les conventions, le formalisme algébrique, la distributivité de l'addition sur la multiplication, la commutativité et l'associativité de ces opérations, les identités remarquables... C'est en effet quand il faut faire face à cette adaptation que les erreurs sont les plus nombreuses : en particulier, la ré-explicitation du signe « fois » supprimé est source de nombreuses difficultés. Les copies attestent, dans les calculs avec les radicaux, de confusions fréquentes entre addition et multiplication. Cependant, même si elles sont moins nombreuses, ces difficultés persistent si on demande dans le même exercice à ces élèves de travailler avec des nombres sans radical. Ce sont ces observations qui nous poussent à qualifier la notion « racine carrée » davantage de « révélatrice de difficultés » que de « créatrice de difficultés ». Le problème se situerait à une échelle plus grande, dans le jeu permanent mais implicite entre cadre numérique et algébrique au sein duquel on fait travailler les élèves au collège.

4. Conclusion partielle

Nous avons exposé ici la mise au point de moyens de recherche, dans le cadrage théorique partagé, permettant d'analyser les relations entre les activités possibles des élèves, déduites de ce que propose le professeur en classe (choix de contenu et de déroulement, plus ou moins fin) et leurs réussites à un ou plusieurs contrôles, pour approcher leurs apprentissages mathématiques. Dans tous les cas et malgré des recueils de données légèrement différents, avec des enseignants différents, des notions différentes, des niveaux de classes et d'élèves différents, nous avons pu mettre en évidence des liens similaires entre les pratiques enseignantes et les apprentissages des élèves, et ce sans que le chercheur ait influé *a priori* sur les pratiques des enseignants observés. Les résultats trouvés s'inscrivent dans les hypothèses générales de notre étude globale, et peuvent contribuer à les préciser.

IV Le cas de la symétrie axiale dans deux sixièmes contrastées : déroulements et circulation du savoir, activités et liens avec les productions des élèves en contrôle

A. Chesnais

1. Introduction

Nous présentons ici la comparaison fine des déroulements dans deux classes de sixième très contrastées (une sixième ordinaire et une sixième d'établissement défavorisé) sur un même exercice et l'épisode de cours qui suit. Nous mettons aussi en parallèle ces analyses avec les productions des élèves en contrôles. Le but est à la fois d'illustrer l'utilisation du cadre et des outils d'analyse présentés précédemment, et d'exposer un certain nombre de résultats à propos des deux classes concernées. Les données et les analyses présentées ici ne sont qu'un extrait d'un travail qui a porté sur l'ensemble du chapitre dans les deux classes (Chesnais 2009), ce qui justifie d'évoquer des résultats malgré la taille très restreinte du corpus retenu ici.

L'étude concerne deux enseignants, dont l'une – Martine – exerce dans un établissement ordinaire et l'autre – Denis – dans un établissement classé ZEP/Ambition réussite. Les taux moyens de réussite en mathématiques pour les évaluations d'entrée en sixième constituent un indicateur¹¹ de la différence entre les deux établissements : la moyenne nationale est environ 65 % et le taux moyen de réussite pour les établissements classés ZEP au niveau national est environ 55 % quand la moyenne dans l'établissement de Martine est environ 74 % pour à peine 50 % dans celui de Denis. Les deux enseignants sont expérimentés (plus de 5 ans d'expérience tous les deux, Martine étant plus âgée) sans être experts (aucun des deux ne présente d'intérêt particulier pour des lectures ou des recherches sur l'enseignement, n'est conseiller pédagogique ou autre).

Notre étude a porté sur le chapitre concernant la symétrie axiale en sixième. Dans les deux classes, il s'est déroulé entre les mois de mars et mai. Une analyse épistémologique de la notion couplée à une analyse des programmes permet de mettre en évidence un certain nombre d'éléments susceptibles d'influer sur son enseignement et son apprentissage. Nous n'en retenons, pour l'étude du corpus qui va suivre, qu'un seul : cette notion est au cœur de l'enjeu en sixième de l'initiation du passage d'une géométrie perceptive et instrumentée à une géométrie s'appuyant sur les propriétés des configurations géométriques (cf. les paradigmes géométriques, Houdement et Kuzniak, 2000). Notons toutefois que cette initiation, notamment au raisonnement déductif, est l'affaire de toute l'année en sixième – voire au-delà.

Dans les deux classes, les enseignants ont suivi quasiment le même scénario pour l'ensemble du chapitre, c'est-à-dire que les exercices traités par les élèves, leur organisation ainsi que les énoncés de cours étaient identiques à quelques détails près. Cela résultait d'un dispositif particulier que nous n'évoquerons pas davantage ici (Chesnais 2009). Les analyses que nous présentons ci-dessous portent sur un exercice et l'épisode de cours qui a suivi, durant la deuxième séance consacrée à la symétrie axiale. Lors de la première séance a été traité un exercice permettant d'introduire¹² la symétrie axiale comme transformation (parmi d'autres, évoquées par le mouvement que l'on doit donner à un calque pour passer d'une figure à une autre) associée à un pliage et un retournement. A l'issue du travail sur cet exercice a été institutionnalisée la définition de deux figures symétriques par rapport à un axe comme étant

11 Aussi imparfait soit-il. Les taux de réussite aux évaluations d'entrée en sixième en français et le taux de réussite au brevet dans les deux établissements sont concordants avec cet indicateur.

12 Il s'agit en fait de réintroduire la symétrie axiale en sixième, puisqu'elle a déjà été étudiée par les élèves à l'école primaire.

superposables par pliage le long de cet axe. Enfin, deux exercices d'application ont été traités à la fin de la séance, consistant essentiellement à identifier de manière perceptive des figures symétriques ou non.

2. Analyse *a priori*

Nous présentons dans cette partie l'analyse *a priori* de l'exercice proposé aux élèves et de l'énoncé de cours qui doit être institutionnalisé à sa suite.

L'exercice¹³ dont nous proposons l'énoncé en annexe 1 consiste à construire le symétrique A' d'un point A par pliage puis de constater que la droite (AA') est perpendiculaire à l'axe et que celui-ci coupe le segment $[AA']$ en son milieu ou de constater que les points A et A' sont confondus sur l'axe dans le cas où le point A appartient initialement à l'axe. Les tâches impliquées par l'énoncé sont :

- une manipulation (le pliage et le placement du point A') qui ne constitue pas une tâche mathématique ;
- la reconnaissance perceptive et/ou instrumentée de la perpendicularité et d'un milieu (dans le cas où le point A n'appartient pas à l'axe) ;
- la reconnaissance perceptive et/ou faisant intervenir la définition établie à la séance 1 de la symétrie des deux points ;
- la mobilisation du vocabulaire (milieu, perpendiculaire, symétrique).

Sur le plan des tâches et connaissances mathématiques impliquées, l'exercice est relativement pauvre. L'organisation du scénario permet d'affirmer que la fonction de cet exercice dans le scénario est de permettre l'introduction de la définition du symétrique d'un point.

La définition visée (qui est prévue pour être écrite dans le cahier de leçon des élèves à l'issue de l'exercice) est présentée en annexe 2. Une analyse *a priori* de cette définition, en lien avec l'exercice précédent, nous permet d'identifier *a priori* un certain nombre d'éléments susceptibles d'influer sur les activités des élèves et les apprentissages qui peuvent en résulter. En particulier, cette définition est non opératoire, dans le sens où elle suppose la figure terminée : elle ne peut être utilisée pour construire le symétrique d'un point et, réciproquement, ne peut être élaborée en suivant la logique de la construction du symétrique d'un point ; d'autre part, elle suppose une disjonction de cas. Quant au fait d'établir la définition en s'appuyant sur le travail réalisé dans l'exercice, cela suppose d'après nous d'explicitier le statut de la construction par rapport à celui de la définition (cas particulier / cas général, le caractère approximatif de la construction ...) ainsi que le statut de ce que l'on observe sur la figure (la validité d'une reconnaissance perceptive, de l'utilisation des instruments ...) par rapport à ce que l'on écrit dans la définition.

On peut noter que, si l'on s'en tient à l'énoncé de l'exercice, tous ces éléments sont complètement implicites, ce qui implique que la relation entre l'exercice et la définition n'est pas évidente *a priori*. Or le travail d'élaboration de définitions à partir de l'observation de cas particuliers, s'il est fréquent au collège, n'en est pas pour autant non problématique, notamment en sixième (cf. le passage d'un paradigme à l'autre). Nous nous attacherons donc particulièrement à cet aspect dans l'analyse des déroulements puisqu'ils nous semblent déterminants, étant donné notre cadre théorique, pour permettre aux élèves d'accéder à la conceptualisation visée.

13 L'énoncé est tiré du manuel Bréal 6^{ème}, édition 2005.

3. Éléments de méthodologie pour l'analyse des déroulements

Nous ne revenons pas ici sur ce qui a déjà été largement évoqué dans les exemples précédents (découpage chronologique, repérage des formes et nature du travail, des aides de l'enseignant ...), mais nous précisons certains éléments spécifiques à cette étude-ci. Le principe des analyses de déroulements reste identique aux études précédentes : analyser les pratiques de l'enseignant en lien avec les activités possibles des élèves, en les mettant en regard avec l'analyse *a priori*.

En particulier, pour les épisodes d'exercices, ceci nous amène à repérer, lors des déroulements, les modifications (diminutions ou enrichissements) de la tâche initialement prescrite ainsi que les traces des activités des élèves et de ce qui peut influencer sur ces activités. Cela nécessite de reconstituer le repérage, l'interprétation et l'exploitation du travail des élèves que fait l'enseignant et nous permet de mettre en évidence des « apports » : enrichissements, liens, structuration des connaissances, identification¹⁴, bilans, généralisations, ... Ces « apports » nous semblent des éléments déterminants pour permettre une transformation du travail des élèves en connaissances.

Quant aux épisodes de cours, outre la répartition du temps en fonction de la nature du travail des élèves, nous nous intéressons essentiellement aux contenus sur lesquels portent les échanges : notamment, nous repérons si la *question initiale*¹⁵ est posée, si le lien avec les productions des élèves est fait et si l'enseignant découpe ou simplifie¹⁶ les questions. Nous tenons compte également de la répartition entre l'enseignant et les élèves sur le contenu (qui a la charge de la généralisation, la décontextualisation, la formulation des énoncés de cours ?), et des apports (cf. ci-dessus) supplémentaires des enseignants.

4. Analyse du déroulement de l'épisode d'exercice

Nous présentons en annexe 3 le découpage en phases¹⁷ des épisodes d'exercices de Denis et Martine. L'analyse de ces tableaux nous permet d'établir un certain nombre de constats. La durée de l'épisode est similaire entre les deux classes (environ 20 minutes chez Denis et 19 minutes chez Martine), mais la répartition des formes de travail est très différente.

Chez Denis, on observe successivement près de 9 minutes de travail individuel sur la tâche (essentiellement la manipulation) puis plus de 11 minutes de travail collectif consistant à : la réalisation de la figure au tableau par l'enseignant ; le traitement collectif de la question d. de l'exercice (compléter les phrases) ; un bilan portant sur « *les deux conditions* » (cf. infra) ; un apport consistant à demander aux élèves de refaire la manipulation pour un autre point et pour un point appartenant à l'axe.

14 Nous désignons ainsi ce qui a trait à l'*identification* (ou encore le pointage) des objets de savoir en jeu dont notamment Crinon, Marin et Bautier (2008) rappellent l'impact *a priori* différenciateur par son insuffisance dans les milieux défavorisés.

15 Nous entendons par *question initiale* la question à laquelle l'énoncé de cours visé constitue une réponse. Par exemple, dans le cas présent, la question initiale est « comment peut-on définir deux points symétriques par rapport à un axe ? »

16 On parlera de *découpage* lorsque l'enseignant, à partir d'une question nécessitant plusieurs éléments de réponse, pose aux élèves des questions portant séparément sur ces éléments ; on parlera de *simplification* lorsque l'enseignant prend une partie de la réponse à sa charge (par exemple s'il induit la réponse en évoquant la question de l'exercice qui doit permettre de répondre, s'il commence la phrase que les élèves n'ont plus qu'à terminer...).

17 Le découpage en épisodes correspond à un découpage grossier en fonction de la nature du travail (cours, travail sur des exercices, corrections, rappels de cours ...) ; le découpage des épisodes en phases correspond à un découpage plus fin des épisodes selon les formes et la nature du travail (travail individuel – autonome ou non –, en petits groupes ou collectif, portant sur telle question de l'exercice ou tel énoncé de cours ...).

Dans la classe de Martine, on observe une alternance de travail individuel et de travail collectif. Les phases de travail individuel représentent en tout environ 5 minutes et sont consacrées à : la manipulation ; tracer (AA') et placer le point I ; réfléchir aux conditions auxquelles deux points sont symétriques. Le travail collectif dure 13 minutes et demie et consiste à : écrire le titre dans le cahier (« Symétrique d'un point ») ; réaliser la manipulation, l'enseignante montrant chaque étape ; faire un bilan de la manipulation (« Vous avez construit quoi ? ») ; une demande motivée d'observation de la figure ; une correction (les droites sont perpendiculaires et I est le milieu du segment [AA']) ; des apports concernant le cas d'un point de l'axe et le vocabulaire spécifique de la symétrie ; une demande de caractérisation de deux points symétriques ; une correction (la caractérisation de la figure).

L'analyse du découpage en phases nous permet donc d'identifier certaines différences : si le temps consacré à l'exercice est similaire entre les deux enseignants, il n'est pas exploité de la même manière. Le travail individuel, plus important en durée chez Denis, est consacré à des tâches très limitées en termes d'activités possibles, tandis que Martine prend rapidement en main collectivement ce qui présente le moins d'intérêt (la manipulation) pour consacrer une plus grande partie de l'épisode à la caractérisation de la figure, c'est-à-dire à la préparation de l'institutionnalisation prévue. Elle le fait en alternant phases collectives et individuelles, c'est-à-dire en dévoluant une partie de ce travail aux élèves. Nous avons en outre noté un certain nombre d'apports de la part des deux enseignants, mais plus riches par rapport aux enjeux de savoir visés chez Martine que chez Denis.

L'analyse des transcriptions nous permet de compléter ces résultats en approchant plus finement les activités des élèves telles que l'enseignant cherche à les provoquer. Nous ne présentons pas ici une étude exhaustive, mais pointons certains éléments qui, de nouveau, nous semblent susceptibles d'être différenciateurs en termes d'activités.

En particulier, nous avons repéré chez Martine un travail filé tout au long de l'épisode pour identifier explicitement le savoir en jeu (la caractérisation de deux points symétriques par rapport à un axe) ainsi que le statut des objets. En effet, une fois la manipulation réalisée, Martine fait identifier par les élèves qu'ils ont construit deux points symétriques :

Martine : j'ai construit le point A', et j'ouvre. C'est bon ? Donc par pliage, vous avez le point A et le point A' qui se superposent ?

Es¹⁸ : oui

Martine : donc vous avez construit quoi, là ?

A la fin de l'épisode, le bilan est l'occasion d'explicitier le lien entre l'exercice et l'institutionnalisation visée :

« Martine : Après ce que vous avez observé, on dira que deux points A et A' sont symétriques par rapport à une droite d dans quel type de situations ? [...] A quelles conditions, on pourra dire qu'un point A' est le symétrique de A ? ».

D'autre part, à plusieurs reprises, Martine pointe aussi le statut de l'observation de la figure :

« essayez de me dire ce que vous observez, ce que vous remarquez, on pourra rien justifier, rien prouver, mais qu'est-ce que vous observez ? », « on peut dire qu'il semble qu'elles sont ? », « voilà, vous avez l'impression, vous pouvez vérifier avec votre équerre, votre double-décimètre [...] que ça a l'air de fonctionner ».

Quant à Denis, l'analyse des transcriptions conforte l'analyse du découpage en phases en montrant qu'il se contente de faire l'exercice. En particulier, il ne s'agit à aucun moment d'observer ou de caractériser la figure obtenue, mais de « compléter les phrases » (en référence à la question d. de l'exercice). D'autre part, on ne trouve aucune trace d'identification du savoir en jeu ni du statut des objets.

18 Dans toutes les citations, E désigne un élève, Es désigne plusieurs élèves parlant en même temps.

A la fin de l'épisode, on peut toutefois noter une tentative de bilan :

« Denis : il y a combien de conditions, là ? On va essayer de regarder les deux conditions. Pour l'instant, on a remarqué que la droite qui était là, que j'ai effacée, c'est que le segment, et la droite rouge, elles sont ? ».

Cette intervention illustre bien la manière de procéder de Denis durant le travail collectif : il part d'une question qui représente manifestement une tentative pour établir un bilan permettant de préparer l'institutionnalisation (la mention des « deux conditions » est une référence aux conditions de perpendicularité et équidistance qui caractérisent deux points symétriques dans le cas où ils n'appartiennent pas à l'axe) ; mais cette tentative reste avortée non seulement parce qu'elle est incomplète (il n'est jamais précisé conditions *de quoi*), d'autre part parce qu'elle est entièrement prise en charge par Denis qui découpe directement, ramenant les élèves à la tâche précédente, à savoir identifier sur un exemple que deux droites sont perpendiculaires et qu'un point est le milieu d'un segment. L'épisode se clôt sur la réalisation de nouvelles manipulations, sans que Denis revienne sur ces questions.

L'analyse des transcriptions nous a ainsi permis de caractériser plus finement ce qui différencie les déroulements dans les deux classes : si l'enjeu du travail (la préparation de l'institutionnalisation de la définition de deux points symétriques par la caractérisation et la généralisation d'un cas particulier) est bien identifié et placé au cœur du travail proposé aux élèves dans la classe de Martine – même si tout n'est pas complètement explicité, notamment la généralisation –, celui-ci reste implicite et n'est surtout pas dévolu aux élèves dans la classe de Denis. Certains éléments nécessaires pour établir le lien entre l'exercice et la définition semblent même absents dans la classe de Denis, notamment la généralisation à partir du cas particulier et les considérations sur le statut de la figure et des observations réalisées.

5. Analyse du déroulement de l'épisode de cours

Nous nous limitons ici à la partie de l'épisode de cours qui porte sur le cas où le point n'appartient pas à l'axe, ceci nous semblant suffisant pour mettre en évidence des résultats intéressants concernant les deux enseignants. Nous résumons rapidement le déroulement de l'épisode du point de vue du contenu dans chacune des classes, avant de les comparer.

Dans la classe de Martine :

La question initiale est explicitement posée par Martine dès le début de l'épisode : *« on voudrait définir le fait qu'un point A' est le symétrique, on dit parfois image, est le symétrique d'un point A »* ; puis plus loin : *« alors, mathématiquement, qu'est-ce que ça signifie ? [...] À quelles conditions, A et A' vont être symétriques par rapport à une droite d ? ».*

Les élèves ne parvenant pas à répondre à la question, Martine dessine deux contre-exemples au tableau : l'un où (AA') et l'axe supposé de la symétrie ne sont pas perpendiculaires et l'un où les droites sont perpendiculaires mais les points A et A' ne sont pas équidistants de l'axe. Ayant fait mettre en évidence les conditions qui n'étaient pas remplies dans chaque cas, Martine repose la question initiale : *« Ah donc, voilà, maintenant je reviens, à quelles conditions, qu'est-ce qu'il faut pour que A et A' soient symétriques par rapport à d ? ».* L'énoncé de la définition est ensuite élaboré par les élèves, même si l'enseignante reformule en partie les réponses.

L'élaboration de la définition est en outre complétée par de nombreux apports : dès le début, Martine évoque (suite à une question d'élève) le fait que si les points s'appellent A et A' dans le cas de l'exercice, ils peuvent porter d'autres noms par ailleurs ; d'autre part, la définition est complétée dans le cahier de leçons par un certain nombre de remarques : sur le vocabulaire

(le fait qu'on peut parler d'un point symétrique d'un autre ou de deux points symétriques), la réciprocity de la symétrie et l'introduction d'une notation mathématique pour signifier que deux points sont symétriques par rapport à une droite ($S_D : A \# A'$)¹⁹.

Dans la classe de Denis :

La question initiale n'est pas posée ; Denis débute l'épisode en refaisant une figure au tableau, constituée d'une droite et d'un point A n'appartenant pas à la droite puis pose la question suivante : « *comment je fais pour trouver où est le point A' ? [...] Comment on trouve le point A', c'était quoi les conditions pour trouver le point A' ?* ». On peut noter qu'il est peu probable que les élèves soient capables de produire la définition attendue en réponse à cette question puisque, comme nous l'avons précisé plus haut, la définition est précisément non opératoire : elle suppose la figure terminée.

Après un échange où une élève suggère d'utiliser le compas – option que Denis écarte rapidement –, l'enseignant change de tactique et refait une figure sur laquelle il place cette fois les deux points A et A'. La question initiale est évoquée rapidement, mais pas posée directement aux élèves ; Denis découpe immédiatement en demandant d'abord aux élèves d'identifier la perpendicularité puis l'équidistance :

Denis : s'il est là, le point A', c'est quoi les deux conditions à remarquer pour que ça soit symétrique, ça veut dire qu'il faut qu'ils soient comment, d'abord, ça, c'est comment ? [il trace un pointillé rejoignant les deux points et montre le croisement]

E : perpendiculaire

Si la première condition est facilement identifiée par les élèves, la deuxième leur pose davantage de problèmes (ce que les élèves évoque est que les deux points sont équidistants de la droite – en ayant du mal à l'exprimer puisqu'ils ne disposent pas de la notion de distance – mais l'énoncé doit être établi en faisant référence au point d'intersection – comme étant le milieu du segment – qui n'est pas figuré sur la figure au tableau). Denis simplifie alors la question en évoquant lui-même le milieu.

L'énoncé de cours est ensuite écrit au tableau et recopié par les élèves sur leur cahier et aucune mention n'est faite du statut des objets en jeu : notamment, la généralisation et l'élaboration d'une définition à partir de l'observation d'un exemple sont entièrement passées sous silence, cachées sous le fait que les noms des points sur l'exemple et dans la définition sont les mêmes.

Quant aux apports au cours de l'épisode, ils se limitent au début de l'épisode à une discussion sur du vocabulaire, mais pas mathématique (l'échange porte sur la fréquence d'emploi de l'expression « par rapport »). En fin d'épisode, on peut noter un apport plus riche : l'utilisation de deux contre-exemples (similaires à ceux utilisés par Martine) pour mettre chaque fois en évidence la condition qui n'est pas remplie.

Comparaison :

La durée de l'épisode est un peu plus importante chez Denis que chez Martine (près de 20 minutes pour un peu plus de 15 minutes), mais on a vu que cela n'est pas nécessairement corrélié avec une plus grande richesse de contenu. Durant l'ensemble de l'épisode, le travail est collectif dans les deux classes, et on peut noter que l'écriture de la définition dans le cahier par les élèves est réalisée au bout de 11 minutes environ chez Denis et au bout de 8 minutes environ chez Martine.

19 Cette notation n'est pas au programme de sixième, mais Martine a décidé de l'introduire quand même car elle la trouve utile (elle s'en sert notamment pour faire rédiger aux élèves des petits raisonnements déductifs).

Du point de vue du contenu, la question initiale est explicite chez Martine et elle n'est ni découpée ni simplifiée par l'enseignante. La réponse complète reste à la charge des élèves, exceptée la formulation, prise en charge par l'enseignante dans une certaine mesure. En revanche, nous avons noté que la généralisation et l'explicitation du statut des objets sont moins mis en évidence que dans l'épisode d'exercice. Martine ne redit pas, notamment, que rien n'a été prouvé. Toutefois, le fait de s'appuyer sur des contre-exemples (et non sur un exemple comme Denis) rend la généralisation plus valide.

Dans la classe de Denis, la caractérisation de deux points symétriques n'est pas réellement à la charge des élèves, ceux-ci n'ayant qu'à identifier sur un exemple deux droites perpendiculaires et un milieu (comme dans l'exercice).

Enfin, les apports réalisés par chacun des deux enseignants sont très différents. Si on peut noter un apport commun (l'utilisation de deux contre-exemples), on a vu qu'ils ne remplissaient pas la même fonction dans les deux cas : ils servent à élaborer l'énoncé chez Martine, tandis qu'ils servent uniquement à appliquer la définition dans le cas de Denis. Quant aux autres apports réalisés par chacun des enseignants, la différence en termes de connaissances mathématiques sous-jacentes est très nette.

6. Les résultats en contrôles

Tout comme dans les exemples précédents, nous nous servons ici des productions des élèves en contrôles pour évaluer les effets de l'enseignement reçu sur les apprentissages des élèves, compte tenu toutefois de toutes les précautions mentionnées précédemment et sur une partie desquelles nous reviendrons en conclusion.

Dans chacune des deux classes a été proposé quelques temps après la séance analysée ci-dessus un contrôle comportant des énoncés identiques. Nous présentons ici les résultats liés à une question en particulier : il s'agissait de redonner la partie de la définition du symétrique d'un point correspondant au cas où le point n'appartient pas à l'axe. L'énoncé précis en est : « *A et B étant deux points distincts n'appartenant pas à la droite (d), compléter la phrase suivante : dire que le point B est le symétrique du point A par rapport à la droite (d) signifie que : ...* ».

Une analyse *a priori* rapide met en évidence quelques points : la réalisation de la tâche suppose que l'élève identifie que ce qui est attendu est la définition et qu'il l'adapte aux noms des points de l'énoncé (il s'agit dans le contrôle de A et B, alors que le cours mentionnait A et A') ; l'élève doit également identifier que seule la partie de la définition concernant le cas où le point n'appartient pas à l'axe est attendu ; d'autres réponses correctes que la définition sont possibles comme « A et B se superposent par pliage », « A est le symétrique du point B par rapport à (d) » ...

Nous avons analysé les productions des élèves en repérant d'une part si les élèves identifiaient que c'était la définition qui était attendue ou non (nous distinguons ainsi les autres réponses justes des réponses fausses et des réponses évoquant les conditions de la définition – perpendiculaire et milieu) ; d'autre part, nous avons repéré si l'élève mentionnait les deux conditions ou non (en distinguant les élèves qui citent la perpendiculaire et le milieu de ceux qui donnent une réponse partielle) ; enfin, s'il avait identifié que seule une partie de la définition était attendue (en distinguant ceux qui ont ajouté le cas où les points sont confondus des autres). Nous indiquons également les productions pour lesquelles la forme de la réponse n'était pas correcte. Les résultats sont consignés dans un tableau présenté en annexe 4 et nous les analysons ci-dessous.

On note essentiellement que les résultats semblent nettement meilleurs chez Martine : la réponse attendue (c'est-à-dire les deux conditions de la définition dans le seul cas où les points n'appartiennent pas à l'axe) est produite par 10 élèves sur 22 chez Martine contre 3 élèves sur 21 chez Denis. On atteint 15 élèves chez Martine si l'on comptabilise ceux qui ont ajouté la cas des points confondus (le résultat ne change pas chez Denis). On atteint 16 élèves chez Martine et 8 chez Denis si l'on comptabilise les élèves qui n'ont répondu que partiellement : ce résultat indique le nombre d'élèves qui ont identifié que c'était la définition qui était attendue. Enfin, 8 élèves produisent une réponse fausse chez Denis contre seulement 3 chez Martine.

Notons que l'écart s'accroît encore entre les élèves de Denis et Martine si l'on prend en compte la forme (correcte ou non) des réponses.

La mise en parallèle des déroulements avec les productions en contrôles est donc très frappante, mais elle doit néanmoins être nuancée.

En effet, tout d'abord, il n'y a pas que les épisodes analysés qui peuvent avoir eu une influence sur les productions des élèves en contrôles ; en outre, les épisodes présentés ont été choisis pour leur caractère particulièrement contrasté entre les deux enseignants, mais ils sont relativement représentatifs de l'ensemble des déroulements des ces deux enseignants sur l'ensemble du chapitre.

Un autre facteur qui limite peut-être la mise en rapport des déroulements avec les résultats sur cette tâche est le fait qu'il s'agit d'un test sur des connaissances décontextualisées, à formuler par des phrases. Or le fait que Denis est en ZEP joue probablement un rôle dans les résultats faibles de ses élèves sur ce type de tâche : on sait combien le travail sur des énoncés décontextualisés représente une difficulté pour ces élèves (Butlen 2007).

Une dernière nuance peut être apportée par les résultats concernant une autre tâche du même contrôle : après la question portant sur la définition, il s'agissait de construire le symétrique d'un point sur papier blanc avec un axe oblique. Cette tâche suppose notamment de faire intervenir explicitement les deux conditions de la définition. Or elle est réussie par 20 élèves sur 21 chez Denis et 20 élèves sur 22 chez Martine. Cela conforte l'idée que non seulement la mise en rapport des déroulements avec les résultats en contrôles n'est pas transparente, mais également que le facteur ZEP intervenait probablement de manière déterminante dans les résultats concernant la définition.

Toutefois, l'analyse à l'échelle de l'ensemble du chapitre permet de mettre en évidence la cohérence entre les résultats en contrôles et ce que l'on a pu observer des déroulements dans la classe de chacun des deux enseignants.

7. Conclusion

A partir d'une tâche identique et de son exploitation en cours, nous avons constaté des différences importantes dans les déroulements. On peut notamment supposer que les élèves de Martine ont eu accès à des activités plus « riches », c'est-à-dire davantage susceptibles de favoriser la conceptualisation de la notion visée. En particulier, l'objet de savoir a été explicitement identifié plusieurs fois ; ce qui a été admis est plus explicite (statut de l'observation et de la définition) ; la généralisation a été plus explicite et plus liée à l'activité qui a même été adaptée par Martine pour faciliter l'élaboration de la définition.

D'autre part, on constate des différences de résultats au contrôle que l'on peut mettre en cohérence avec les analyses de déroulements (à une échelle plus grande).

Des variations importantes apparaissent donc pour lesquelles un certain nombre de facteurs explicatifs peuvent être avancés : parmi les principaux, on peut citer la composante personnelle de chacun des professeurs qui intervient probablement de manière déterminante dans les différences de déroulements ; la composante sociale des pratiques à travers le facteur ZEP qui intervient probablement à la fois dans les déroulements (le professeur adaptant ses déroulements en fonction des caractéristiques – réelles ou supposées – des élèves) et dans les résultats en contrôles (comme on l’a mentionné à propos des énoncés décontextualisés) ; le poids du dispositif expérimental qui avait amené à ce que les deux enseignants appliquent chacun dans leur classe le même scénario mais sur lequel nous ne reviendrons pas ici (cf. Chesnais 2009).

8. Annexes

Annexe 1 : énoncé de l'exercice

Activité : symétrique d'un point :

- Sur une feuille de papier blanc, trace une droite (d) et place un point A.
- Plie le papier le long de la droite (d). Pique sur le point A avec le compas, et nomme A' le point que tu obtiens de l'autre côté de la droite (d).
- Trace la droite (AA'). Tu nommeras I le point d'intersection des droites (AA') et (d).
- Complète les phrases suivantes :
 « La droite (AA') et la droite (d) sont »
 « Le point I est le du segment [AA'] »
 « Le point A' est le du point A par »
 « La droite (d) est la du segment [AA'] »

Annexe 2 : énoncé de cours

Définition :

Deux points A et A' sont symétriques par rapport à une droite (d) signifie que :

- Si A appartient à la droite (d), A et A' sont confondus sur (d)
- Si A n'appartient pas à la droite (d), la droite (d) est la perpendiculaire à la droite (AA') et (d) passe par le milieu du segment [AA'].

Annexe 3 : découpage en phases des épisodes d'exercices

Légende : les cases grisées correspondent aux phases de travail collectif ; les cases blanches correspondent aux phases de travail individuel

Martine

phases	1	2	3	4	5	6
durée	2 :06	2 :18	3 :30	1 :58	1 :14	1 :42
Description rapide	titre	Travail autonome	Collectif : manipulation + Sarah : point sur la droite ; reprise avec Thomas	reprise + bilan : vous avez construit quoi ?	On va observer la figure (motivation par la déf. et la construction) ; Tracer (AA'), placer I	Autonomie élèves
phases	7	8	9	10	11	12
durée	1 :03	0 :42	0 :28	1 :03	0 :55	2 :39
Description rapide	Que pensez-vous des droites d et AA' ? puis I	Le cas du point de l'axe	On dit que A' est l'image de A	Deux points A et A' sont symétriques dans quel type de situations ? A quelles conditions ?	Autonomie : réfléchir aux questions (échange avec Thomas : droites symétriques)	Collectif : particularités de la figure + synthèse (y compris cas particulier).

Denis

Phase	1	2	3	4
Durée	0 :56	7 :41	6 :49	4 :56
Description rapide	Démarrage (calque, crayon)	Travail autonome + interventions Denis (d droite, trouver le point, matérielle, étapes, droite AA', autre point pour Nicolas , compléter les phrases, centre/milieu...)	Correction / traitement de la question d. ; bilan : les deux conditions	Apport : un autre point et un point de l'axe

Annexe 4 : résultats en contrôles.

		Martine : 22 copies	Denis : 21 copies
Non traité		0	2
Autre ok		1	2
Perpendiculaire et milieu [dont mal dit]	Seul	10 [2]	3 [3]
	+ ou confondus	5	0
Partiel (que perp. ou que milieu) [dont mal dit]	Seul	1 [0]	5 [5]
	+ ou confondus	2	1
faux		3	8

V Conclusion générale

Comment interpréter ce type d'analyse ?

Nos analyses de la circulation du savoir précisent la fréquentation des mathématiques que les élèves peuvent développer et donnent accès, partiellement, aux jeux de connaissances qu'ils peuvent approcher. Dans le dernier exemple, ils connaissent le théorème de Thalès, ils doivent introduire une variable x dans les rapports bien connus, quel saut ont-ils à faire ? Dans quelle mesure cette adaptation est-elle proche du déjà là ? Cela est associé à une réflexion en termes de zone proximale de développement : reste à savoir dans quelle mesure le travail des élèves et les interventions du professeur sont « suffisamment proches » pour que l'adaptation puisse se faire, voire se refaire une autre fois. On a pu voir en ZEP, la grande difficulté à rapprocher élèves et savoirs et pas élèves et enseignants ou élèves et « sous savoirs ». Seulement tout cela reste vague, différent pour chaque élève, voire chaque contenu et l'enseignant doit optimiser ses interventions à partir d'indices quelquefois insuffisants. Nous pensons que nos analyses, à partir de nos indicateurs, éclairent la palette des possibles à ce niveau donnant des moyens d'interroger systématiquement et précisément des cheminements organisés par l'enseignant.

Y a-t-il un lien avec les apprentissages antérieurs ?

Peut-on (doit-on...) préciser davantage, à partir de ces premiers résultats ce qui intervient dans cette variabilité – par exemple en mobilisant d'autres indicateurs,

- côté enseignants : les implicites de vocabulaire ou de logique, même élémentaires (cf. sources de malentendus ?)
- côté élèves : les « connaissances » des élèves au sens large, déjà-là ou presque-là*, en termes de procédures, de cadres, de registres y compris langagiers, de formulations, d'accès aux raisonnements, voire de postures ?

Y a-t-il un lien avec les apprentissages ultérieurs ?

Cela demande à être testé même si la nature des différences retenues est théoriquement associée à la qualité des apprentissages. C'est d'autant plus vrai que la déclinaison fine du travail en autonomie laissé aux élèves, souvent préconisé, peut en fait être très différente d'une

séance à l'autre. Par exemple on voit bien que le fait de laisser chercher les élèves ne peut pas être interprété dans l'absolu (cf. les deux classes de troisième) – le travail de Chopin (2007) est particulièrement éclairant à cet égard et non contradictoire avec nos résultats.

L'exposé suivant montre des travaux qui répondent en partie à cette question.

Notre analyse de la circulation du savoir peut permettre des mises en regard plus précises et plus fiables entre les activités des enseignants en classe, celles des élèves et les apprentissages.

Quelles contraintes déterminent les choix des enseignants en matière de circulation du savoir ? Y a-t-il des alternatives que ce soit dans les choix mathématiques qui précèdent la classe ou dans les choix de gestion ?

Dans nos deux exemples, le contraste a été fait entre une classe faible ou une ZEP et une classe standard. Des études déjà faites (en mathématiques, Glorian 1997 ; Butlen et al. 2007 ; et même plus générales, Bautier et Rayou 2009) indiquent des convergences avec ce que nous avons illustré. Il y aurait ainsi certaines régularités de gestion liées à la composition des classes. Cependant le dernier exposé va permettre de commencer à répondre à la question.

VI Bibliographie générale

Assude T. (1992) *Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique. Ecologie de l'objet « racine carrée » et analyse du curriculum*, Thèse de doctorat, Université de Grenoble.

Bautier E., Rayou P. (2009) *Les inégalités d'apprentissage*. Paris : PUF.

Bronner A. (1997) Les rapports d'enseignants de troisième et seconde aux objets « nombre réel » et « racine carrée ». *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol.17/3, 55-80.

Bucheton D. Dezutter O, Brunet L.M., Dupuy C. (2008) *Le développement des gestes professionnels dans l'enseignement du français – un défi pour la recherche et la formation*. Bruxelles : De Boeck Université.

Butlen D. (2007) *Le calcul mental entre sens et technique*. Besançon : Presses Universitaires Franche-Comté.

Butlen D., Ngono B. (2007), Hétérogénéité et différenciation dans l'enseignement en ZEP, *Actes du XXXIIIème colloque sur la formation des maîtres*. CRDP de Versailles, CDDP de l'Essonne Evry, 2007.

Chappet Pariès M., Robert A., Rogalski J. (2008), Comment l'enseignant de mathématiques, en classe, met ses élèves sur le chemin des connaissances : un point de vue méthodologique en didactique des mathématiques, *Travail et apprentissages* 3, 95- 123

Chappet Pariès M. (soumis 2009) *Circulation de savoir en classe de mathématiques : quelles variabilités dans les pratiques des enseignants ? Etudes de cas*, Annales de Strasbourg

Chesnais A. (2009) *L'enseignement de la symétrie axiale dans des contextes différents : les pratiques de deux enseignants et les activités des élèves*. Thèse de doctorat, Université Paris 7 – Denis Diderot.

Chesnais A., Coulangue L., Dumail A., Horoks J., Pariès M., Robert A. (2008), Interroger des différences entre enseignements à partir du terrain (classes de mathématiques en collège et lycée) : travaux de didacticiens des mathématiques sur les liens en pratiques et apprentissages des élèves dans différents contextes –*Symposium Colloque Efficacité et Équité* Rennes, Novembre 2008.

Chopin M.P. (2007) *Le temps didactique dans l'enseignement des mathématiques; Approche des phénomènes de régulation des hétérogénéités didactiques*, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux.

Corlay M. et Cissé F. (2006) Déroulement des cours et apprentissages (sur le chapitre des triangles semblables) *Mémoire de master de didactique des mathématiques parcours recherche*, Université Paris 7 (non publié).

Crahay M. (2000) *L'école peut-elle être juste et efficace? De l'égalité des chances à l'égalité des acquis*. Bruxelles : De Boeck.

Crinon J., Marin B., Bautier É. (2008), Quelles situations de travail pour quel apprentissage ? Paroles des élèves, paroles de l'enseignant. In D. Bucheton (Ed), *L'agir enseignant : des gestes professionnels ajustés* pp. 123-147. Toulouse : Octarès.

Douady R. (1987) Jeux de cadres et dialectique outil/objet, *Recherches en didactique des mathématiques* vol 7/2, 5-32.

Dumail A. (2007), La racine carrée en troisième, des enseignements aux apprentissages, *Cahier de Didirem* n°57, IREM, Université Paris7-Denis Diderot.

Felix C. (2004) Les gestes de l'étude personnelle chez les collégiens : une perspective comparative. *Spirale* 33, 89-100.

Glorian Perrin M.J. (1997) Que nous apprennent les élèves en difficulté en mathématiques ? *Repères IREM* 29, 43-66.

Horoks J. (2008), Les triangles semblables en classe de seconde : de l'enseignement aux apprentissages. *Recherches en didactique des mathématiques*, 28/3, 379-416.

Houdement C., Kuzniak A. (2000) des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 20/1, 89-116.

Robert A. (2008) Sur les apprentissages des élèves : une problématique inscrite dans les théories de l'activité et du développement; Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe, in Vandebrouck, *la classe de mathématiques*, pp 33-58. Toulouse : Octarès.

Vandebrouck F. (2008) *La classe de mathématiques : activités d'élèves, pratiques d'enseignants*, Toulouse : Octarès.