Technologies, enseignement et apprentissage des mathématiques : revue de questions

Ghislaine Gueudet (CREAD, IUFM Bretagne UBO)

Fabrice Vandebrouck (LDAR, Université Paris Diderot)

Résumé

Nous répondons dans cette présentation à une demande des organisateurs du séminaire national de didactique des mathématiques : proposer une revue de questions sur le thème des technologies. Nous avons tenté d'éviter de faire de cette revue de questions une liste fastidieuse de problématiques largement connues ou d'enjeux pointus accessibles aux seuls spécialistes des technologies. Dans cet objectif nous avons fait certains choix, en particulier :

– nous nous intéressons plus particulièrement aux évolutions les plus récentes de la recherche en didactique des mathématiques concernant ce thème des technologies, à l'échelle internationale ;

– après un panorama général esquissé en partie 1, nous approfondissons certaines questions qui nous ont semblé spécialement sensibles, et dont la portée dépasse celle de la seule technologie. Nous considérons en effet les technologies comme susceptibles de révéler des phénomènes plus larges d'enseignement et d'apprentissage.

Mots clefs

Approche documentaire, Approche instrumentale, Collectifs, Démarche expérimentale, Double approche, Médiation sémiotique, Orchestration instrumentale, Pratiques enseignantes, Ressources, Technologies

I Quelles recherches ? Quelles technologies ?

Pour ébaucher le paysage d'où émergeront les questions de recherche que nous tenterons d'approfondir, nous avons tout d'abord considéré un large ensemble d'articles, d'ouvrages d'actes de conférences en didactique des mathématiques qui déclarent s'intéresser aux technologies. Ces recherches visent en particulier à élucider ce que ces technologies modifient, ou pourraient modifier dans la classe en termes d'apprentissage et d'enseignement. Les questions étudiées dépendent en partie du type de technologie considéré ; il est donc nécessaire de préciser d'emblée quelles sont ces technologies.

Les travaux sur les calculatrices, graphiques ou formelles (Guin & Trouche 2002), sur les logiciels de géométrie dynamique (Laborde 1999) sont bien connus. Ils se poursuivent encore actuellement, s'intéressant à des évolutions technologiques, comme dans le cas des calculatrices formelles qui intègrent et articulent désormais différents logiciels (Artigue & Bardini à paraître), ou à des usages émergents, notamment pour les logiciels de géométrie dynamique dans le contexte du premier degré (Assude *et al.* 2007). Les recherches considèrent aussi des technologies qui ne sont pas *a priori* développées dans un but d'enseignement, comme le tableur (Haspekian 2005, Lagrange & Erdogan 2009). Dans le même temps, la recherche se penche désormais sur de nouveaux types de technologies. Il ne s'agit pas pour nous d'en dresser un inventaire, mais d'indiquer des tendances qui nous semblent significatives.

L'intérêt pour les innovations de pointe est une constante dans ces recherches. Nous avons évoqué ci-dessus de nouveaux modèles de calculatrices, articulant différents types de logiciels. D'autres calculatrices, comme certains logiciels, offrent la possibilité d'un travail en réseau dans la classe, de l'affichage simultané pour tous de plusieurs productions d'élèves qui peuvent être confrontées, débattues (Hivon *et al.* 2008, Hegedus *et al.* to appear). On peut également évoquer les technologies visant à créer les conditions de l'apprentissage pour des élèves en situations de handicap : par exemple, certains équipements permettent désormais une traduction automatique du LaTeX en Braille, ainsi qu'une oralisation simultanée des formules mathématiques. Ainsi les élèves ou étudiants déficients visuels peuvent accéder aux textes mathématiques (Archambault & Fitzpatrick 2008). Une telle technologie, introduisant des possibilités totalement nouvelles, bouleverse clairement l'enseignement et l'apprentissage pour ces élèves. Ceci soulève de manière évidente des questions portant sur la nature de ces modifications.

Cependant la recherche en didactique sur les technologies ne se limite pas à suivre et analyser les nouvelles possibilités suscitées par les innovations de pointe. Elle considère aussi des ressources qui semblent technologiquement moins sophistiquées, mais qui sont associées à des changements profonds : c'est le cas des ressources en ligne (Cazes *et al.* 2007, Artigue & Gueudet 2008). Ainsi les manuels Sésamath[1], qui couvrent tous les niveaux du collège, semblent peu différents des manuels traditionnels (Kuntz *et al.* 2008). Certes, ils existent en version numérique, en plus de la version papier ; certes, cette version numérique inclut des compléments, fiches au format pdf, exercices en ligne, supports logiciels pour les séances tableur ou géométrie dynamique... Mais les principaux changements liés à ces manuels concernent leur mode de conception, et le modèle économique associé. Ils ont en effet été composés par une large équipe d'enseignants de collège bénévoles, dont le travail coopératif à distance était permis par une plate-forme, et régulé par des membres de l'association Sésamath[2] ; et ils sont distribués sous licence libre. Alors que les logiciels à la pointe de l'innovation peinent à être acceptés dans les classes (Kynigos *et al.* 2007), en France le manuel Sésamath et les ressources associées sont largement utilisés. Le site Sésaprof permet aux utilisateurs d'exposer leurs critiques ou leurs demandes ; ainsi au-delà de l'équipe de conception initiale, les utilisateurs participent aux évolutions des ressources. Il s'agit donc pour la recherche d'interroger ces nouveaux modes de conception et leurs conséquences.

Ainsi la question des technologies prises en compte par la recherche est loin d'être anodine, car les réponses à cette question peuvent induire des problématiques spécifiques ; nous resterons donc attentifs à cette dimension. Nous allons maintenant considérer de plus près des recherches récentes. Nous nous appuyons dans un premier temps sur l'étude ICMI 17 (Hoyles & Lagrange to appear), qui a effectué à la fin de l'année 2006 une synthèse des travaux existants. Elle a notamment pointé certaines évolutions, en comparant les thèmes abordés par l'étude ICMI et ceux qu'identifiait une méta-étude menée à la fin des années 90 (Lagrange *et al.* 2003).

- À propos des élèves : de nouvelles dimensions sont interrogées, avec en particulier des questions sur le travail collaboratif permis par les technologies, sur l'intervention des technologies pour l'évaluation.
- À propos des professeurs : les recherches semblent se développer, notamment sur la formation pour soutenir l'intégration des technologies. Les études portant sur des « professeurs ordinaires » sont toujours rares.
- À propos du design : un intérêt nouveau apparaît pour les questions de type accessibilité, équité. L'étude des articulations entre design et curriculum est désormais centrale.
- À propos des approches théoriques : les auteurs relèvent une évolution sensible, d'une fragmentation initiale à des articulations réfléchies et à l'élaboration d'approches intégrant différentes perspectives. Ceci est dû en particulier au travail effectué par certains projets européens, comme TELMA ou ReMath (Artigue 2007).

1 http://manuel.sesamath.net/
2 Association de professeurs de mathématiques de collège, http://www.sesamath.net

- Ces observations ont été retenues comme point de départ du travail commun du groupe *« Technologies and ressources in mathematics education »* (*Working Group 7*) à la conférence CERME 6 qui s'est tenue à Lyon en janvier 2009 (Gueudet *et al.* à paraître). Les recherches présentées à CERME 6 suivaient-elles les mêmes tendances ou pouvait-on observer des évolutions nouvelles, deux années après l'étude ICMI ?

Sur certains points, les constats sont les mêmes. Ainsi on relève bien l'évolution des approches théoriques, surtout pour l'étude des enseignants qui paraît elle aussi toujours en essor. Sur d'autres points on note des différences sensibles : ainsi sur l'apprentissage, plusieurs travaux sont consacrés au thème des démarches d'investigation, ou démarches expérimentales ; dans le même temps, le travail collectif des élèves est peu pris en compte. En revanche, certains auteurs s'intéressent au collectif formé du professeur et de ses élèves, soulevant en particulier des questions d'orchestration instrumentale (Trouche 2004). Le design est naturellement une des entrées étudiées, et le lien entre design et curriculum pris en compte. Mais de nouvelles questions, portant sur la qualité des ressources, et sur le lien entre qualité et interactions entre concepteurs et utilisateurs (*design loops)* semblent désormais centrales dans ce champ du design.

Le groupe était ouvert à des contributions portant sur des « ressources » au sens large (Adler 2000) ; les travaux qui ont été présentés correspondaient à ce choix. Ainsi, au côté de technologies nouvelles ont été considérés des outils plus anciens, comme le pantographe ; et des ressources que l'on ne qualifierait naturellement pas de technologies, comme le manuel scolaire. On retient surtout que les travaux considèrent le plus souvent des ensembles de ressources variées : dans le cas des calculatrices par exemple, nous avons déjà souligné que celles-ci associent plusieurs types de logiciels ; de plus elles sont utilisées avec des fiches papier préparées pour les élèves, voire des scénarios d'usage complets.

Les conclusions de l'étude ICMI 17, complétées par celles du WG7 de CERME 6 soulèvent de nombreuses questions, parmi lesquelles nous avons fait des choix, visant à approfondir certains points tout en couvrant différentes dimensions. En ce qui concerne l'apprentissage, nous nous centrons sur le thème de la démarche expérimentale (§ 2). A propos des études sur les enseignants, nous examinons les évolutions théoriques et méthodologiques en cours (§ 3). Nous consacrons enfin une partie spécifique à l'étude des collectifs : collectifs d'élèves, de professeurs, collectifs formés des élèves et du professeur (§ 4). Nous revenons en conclusion sur les questions de design et de qualité des ressources (§ 5).

II Apprendre avec les technologies : zoom sur la démarche expérimentale

1. La démarche expérimentale, généralités

Les apports potentiels et effectifs de la technologie pour la mise en œuvre par les élèves en classe de ce qui peut être nommé, selon les contextes : démarche expérimentale, démarche scientifique, démarche d'investigation (au singulier ou au pluriel) ont donné lieu à de nombreux travaux en didactique des sciences, que nous allons brièvement examiner comme point de départ de notre réflexion. Dasn les travaux anglo-saxons, on parle de *« inquiry-based science education »* ; cette démarche fait l'objet d'importantes incitations institutionnelles (NSTA 2004, Rocard *et al.* 2007). Elle est définie comme :

> « Un processus intentionnel de diagnostic des problèmes, de critique des expériences réalisées, de distinction entre les alternatives possibles, de planification des recherches, de recherche d'hypothèses, de recherche d'informations, de construction de modèles, de débat avec des pairs et de formulation d'arguments cohérents » (Linn et al. 2003)

Il s'agit de se rapprocher du mode de travail des scientifiques, tout en respectant les contraintes du contexte de la classe : contraintes de temps, et objectifs d'apprentissage précis. Dans cette perspective les technologies peuvent jouer plusieurs rôles : elles peuvent fournir aux élèves des outils de simulation, de visualisation, de modélisation. Les recherches actuelles (van Joolingen *et al.* 2007) soulignent surtout qu'elles permettent de proposer des tâches d'investigation que les étudiants peuvent traiter, en proposant différentes formes d'aides et en réduisant la complexité des vrais problèmes de recherche. C'est en particulier le cas de ressources en ligne conçues spécifiquement dans ce but, comme celles du projet WISE (*Web-based Inquiry Science Environment*, Linn *et al.* 2003). Ces ressources, élaborées et testées en classe par des professeurs, avec la contribution de chercheurs en sciences et en didactique des sciences, proposent des parcours pour l'étude d'une question donnée (les antibiotiques vont-ils être efficaces ? Comment recycler les pneus usés ?) Une succession d'étapes guide les élèves, et des liens associés les aident à répondre : emploi d'un site web externe, d'un outil de simulation etc. De nombreuses recherches ont considéré l'emploi en classe de ressources WISE, et montré que celles-ci favorisaient la mise en œuvre par les professeurs d'un enseignement « inquiry-based », et qu'elles favorisaient les apprentissages et l'intérêt des élèves pour les sciences. Certains travaux cependant pointent la nécessité de précautions, lors de l'emploi de telles ressources. En particulier, Wecker *et al.* (2007), soucieux de détecter un éventuel avantage d'élèves familiers des ordinateurs, lors d'un travail basé sur des ressources WISE, ont en fait identifié un effet inverse. Les élèves trop à l'aise avec la navigation sur Internet parcourent rapidement les étapes sans lecture approfondie des informations apportées. Ainsi lors du test final, ils ont de moins bons résultats que les élèves qui ont rencontré des difficultés dans le même parcours en ligne ! On retrouve ici un danger connu, mais rarement étudié aussi précisément par la recherche : le danger du survol, lors de l'emploi de ressources en ligne. Celui-ci est d'ailleurs associé, côté professeur, à un danger d'ostension (Mercier *et al.* 2001), ces ressources fournissant souvent des animations qu'il est confortable de projeter en classe, même si une telle démarche semble aller à l'encontre de ce qui peut être une démarche scientifique.

Dans le cas spécifique des mathématiques, nous allons utiliser le terme de « démarche expérimentale », pour souligner la question à laquelle nous nous attachons : quelle expérimentation, en classe de mathématiques ? Cette démarche fait l'objet d'une forte incitation institutionnelle, jusqu'à la création en juin 2007 d'une épreuve pratique au baccalauréat scientifique. Lombard (2008) explique qu'expérimenter, c'est vérifier des hypothèses, qu'aucun scientifique ne saurait sérieusement assimiler observation et expérience et que les expérimentations sont le plus souvent faites pour vérifier des hypothèses. Pour lui, en réalité, le travail du scientifique, et donc sans doute du mathématicien, se résume plutôt à « avoir une idée » et « vérifier expérimentalement si elle marche ». Cependant, Perrin (2007) décrit démarche expérimentale par « expérience, observation de l'expérience, formulation de conjectures, tentative de preuves, production éventuelle de contre exemples etc … ». Autrement dit, expérimenter, ce peut-être commencer par des cas particuliers, sans avoir d'hypothèse ou de conjecture en tête, ce qui ne correspond pas à la démarche expérimentale dans les autres sciences. Quant à Delahaye (2005), qui prend en compte explicitement les technologies dans son discours, il explique que la démarche expérimentale avec des technologies, cela peut-être aussi « trouver des contre exemples qui falsifient les conjectures ». Autrement dit, selon lui, confirmer ou infirmer des conjectures avec des technologies est possible, tout comme valider des démonstrations, et « la plus grande certitude mathématique n'est pas forcément atteinte par les démonstrations habituelles ». Cela peut choquer mais n'y a-t-il pas un paradoxe à accepter de certaines technologies qu'elle nous donnent effectivement des résultats mathématiques – pensons à une calculatrice bas de gamme qui nous donne le résultat d'une multiplication – et à refuser dans l'enseignement certains résultats de nouvelles technologies plus sophistiquées – un lieu de points donné par un logiciel de géométrie dynamique, une limite de suite donnée par un logiciel de calcul formel ?

La question de savoir si les mathématiques comportent une dimension expérimentale reste ouverte et d'actualité ; elle doit être étudiée par la recherche en didactique, qui peut notamment éclairer le rôle des technologies, en lien avec cette démarche.

Nous allons nous intéresser à deux moments clefs de la démarche expérimentale : celui de la conjecture et celui de la validation de cette conjecture.

2. Le moment de la conjecture

Les technologies semblent permettre aux élèves des activités de conjecture, qu'il ne leur serait pas possible de développer dans l'environnement traditionnel. Cependant les nouvelles représentations véhiculées par les technologies, qui ont des limites, affectent l'activité mathématique des élèves et notamment la manière dont ils conceptualisent les notions, pouvant amener à des conjectures erronées. Dans l'exemple ci-dessous, la représentation graphique proposée par la calculatrice de l'élève affecte la conjecture qu'il émet sur l'ensemble des solutions à l'inéquation proposée. Plus précisément, pour l'élève la borne supérieure de l'ensemble des solutions est 5, ce qui correspond en fait à la limitation donnée par défaut par son écran.

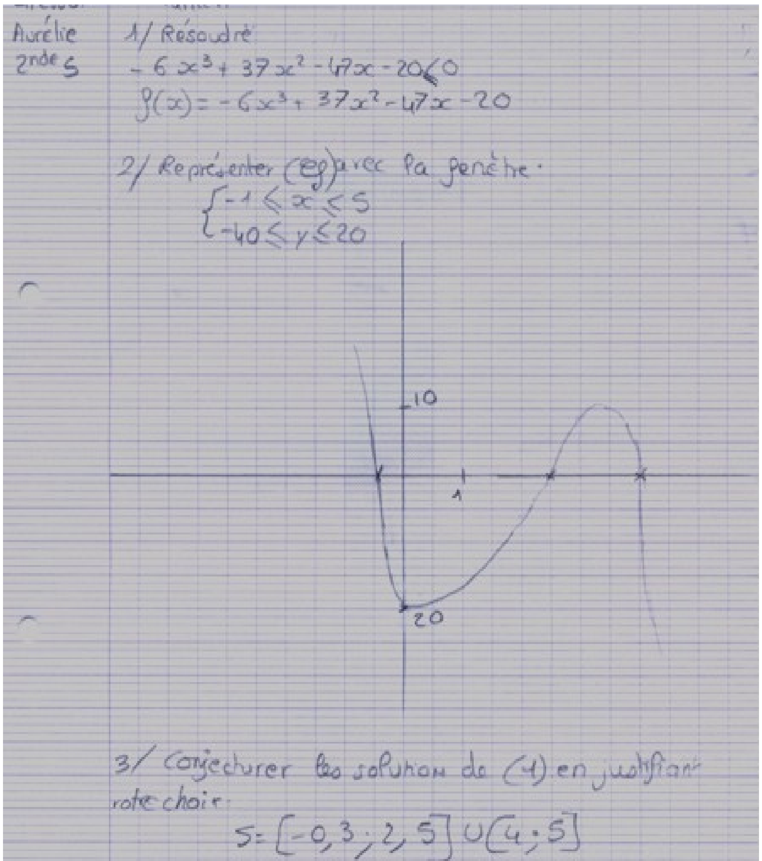


Figure 1 : copie d'un élève de seconde sur la résolution d'inéquations

Dans leur travaux sur les calculatrices symboliques, Artigue et Lagrange (Artigue 1995) ont aussi pointé la « double référence » dans laquelle sont placés les élèves et qui complexifie leur activité : d'un côté la référence papier-crayon habituelle pour la simplification des expressions algébriques par exemple, de l'autre la référence machine, différente de la première. Dans un exemple ci dessous où l'enseignant demande aux élèves de conjecturer à l'aide de leur calculatrice la forme générale de la factorisation du polynôme $x^n - 1$, la calculatrice ne permet pas d'émettre cette conjecture puisqu'elle factorise selon ses propres critères qui ne sont pas ceux utilisés habituellement. Cette double référence peut donc se poser en obstacle à l'activité des élèves en classe.

#1: FACTOR$(x^2 - 1, x)$	
#2:	$(x + 1)\cdot(x - 1)$
#3: FACTOR$(x^3 - 1, x)$	
#4:	$(x - 1)\cdot(x^2 + x + 1)$
#5: FACTOR$(x^4 - 1, x)$	
#6:	$(x + 1)\cdot(x - 1)\cdot(x^2 + 1)$
#7: FACTOR$(x^5 - 1, x)$	
#8:	$(x - 1)\cdot(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
#9: FACTOR$(x^6 - 1, x)$	
#10:	$(x + 1)\cdot(x - 1)\cdot(x^2 + x + 1)\cdot(x^2 - x + 1)$
#11: FACTOR$(x^7 - 1, x)$	
#12:	$(x - 1)\cdot(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
#13: FACTOR$(x^8 - 1, x)$	
#14:	$(x + 1)\cdot(x - 1)\cdot(x^2 + 1)\cdot(x^4 + 1)$

Figure 2 : copie d'écran d'une calculatrice formelle utilisée pour factoriser les $x^n - 1$

Pour toute technologie que l'on étudie ou que l'on introduit dans la classe, en vue notamment de faire entrer les élèves dans une démarche expérimentale, il semble nécessaire de circonscrire ses potentialités et les contraintes qu'elle induit pour l'enseignement et l'apprentissage, mais est-ce réellement réalisable ?

3. Le moment de test de la conjecture

Le deuxième moment de la démarche expérimentale sur lequel nous avons choisi de nous pencher est celui du test de la conjecture. Citons cette fois Duvernay[3], s'exprimant sur le site Educmath à propos de l'épreuve pratique au baccalauréat : « le deuxième inconvénient de la démarche expérimentale avec des technologies (le premier étant que ça prend du temps, forcément sur quelque chose d'autre) c'est que l'insistance sur l'aspect expérimental des mathématiques et l'usage de l'ordinateur pour « voir » ne conduise une grande partie des élèves à une conception faussée de ce que sont les mathématiques et des conditions de leur efficacité (que certains trouvent déraisonnables, on ne sait pourquoi). Ce danger n'est pas illusoire : le bulletin officiel n'affirme-t-il pas que les mathématiques se rapprochent des sciences expérimentales grâce à l'expérimentation numérique, à la simulation, à ce que l'on peut appeler la démonstration empirique ? ». La démarche expérimentale soulève ainsi des questions qui tournent autour de la nécessité de preuve mathématique des conjectures émises. Comment construire des outils ou même des situations d'enseignement qui suscitent chez les élèves une nécessité de preuve ?

Les constructions « molles », qui avaient été introduites par Healy (2000), semblent pouvoir constituer un tel outil, nous l'illustrons sur l'exemple ci-dessous. Nous considérons une situation en géométrie dynamique en classe de quatrième, où le professeur demande le lieu des

3 http://educmath.inrp.fr/Educmath/en-debat/epreuve-pratique/d-duverney

points d’où l’on voit un segment [AB] sous un angle droit. Les élèves peuvent créer le segment [AB] et un point M quelconque. Ils demandent au logiciel l’affichage de l’angle (AMB) puis déplacent le point M grossièrement pour amener à la valeur attendue de l’angle. En laissant ensuite la trace de M apparente, ils continuent le déplacement grossier de M en essayant de garder la contrainte de l’angle droit. La trace semble circulaire et la construction peut leur permettre de conjecturer la nature et les caractéristiques du lieu. C’est là une construction molle par opposition à une construction dure où le professeur aurait demandé aux élèves de tracer le cercle, de faire afficher la valeur de l’angle et d’émettre une conjecture par déplacement du point M sur le cercle.

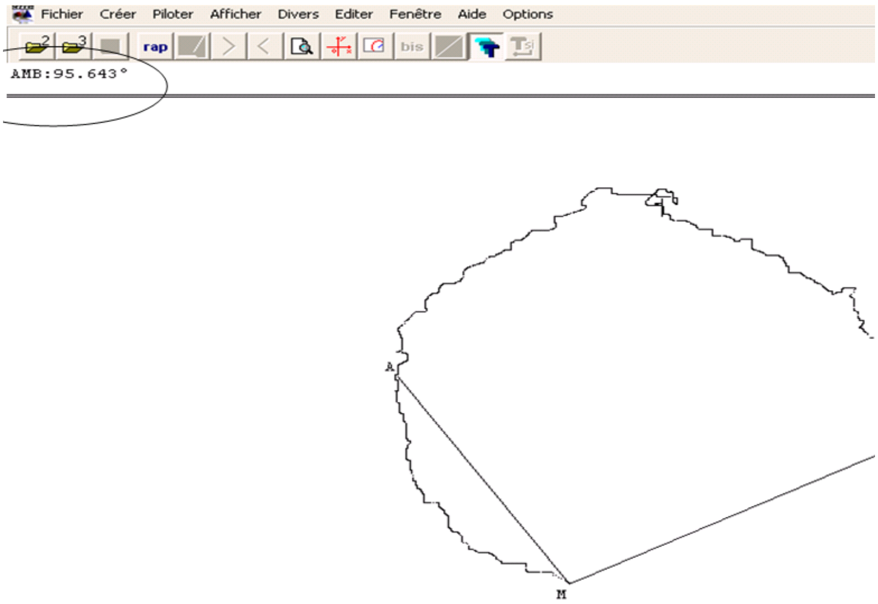


Figure 3 : illustration d’une construction molle

Dans la construction molle, le déplacement du point M en gardant la contrainte de l’angle droit peut induire un questionnement de l’élève sur la nature et les caractéristiques du lieu. L’élève ne cherche pas uniquement à déplacer M sous la contrainte mais cherche à identifier le lieu des points, dès que possible, sans s’obliger à le parcourir en entier. On peut penser que dans la construction molle, l’élève retrouve le besoin, plus que dans la construction dure où elle s’impose d’emblée, de démontrer sa conjecture. Il est cependant possible, une fois la conjecture établie, de la valider expérimentalement par une construction dure. C’est justement une vérification avec l’ordinateur de la conjecture, ce qui peut conforter les élèves en ce que la preuve mathématique n’est qu’un artifice imposé par le professeur. Cette remarque n’est pas anodine, comme le montre l’exemple suivant.

Dans ce deuxième exemple, questionnant la nécessité de preuve ressentie par les élèves, 4 suites numériques, (a_n), (b_n), (U_n) et (V_n) sont définies respectivement par les formules récurrentes ci-dessous.

$$a_{n+1}=(2a_n+b_n)/4 \qquad b_n=(a_n+2b_n)/4$$
$$u_n=a_n+b_n \qquad v_n=b_n-a_n$$

Les valeurs de ces 4 suites en fonction de leurs premiers termes sont données par un tableur dans les colonnes A, B, C, D respectivement. Les élèves doivent ainsi conjecturer que les suites (a_n) et (b_n) tendent vers 0, puis que les suites (U_n) et (V_n) sont géométriques de raisons respectives ¾ et ¼. Comme plus haut, le travail sur le tableur affecte à plus ou moins bon escient l’activité des élèves : par exemple, selon le nombre de décimales affichées par défaut, les suites (a_n) et (b_n) peuvent apparaître nulles à partir d’un certain rang, ce qui amène certains élèves à cette conjecture fausse.

	A	B	C	D
1	20	60	80	40
2	25	35	60	10
3	21,25	23,75	45	2,5
4	16,563	17,188	33,75	0,625
5	12,578	12,734	25,313	0,1563
6	9,4727	9,5117	18,984	0,0391
7	7,1143	7,124	14,238	0,0098
8	5,3381	5,3406	10,679	0,0024
9	4,0042	4,0048	8,009	0,0006
10	3,0033	3,0035	6,0068	0,0002
11	2,2525	2,2526	4,5051	4E-05
12	1,6894	1,6894	3,3788	1E-05
13	1,2671	1,2671	2,5341	2E-06
14	0,9503	0,9503	1,9006	6E-07
15	0,7127	0,7127	1,4254	1E-07
16	0,5345	0,5345	1,0691	4E-08
17	0,4009	0,4009	0,8018	9E-09
18	0,3007	0,3007	0,6014	2E-09

Figure 4 : copie d’écran tableur d’un élève

Cependant, ce que nous souhaitons illustrer ici est que les échanges avec l’enseignante, au moment où les élèves doivent s’engager dans la preuve du fait que les suites (U_n) et (V_n) sont géométriques, montrent bien combien cette étape importante de la preuve est problématique à gérer, à la fois pour les élèves et pour le professeur. D’une part, les élèves ne semblent pas comprendre les statuts différents d’une preuve et d’une conjecture réalisée grâce à l’ordinateur :

> *« E : ça il faut le faire sur l’ordi, le fait qu’elles sont convergentes ou pas ? »*
>
> *(...)*

D’autre part, le professeur, qui n’arrive pas à faire émerger chez les élèves cette nécessité d’une preuve mathématique des faits observés, contraint ceux-ci par sa vision très personnelle de l’exploitation des données du tableur :

> *« P : ... vous pouvez prouver en utilisant l’ordinateur...*
>
> *(...)*
>
> *P : Trouve quelque chose qui soit plus percutant...*
>
> *(...)*
>
> *E : Faut l’écrire en gras ? (l’élève ne comprend pas ce qu’attend de lui le professeur)*
>
> *P : je calculerais Un+1 sur Un*
>
> *(...) »*

En fait, le professeur souhaite que les élèves introduisent deux nouvelles colonnes pour faire apparaître les rapports constants U_{n+1}/U_n et V_{n+1}/V_n ce qui, d’une part, peut ici aussi enfermer les élèves dans l’idée que l’ordinateur apporte une preuve de la conjecture émise, et d’autre part ne correspond pas à une étape nécessaire pour passer de la conjecture à la preuve papier. D'ailleurs, plusieurs élèves observés lors de cette séance, qui ont déjà à ce moment réalisé leur conjecture au vu des quatre colonnes tableur passent directement à la démonstration papier sans chercher à faire apparaître des colonnes supplémentaires, et artificielles à leurs yeux. En outre, faire afficher les rapports U_{n+1}/U_n et V_{n+1}/V_n n'est possible sur la machine si les valeurs U_n et V_n sont non nulles, ce qui se vérifie pragmatiquement sur l'ordinateur mais doit se prouver rigoureusement en papier-crayon. Par rapport à ce que souhaiterait le professeur, il y a donc une double rupture : d'une part avec ce que veulent faire les élèves et d'autre part avec la démonstration en papier-crayon.

4. *Quelle articulation entre le travail expérimental et le travail de conjecture et de preuve ?*

Ce que nous avons vu ci-dessus nous montre qu'il est délicat d'élucider comment les technologies peuvent permettre aux élèves d'effectuer de bonnes conjectures, difficiles, ou impossibles en papier-crayon. Quelles connaissances doivent être disponibles pour cela ? Notamment, quelles connaissances préalables sur les technologies elles-mêmes sont nécessaires et suffisantes pour émettre des conjectures raisonnables ? Comment comprendre par exemple les simplifications des calculatrices symboliques sans comprendre en même temps ce système de double référence pointé plus haut ? Comment, ensuite, le travail avec les technologies peut-il susciter l'entrée dans la preuve, éventuellement la faciliter parce que, par exemple, elle n'aurait pas été accessible aux élèves en environnement papier-crayon ? Quelles connaissances mathématiques (nouvelles, anciennes) sont alors mises en fonctionnement et comment ? Quelles connaissances nouvelles peuvent s'installer et comment ?

Plus généralement, toutes les notions sont-elles intéressantes à introduire ou même à travailler avec les technologies ? Cette question, qui dépasse la dimension expérimentale des mathématiques, reste toujours importante tant sa réponse semble complexe. Les technologies peuvent-elles par exemple aider à faire s'installer chez des élèves d'un niveau donné des notions formalisatrices, unificatrices, généralisatrices (FUG), comme les a introduites Robert (1998) ; notions pour lesquelles les situations d'introduction, et les situations fondamentales notamment, sont par la nature même de ces notions très difficiles à concevoir ? Les recherches sur certaines technologies (géométrie dynamique et tableur notamment) amènent à penser que la réponse est positive. La figure géométrique au niveau sixième ou la formule algébrique au niveau cinquième ne sont-elles pas de telles notions FUG à ces niveaux ? La géométrie dynamique s'est justement développée sur la distinction dessin / figure et sur l'idée que la fonctionnalité de déplacement devait permettre un nouveau rapport des élèves à cette distinction. Le tableur, même s'il n'est pas à l'origine développé à des fins d'enseignement, semble également être un bon outil à la transition arithmétique algèbre comme l'a montré Haspekian dans sa thèse (Haspekian 2005).

Nous allons étudier de plus près un exemple qui montre la possibilité de pertinence des outils technologiques pour introduire des notions difficiles auprès des élèves, concernant la notion de paramètre au lycée et la fonctionnalité de curseur du logiciel GeoGebra. Dans l'exemple suivant, inspiré d'un sujet de l'épreuve pratique au Baccalauréat S, les élèves qui, travaillent sur GeoGebra, doivent conjecturer le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = k\,x^2$ en fonction du paramètre k.

TP type BAC sur logiciel de géométrie

On donne un paramètre réel k. On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation (E) $\ln(x) = kx^2$ pour x strictement positif.

1) En utilisant un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer suivant les valeurs du paramètre k le nombre de solutions de l'équation (E).

Appeler le professeur pour vérifier vos conjectures selon les différentes valeurs de k.

2) Justifier sur votre feuille ces conjectures.

Figure 5 : énoncé de l'exercice ln(x)=kx²

La disponibilité et l'utilisation à bon escient de la notion mathématique de paramètre peut être favorisée par la disponibilité de la fonctionnalité de curseur de GeoGebra. Dans cet exemple, les élèves ayant repéré le rôle important du paramètre k doivent donc introduire d'eux-mêmes un curseur dans GeoGebra pour tracer par exemple les deux courbes $y=\ln(x)$ et $y=kx^2$. Ils doivent ainsi transformer le problème de résolution d'une équation fonctionnelle en problème d'intersection de courbes, ce qui correspond à un changement de cadre de travail qui participe de la complexité du sujet. L'exploration sur le logiciel permet donc d'approcher la valeur de k pour laquelle le nombre de solutions à l'équation change (0, 1 ou 2) mais elle ne permet pas aux élèves de donner la valeur exacte qui est irrationnelle. Ils doivent donc nécessairement travailler dans l'environnement papier-crayon pour trouver cette valeur exacte de k.

Dans cet exemple, il semble que l'introduction du paramètre puisse être possible avec l'introduction du curseur, que le changement de cadre puisse être accompagné par l'utilisation de GeoGebra, que l'entrée dans la preuve puisse être favorisée par le fait d'obtenir partiellement la conjecture grâce au logiciel et enfin qu'un maintien en activité des élèves puisse être possible par les allers-retours entre machine et papier-crayon que permet ce problème.

Ainsi la question qui se pose, illustrée par ce dernier exemple, est celle de savoir s'il est toujours possible d'articuler un travail expérimental et un travail mathématique de conjecture et de preuve, articulation signifiant que certaines mises en fonctionnement difficiles, liées aux activités de conjecture et de preuve (choix, initiatives, introductions… des adaptations de connaissances comme les introduit Robert 1998) peuvent être réalisées par les élèves, grâce au recours aux technologies.

III Enseigner avec les technologies : questions théoriques et méthodologiques

Dans ce paragraphe, les questions de caractérisation d'une démarche expérimentale avec des technologies se transforment en des questions de compatibilité possibles entre les exigences de cette démarche, la qualité de l'activité mathématique des élèves et la réalité des pratiques enseignantes. Nous reprenons l'exemple précédent avant de dégager des questions aux niveaux théorique et méthodologique.

1. Les technologies et la pratique des enseignants, le cas de la démarche expérimentale

Le sujet évoqué ci-dessus, à propos de ln(x)=kx^2, transformé et proposé par une enseignante à ses élèves de terminale S pour les préparer vers la fin d'année à l'épreuve pratique, conduit à l'énoncé suivant :

TP sur logiciel de géométrie

On donne un réel k. On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx^2$ pour x strictement positif.

1. Lancer le logiciel Geogebra.
2. Dans le champ de saisie en bas, entrer f(x)= ln(x) puis valider. Entrer ensuite x^2, valider. Faire de même avec 0.5*x^2 puis 0.1*x^2 et enfin −x^2. Compléter le tableau :

Valeur de k				
Nombre de solutions d'après le graphique				

3. On veut désormais déterminer de manière plus précise le nombre de solutions. Cliquer sur Fenêtre puis Nouvelle fenêtre et faire apparaître la courbe de la fonction ln dans ce nouveau repère.
4. Entrer $k = 1$ dans la zone de saisie puis valider. Ce nombre apparaît dans la fenêtre Algèbre. Dans le champ de saisie, définir maintenant $g(x) = kx^2$.
5. Pour faire varier le nombre k, cliquer avec le bouton droit sur ce nombre et cocher Afficher l'objet.

Figure 6 : énoncé de l'exercice ln(x)=kx² transformé par un professeur

Dans cette version réalisée en classe, la démarche expérimentale est malmenée par la fragmentation de la tâche en sous-tâches (questions 3, 4, 5 et 6). Par exemple, la mobilisation autonome du curseur associé à l'idée que le problème comporte un paramètre, le changement de cadre de l'énoncé initial, sont pris en charge par l'énoncé. En outre, l'activité expérimentale est initiée par le test de cas particuliers, ce qui pourrait rester du seul ressort des élèves (question 2). Ceci semble favoriser le fait que les élèves restent, plus facilement qu'avec l'énoncé brut, en activité. Cependant, comme le relate l'enseignante a posteriori, le TP sous cette forme est rapide, 45 minutes. En outre, l'enseignante explique que l'activité demandée de tester différentes valeurs de k, de tracer les courbes correspondantes et de remplir le tableau, n'est pas du tout connectée par les élèves au problème général. En reprenant avec prudence la dialectique introduite par Samurçay et Rabardel (2004) pour des professionnels en situation de travail, dialectique entre activité productive et activité constructive, il est possible de dire que cet énoncé entretien effectivement l'activité productive des élèves sur leur machine mais génère peu l'activité constructive bénéfique à la compréhension et à la résolution du problème dans sa généralité.

Quoi qu'il en soit, certains autres enseignants choisissent de proposer le sujet brut ln(x)=kx^2 à leurs élèves, et semblent parvenir à mettre en place dans la classe une démarche expérimentale à partir de ce sujet. Comment expliquer ces différences d'un enseignant à l'autre ?

2. L'enseignant et les technologies, questions théoriques

Quel est plus précisément le rôle de l'enseignant travaillant en classe avec les technologies ? Quels facteurs vont déterminer les stabilités, et les évolutions, de la pratique des enseignants travaillant avec des technologies ? Ici nous allons nous pencher, non pas sur ces facteurs, mais sur les théories susceptibles d'être mobilisées pour répondre à de telles questions, et sur les interrogations suscitées par la confrontation de différentes théories.

Médiation sémiotique et approche instrumentale

Le projet Remath évoqué plus haut (§ 1) a conduit à mettre en regard deux théories spécialement dédiées à l'étude du recours aux technologies et de son impact pour l'enseignement et l'apprentissage: la théorie de la médiation sémiotique (Bartolini Bussi & Mariotti 2008) et l'approche instrumentale (Rabardel 1995, Guin & Trouche 2002). La première postule la nécessité de cycles didactiques dans le processus d'enseignement apprentissage, cycle où les élèves sont en activité sur des tâches et sur des artefacts, produisent des signes qui sont plus ou moins axés sur l'artefact – les signes artefacts – ou plus ou moins axés sur les mathématiques – les signes mathématiques. Mais ce sont des signes individuels aux élèves. L'évolution des signes artefacts des élèves vers des signes mathématiques est promue par le professeur dans une discussion collective. Il s'agit donc d'exploiter le potentiel sémiotique de l'artefact. Dans l'approche instrumentale, le rôle du professeur est théorisé en termes d'orchestration instrumentale (Trouche 2004). L'attention est centrée sur l'accompagnement par le professeur des genèses instrumentales des élèves.En effet, l'apprentissage est modélisé parle développement d'un instrument à partir de l'artefact, c'est-à-dire par la construction de schèmes d'actions instrumentées par l'artefact, dans un double processus d'instrumentalisation (l'élève prend en main l'artefact) et d'instrumentation (l'artefact façonne les connaissances des élèves).

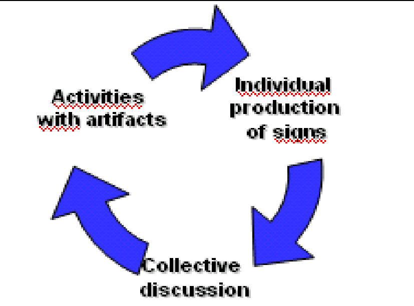
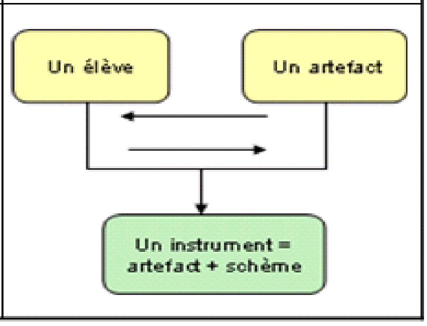
Théorie de la médiation sémiotique (Mariotti)	Approche instrumentale (du côté de l'élève)
	

Figure 7 : schématisations associées à la théorie de la médiation sémiotique et à l'approche instrumentale

La question de la « décontextualisation instrumentale » se pose alors lorsqu'on étudie la façon dont peut se passer la discussion dans la théorie Italienne. En effet, le professeur y mène la discussion pour dissocier les connaissances mathématiques des connaissances instrumentales. Ceci contraste donc avec l'approche instrumentale où les connaissances mathématiques sont construites entremêlées avec des connaissances instrumentales et où la décontextualisation n'est pas prise en charge. Quelle nécessité de décontextualisation, dans le travail en classe avec les technologies ? Est-ce que celle-ci doit s'insérer dans les orchestrations instrumentales mises en place par le professeur ?

Double approche et approche documentaire

Le rôle du professeur, son appropriation des technologies, étaient au centre du projet GUPTEn (Lagrange *et al.* 2009). Ce projet a amené à étendre l'approche instrumentale au cas du sujet enseignant (Bueno-Ravel & Gueudet 2009) ; il a aussi suscité une première mise en regard de cette approche instrumentale généralisée avec la double approche, didactique et ergonomique, des pratiques enseignantes (Robert & Rogalski 2002). Par ailleurs, et notamment à la suite du projet GUPTEn a été développée l'approche documentaire du didactique (Gueudet & Trouche 2009a) ; nous allons interroger ici l'articulation entre double approche et approche documentaire.

Ces deux théories empruntent à l'ergonomie cognitive. La double approche didactique et ergonomique des pratiques enseignantes est un cadre d'analyse de l'activité des enseignants en situations de classes ordinaires. Dans cette théorie, Robert et Rogalski postulent que la pratique d'un enseignant (terme qui désigne : « tout ce qui se rapporte à ce que l'enseignant pense, dit ou ne dit pas, fait ou ne fait pas, sur un temps long » Robert 2008, p. 59) est stable à une certaine échelle, plus large que celle des seules situations d'enseignement avec des technologies. Elles introduisent cinq composantes de la pratique d'un enseignant :

- une composante cognitive caractéristique des choix récurrents de l'enseignant au niveau de ses scénarios et des contenus qu'il propose à ses élèves ;
- une composante médiative caractéristique de la façon qu'il a d'aider ses élèves, par la forme de ses énoncés ou par son discours pendant les déroulements, indépendamment de situations spécifiques d'enseignement;
- les composantes sociales et institutionnelles, externes à l'enseignant ;
- la composante personnelle liée aux conceptions du savoir qu'à l'enseignant, à sa représentation des modes d'apprentissage des élèves et à son histoire propre d'exercice du métier.

La pratique d'un enseignant est non seulement stable mais aussi cohérente et complexe, c'est-à-dire non réductible à la juxtaposition des cinq composantes. Cohérence, complexité et stabilité de la pratique d'un enseignant se conjuguent à l'évolution de son activité au fil des situations d'enseignement avec des technologies. Elles ne signifient pas invariance de l'activité enseignante mais adaptations des formes d'organisation de son activité aux situations d'enseignement (Vergnaud 2002) .

L'approche documentaire du didactique (Gueudet & Trouche 2009a), qui s'inspire de l'approche instrumentale (Guin & Trouche 2002), est également ancrée dans l'ergonomie cognitive. Elle s'appuie, de plus, sur d'autres recherches, relevant de l'ingénierie documentaire (Pédauque 2006), qui a mis en lumière les bouleversements liés au numérique, et de l'étude du curriculum material (Remillard 2005), qui considère les interactions entre les professeurs et la documentation scolaire. L'approche documentaire se centre d'emblée sur les ressources du professeur, en conférant au terme ressource un sens très large, désignant tout ce qui est susceptible de re-sourcer la pratique du professeur (Adler 2000). Cette approche s'intéresse au travail documentaire du professeur : collecter des ressources, les associer, concevoir une séance, la mettre en œuvre, la réviser etc. Ce travail, qui se déroule dans des lieux, des temps, et des collectifs très divers, est au centre de l'activité professionnelle des professeurs. Au cours de son interaction avec un ensemble de ressources, pour une classe de situations donnée, à travers différents contextes, le professeur développe un document, entité mixte composée de ressources recombinées et d'un schème d'utilisation de ces ressources. Ce processus est nommé genèse documentaire. L'ensemble des documents d'un professeur constitue un système documentaire dont la structure évolutive est étroitement liée à celle du système d'activités professionnelles du professeur. Ainsi les évolutions et les stabilités sont liées aux genèses, porteuses de changement comme d'invariance. L'intégration, en particulier, d'une nouvelle technologie dépend de la possibilité pour celle-ci d'être associée à certaines ressources appartenant au système de ressources du professeur (la partie « ressources » de son système documentaire). Elle dépend aussi du système des connaissances professionnelles du professeurs.

La double approche, comme l'approche documentaire, reconnaissent la délicate articulation entre évolutions et stabilités dans la pratique des enseignants. La double approche précise celles-ci en distinguant différentes composantes dans l'activité de professeurs. L'approche documentaire recherche les déterminants des évolutions en considérant des ressources, les classes de situations pour lesquelles celles-ci sont mobilisées, et les connaissances professionnelles associées. L'articulation de ces deux théories reste à préciser : quelle place pour les composantes dans l'approche documentaire ? Peuvent-elles contribuer à classifier les connaissances professionnelles ? Quelle prise en compte du travail hors classe des professeurs, dans la double approche ?

Les théories évoquées ci-dessus se penchent essentiellement sur des déterminants individuels. Un tel regard peut certes contribuer à élaborer des actions de formation continue destinées à des groupes d'enseignants, nous y reviendrons dans ce qui suit (§ 4). Mais est-ce une échelle suffisante pour traiter des questions d'intégration des technologies ? Le décalage entre les attentes institutionnelles et les usages réels n'a-t-il pas de déterminants plus larges, à un niveau systémique ?

Ruthven (2009) propose un cadre interprétatif qui prend appui sur des recherches concernant les caractéristiques structurantes de la pratique scolaire d'une part et sur des études concernant l'intégration des technologies d'autre part. Il identifie cinq caractéristiques structurantes de la pratique de classe : l'environnement de travail, le système de ressources, le format d'activité, le script curriculaire et l'économie temporelle. Le concept de format d'activité concerne les modes d'action et d'interaction qui conditionnent les contributions de l'enseignant et des élèves ; le concept de script curriculaire désigne le modèle de buts et d'actions qui sert à guider l'enseignement d'un thème particulier. Ainsi le cadre proposé par Ruthven accorde au final une place importante au script curriculaire, forgé par l'enseignant au fil de sa pratique professionnelle, et même les autres caractéristiques, pour être précisées, devront se situer au niveau d'un individu.

Etudiant également les questions d'intégration, Assude (2007) propose de considérer de manière articulée les changements et les résistances des professeurs. Elle distingue en particulier cinq indicateurs de changement : facteurs, acteurs, degré, effet, valeur ; et cinq types de résistances : personnelles, institutionnelles, symboliques, éthiques et temporelles. Dans ce cadre, même si la nécessité de prise en compte de résistances personnelles est soulignée, les concepts proposés semblent pouvoir permettre des études plus globales. Reste alors à mettre en œuvre de telles études, notamment en construisant des méthodologies appropriées.

3. L'enseignant et les technologies, questions méthodologiques

Les approches qui demandent un suivi détaillé de la pratique (double approche, approche documentaire, caractéristiques structurantes de la pratique enseignante) renvoient à la question du professeur « ordinaire », évoquée plus haut (§ 1) : les études associées devront analyser précisément la pratique de quelques individus, ainsi le choix de ceux-ci sera déterminant. Comment accéder de cette manière à des résultats significatifs, au-delà du sujet étudié ?

Cette question méthodologique (qui n'est ni nouvelle, ni spécifique à l'enseignant travaillant avec les technologies) est encore plus sensible avec les approches qui supposent un suivi dans la durée. Les questions d'évolution de pratique nécessitent un tel suivi, se déployant dans des lieux divers. Ceci suscite d'autres difficultés méthodologiques au sujet desquelles Gueudet & Trouche (2009b) proposent des solutions fondées sur une investigation réflexive de la pratique du professeur, recourant en particulier à des outils de type journal de bord, et articulant suivi hors classe et en classe.

Ces outils sont évidemment difficilement compatibles avec la prise en compte d'échantillons larges de professeurs. A propos des professeurs, cette question d'échelle est toujours posée. En France, certaines études portent sur des groupes de professeurs stagiaires en formation initiale ; en dehors de ce cas particulier, quelques études par questionnaires soutiennent des démarches quantitatives mais celles-ci sont rares. De plus, une prise en compte fine de la technologie semble nécessiter l'observation directe des interactions du professeur avec les ressources concernées. Le problème du passage à une échelle large semble tout aussi délicat pour l'étude de la pratique que pour la diffusion des travaux expérimentaux (questions de up-scaling, largement étudiées dans des travaux anglo-saxons, voir par exemple Hegedus & Lesh 2008). Ainsi l'une des pistes qui semblent actuellement particulièrement prometteuses est l'intérêt porté à certains collectifs de professeurs. Des collectifs réduits (équipe de professeurs de mathématiques dans un collège par exemple) permettent de dépasser le niveau individuel ; des collectifs plus larges (association d'enseignants) pourraient donner au chercheur l'occasion d'études quantitatives approfondies. De plus les technologies actuelles entraînent d'importantes mutations de ces collectifs, ce qui justifie l'intérêt spécifique que nous leur portons ici.

IV Technologies et collectifs

Les technologies ouvrent des possibilités de mise en réseau, et donc de travail collectif. Quelles sont, plus précisément, ces possibilités ? Qu'est-ce que modifient ces mises en réseau pour l'enseignement et l'apprentissage ?

1. Collectifs d'élèves

Il peut s'agir, tout d'abord, de susciter des collectifs d'élèves. A propos de l'emploi des technologies pour la démarche expérimentale, la possibilité de travaux collectifs est signalée comme un des apports majeurs (Kim *et al.* 2007). En sciences expérimentales, les technologies portables (téléphones portables bluetooth équipés de systèmes vidéo ; GPS...) permettent la communication entre des élèves sur le terrain et d'autres, restés en classe pour interpréter les données reçues. Certains rallyes mathématiques utilisent également ces technologies portables (Dunleavy & Dede 2008). Plus classiquement, les recherches se penchent sur l'utilisation d'ordinateurs en réseau, ou de tableaux blancs interactifs partagés, pour la résolution collaborative de problèmes (Hwang *et al.* 2006). Ces travaux relèvent du courant de recherche désigné par l'acronyme CSCL: Computer Supported Collaborative Learning (Dillenbourg & Fischer 2007). Celui-ci a donné lieu à de nombreuses publications, une revue spécialisée y est consacrée (ijCSCL, International Journal of Computer Supported Collaborative Learning, publié par Springer). Les travaux relevant du CSCL sont souvent centrés sur l'analyse des interactions entre élèves ; ils étudient à partir de ces interactions l'impact de la technologie sur la construction collective de connaissances par les élèves, dans une perspective se réclamant du socio-constructivisme et de la cognition située. Ces travaux restent pour l'essentiel peu didactiques ; de même peu de travaux en didactique des mathématiques ont jusqu'à présent cherché à élucider les conséquences spécifiques de l'apprentissage collectif utilisant les technologies. Il en existe cependant certains, comme ceux que nous avons évoqués ci-dessus (§ 1), portant sur les calculatrices en réseau (Hivon *et al.* 2008) ou sur le logiciel SimCalc® (Hegedus *et al.* to appear) associé à des dispositifs de projection de différentes productions d'élèves sur un même écran. Comment prendre en compte des dimensions didactiques dans le CSCL ? Répondre à cette question, montrer la pertinence d'une telle prise en compte, reste une tâche à accomplir par les didacticiens.

2. Collectifs formés des élèves et du professeur

Curieusement, comme les recherches en didactique des mathématiques sur les technologies, le CSCL a récemment évolué vers un plus grand intérêt accordé au rôle du professeur, qui était jusqu'alors plutôt négligé (le CSCL est issu de travaux concernant le e-learning ; de même, ces travaux ont été longs à identifier l'importance du rôle du professeur, comme si la distance tendait à faire oublier l'existence de celui-ci). Plus curieusement encore, cette prise en compte se fait à travers la notion d'orchestration, récemment introduite dans le champ du CSCL (Dillenbourg *et al.* 2009). On retrouve ainsi l'une des évolutions majeures des recherches (sur les technologies, mais pas uniquement, Sensevy & Mercier 2007) en didactique des mathématiques : l'intérêt pour des collectifs formés du professeur et de ses élèves, et pour le rôle du professeur au sein de ces collectifs. La notion d'orchestration instrumentale, qui fournit une conceptualisation de ce rôle, a donné lieu à des travaux récents. Elle est définie comme « l'organisation systématique des artefacts disponibles dans un environnement donné, pour la mise en œuvre d'une activité mathématique donnée » (Trouche 2009). Ainsi l'orchestration comporte une dimension d'apprêt d'un problème mathématique, autant que d'apprêt des artefacts qui seront utilisés. Elle ne concerne pas que la préparation de ce qui sera fait en classe, mais aussi la mise en œuvre elle-même. C'est pourquoi Drijvers *et al.* (to appear) proposent de distinguer, parmi les composantes de l'orchestration, ce qu'ils nomment *la performance didactique* : l'ensemble des décisions prises par le professeur dans le cours de sa mise en œuvre d'un problème mathématique. Pour ces décisions, les réactions des élèves, leurs productions, jouent un rôle fondamental. La performance didactique est une performance conjointe du professeur et des élèves ; on retrouve ici des constats qui dépassent largement le cadre de la recherche sur les technologies, voire sur les ressources en général.

3. Collectifs de professeurs

Dernier type de collectif, pour lequel la recherche considère les évolutions engendrées par les technologies : les collectifs de professeurs. Ce questionnement est détaillé dans Gueudet et Trouche (2009b) ; ici nous l'évoquons brièvement. Les possibilités de communication distantes, le développement de l'Internet en particulier ont engendré, selon un rapport récent (Pochard 2008), « une dynamique du collectif ». Ce rapport ne considère que la situation en France ; nous ne faisons pas ici d'hypothèses sur la situation dans d'autres pays, car ces dimensions collectives dépendent largement de facteurs institutionnels et culturels. Ainsi en Angleterre, les professeurs du secondaire travaillent au sein de départements disciplinaires dans leurs établissements. Ces départements fournissent des ressources, offrent un lieu, un cadre pour le travail commun (Ruthven 2009). Au Japon, les professeurs travaillent également ensemble à la préparation de séances de classe, qui donneront lieu à une mise en œuvre observée collectivement, dans le cadre de la formation continue qui prend cette forme de *lesson studies* (Myiakawa & Winsløw 2009). Dans ces pays où le travail collectif est institutionnellement organisé en présence, l'arrivée d'Internet n'a sans doute pas entraîné les mêmes modifications qu'en France. Les professeurs téléchargent des ressources en ligne, échangent par courrier électronique, s'abonnent à des listes de diffusion... Un phénomène particulièrement significatif est l'essor de l'association Sésamath (Kuntz *et al.* 2008), et le succès de ses ressources : le site web Sésamath enregistre plus de 1,3 millions de connexions mensuelles. Nous avons évoqué ci-dessus (§ 1) les manuels Sésamath, conçus collaborativement par des équipes nombreuses d'enseignants de collège, dont la plupart ne sont pas membres de l'association mais souhaitent s'impliquer dans ce projet. Sésamath propose également une base d'exercices en ligne, Mathenpoche ; un logiciel de géométrie dynamique, Tracenpoche, différentes fiches de cours et d'exercices (les cahiers Mathenpoche, Mathadoc) ... Ce développement étonnant a débuté par la mutualisation de ressources en ligne conçues par quelques professeurs (Gueudet

& Trouche 2009c), qui a débouché sur la conception coopérative de Mathenpoche par une équipe d'une vingtaine de professeurs. Cette équipe s'est ensuite constituée en une communauté de pratique (Wenger 1998) qui s'est étendue pour donner l'association actuelle. Le succès de Mathenpoche a été immédiat ; aujourd'hui encore, aucune ressource comparable n'est disponible. Il ne s'agit pas d'affirmer que le contenu mathématique de Mathenpoche est sans faille, mais simplement de constater que c'est la seule base d'exercices en ligne à couvrir l'intégralité du programme de collège, et à permettre aux professeurs de programmer leurs propres séances d'exercices en puisant dans cette vaste bibliothèque. Le passage à la composition de manuels sous licence libre a été un autre virage déterminant dans la vie de l'association, notamment en amenant l'implication active de nombreux enseignants qui n'étaient encore qu'utilisateurs de ressources Sésamath. Les questions liées à l'avenir de Sésamath sont nombreuses. Les chantiers que représentaient Mathenpoche et le manuel sont achevés, pour le niveau collège. Est-ce que ceci va marquer la fin de l'association, qui se contenterait de maintenances techniques, ou de mises à jour en fonction des évolutions de programmes ? Est-ce qu'elle va trouver un prolongement, au moins temporaire, dans la réalisation de supports similaires pour d'autres niveaux scolaires : lycée, premier degré ? Ou bien est-ce que les réalisations actuelles ne sont qu'une première étape, et qu'un travail va s'engager sur la qualité des ressources disponibles ? Dans tous les cas ceci doit être suivi par la recherche, dont le rôle est aussi de participer activement à ces changements en cours.

L'élaboration collective de ressources pour la classe apparaît également comme un mode potentiellement riche de formation continue des enseignants ; de nombreuses recherches ont mis à jour des résultats qui vont en ce sens (Krainer 2003, Jaworski 2006). Les technologies facilitent la mise en place de ce type de dispositifs, en offrant de nouvelles possibilités de travail distant (Lachance & Confrey 2003). En France, le projet SFoDEM (Guin *et al.* 2008) organisé par l'IREM de Montpellier a développé un dispositif de ce type pour la formation continue de professeurs de mathématiques du second degré, visant l'intégration des technologies. Des équipes de professeurs élaboraient collectivement des ressources pour la classe, en utilisant une plate-forme distante. Actuellement, le programme Pairform@nce du ministère de l'éducation nationale (Gueudet *et al.* 2009) qui poursuit des objectifs semblables adopte des principes comparables, pour tous les niveaux scolaires et toutes les disciplines. Comment accompagner l'élaboration collective de séquences de classe ? Il s'agit d'un questionnement relevant du méta-design (Fischer & Ostwald 2003). Le SFoDEM a montré que le travail documentaire collectif produisait en particulier des *modèles de ressources* : caractéristiques communes à des ensembles de ressources, qui sont issus du travail commun, mais sont également essentiels pour permettre ce travail commun. Ainsi, les manières de décrire une séance de classe sont nombreuses ; l'élaboration d'une telle séance par une équipe de professeurs nécessite le choix d'une forme de description commune. Lorsqu'un modèle, ou une partie de celui-ci, est fourni par un formateur on parle d'*assistance méthodologique* (Guin & Trouche 2008), ce qui rejoint la notion de *seeds* introduite dans le champ du méta-design. Ainsi l'accompagnement de l'élaboration collective de séquences de classe passe par la proposition d'une assistance méthodologique, contribuant à l'émergence de modèles qui vont permettre le travail documentaire collectif et l'émergence de communautés de pratique. Dans chaque contexte de formation, il s'agit alors de déterminer quelle peut-être cette assistance méthodologique : c'est le rôle du formateur, mais aussi celui du chercheur.

V Conclusion

Pour cette revue de questions, nous avons fait le choix d'approfondir certaines directions dans le champ foisonnant des recherches en didactique des mathématiques sur les technologies. Ces recherches sont souvent réparties selon les trois catégories articulées de l'apprentissage, de l'enseignement, et du design. Ici nous n'avons pas consacré une partie spécifique au design, préférant examiner de plus près les questions liées aux collectifs, qui nous semblent constituer un thème de recherche encore peu exploré, et en cours de développement. Nous avons cependant abordé dans chaque partie des points liés au design : élaboration de ressources, de scénarios d'usage, accompagnement de cette élaboration, formation. Dans le domaine des technologies, la recherche est en prise directe avec l'action didactique, et donc le design est toujours présent. Les chercheurs doivent contribuer au design de ressources de qualité (qui incluent les scénarios d'usage). Dans la situation actuelle où de nombreuses ressources sont disponibles, la recherche doit aussi pouvoir fournir aux enseignants des outils de choix de ces ressources, outils d'évaluation de leur qualité en particulier. Qu'est-ce que la qualité d'une ressource, d'un point de vue didactique ? Quels critères retenir ? La participation des utilisateurs au processus de conception est un moyen essentiel pour garantir certaines formes de qualité : adaptation au programme, réalisabilité en classe (Trgalova *et al.* to appear). Cependant la qualité d'une ressource scolaire, du scénario d'utilisation associé, ne peut être séparée de la question de l'efficacité de l'enseignement utilisant cette ressource et ce scénario. Comment évaluer cette efficacité ? La recherche doit se saisir de cette question centrale, et des difficultés méthodologiques associées.

VI Références

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education, *Journal of Mathematics Teacher Education,* 3, 205–224.

Archambault, D., Fitzpatrick, D. (2008). Impact of ICT on the Teaching of Maths to VIP (Visually Impaired People), *JEM Workshop 5*, Paris, http://www.jem-thematic.net/en/node/1205.

Artigue, M (1995). Un regard didactique sur l'utilisation des outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques, *Repères IREM*, 19, 77-100.

Artigue, M. (2007). Digital technologies: a window on theoretical issues in mathematics education Plenary 4. Pitta-Pantazi D. & Philippou G. (eds.) *Proceedings of the fifth congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME,* 68-82.

Artigue, M., Bardini, C. (to appear). New didactical phenomena prompted by TI-Nspire specificities – the mathematical component of the instrumentation process, *Proceedings of CERME 6*, Lyon, France.

Artigue, M., Gueudet, G. (2008). Ressources en ligne et enseignement des mathématiques, Université d'été de mathématiques, Saint-Flour.

Assude, T. (2007). Changements et résistances à propos de l'intégration des technologies dans l'enseignement des mathématiques au primaire, Colloque TICE Méditerrannée.

Assude T., Bonnet J.-F., Rabatel J.-P., Gelis J.-M. (2007). La géométrie dynamique dans des classes de cycles 2 et 3. *Actes du XXXIIIème colloque sur la formation des maîtres*, 1-13, CRDP de Versailles, CDDP de l'Essonne Evry.

Bartolini Bussi, M.G., Mariotti, M.A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English et al. (eds.) Handbook of International Research in Mathematics Education, second revised edition. Lawrence Erlbaum, Mahwah, NJ.

Bueno-Ravel, L. Gueudet, G. (2009). Online resources in mathematics : teachers' geneses and didactical techniques. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 14(1), 1-20.

Cazes, C., Gueudet, G., Hersant, M., Vandebrouck, F. (2007). Using E-Exercise Bases in mathematics: case studies at university, *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 11(3), 327-350.

Delahaye, J-P. (2005). Mathématiques expérimentales, *Pour la science*, 331, 88-93

Dillenbourg, P., Fischer, F. (2007). Basics of Computer-Supported Collaborative Learning, *Zeitschrift für Berufs- und Wirtschaftspädagogik*. 21, 111-130.

Dillenbourg, P., Järvelä, S., Fischer, F. (2009). The evolution of research on computer-supported collaborative learning: from design to orchestration, in N. Balacheff, S. Ludvigsen, T. de Jong, T., A. Lazonder & S. Barnes (eds.) *Technology-Enhanced Learning. Principles and products* (pp. 3-19). Berlin : Springer.

Dunleavy, M., Dede, C., Mitchell, R. (2008). Affordances and limitations of immersive participatory augmented reality simulations for teaching and learning, *Journal of Science Education and Technology*, 18 (1), 7-22.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P.,Van Gisbergen, S. (to appear). Instrumental orchestration: Theory and practice. *Proceedings of CERME 6,* Lyon, France.

Fischer G., Ostwald J. (2003). Knowledge Communication in Design Communities, in R. Bromme, F. Hesse, H. Spada (eds.), *Barriers and Biases in Computer-Mediated Knowledge Communication* (pp. 1-32). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gueudet, G., Bottino, R.M., Chiappini, G., Hegedus, S., Weigand, H.-G. (to appear). Technologies and resources in mathematics education, *Proceedings of CERME 6*, Lyon, France.

Gueudet, G., Soury-Lavergne, S., Trouche, L. (2009). Soutenir l'intégration des TICE : quels assistants méthodologiques pour le développement de la documentation collective des professeurs ? Exemples du SFoDEM et du dispositif Pairform@nce, in C. Ouvrier-Buffet, M.-J. Perrin-Glorian (dir.), *Approches plurielles en didactique des mathématiques,* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot, Paris, pp. 161-173.

Gueudet G., Trouche L. (2009a). Towards new documentation systems for teachers? *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 199-218.

Gueudet G., Trouche L. (2009b). La documentation des professeurs de mathématiques, in L.Coulange et C. Hache (dir.), *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques 2008*, 249-269, IREM, Université Paris 7.

Gueudet G., Trouche L. (2009c). Conceptions et usages de ressources pour et par les professeurs, développement associatif et développement professionnel, *Les dossiers de l'ingénierie éducative* 65, 76-80.

Guin D., Joab M., Trouche L. (dir.) (2008). *Conception collaborative de ressources pour l'enseignement des mathématiques, l'expérience du SFoDEM*, INRP et IREM (Université Montpellier 2).

Guin, D., Trouche, L. (dir.) (2002). *Calculatrices symboliques : transformer un outil en un instrument du travail mathématique, un problème didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Guin, D., Trouche, L. (2008). Un assistant méthodologique pour étayer le travail documentaire des professeurs : le cédérom SFoDEM 2008. *Repères IREM,* 72, 5-24.

Haspekian, M. (2005). An instrumental approach to integration of a computer tool into mathematics teaching: the case of spreadsheets, *International Journal of Computer for Mathematics Learning*, 10, 109-141

Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: interactions with robust and soft Cabri constructions. Dans T Nakahara et M Koyama (eds.), *Proceeding of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. pp 103-117. Hiroshima. Hiroshima University

Hegedus, S., Lesh, R. (2008). *Democratizing Access to Mathematics through Technology: Issues of Design, Theory and Implementation- In memory of Jim Kaput's work*. Special issue of *Educational Studies in Mathematics,* 68(2).

Hegedus, S., Moreno, L., Dalton, S., Brookstein, A. (to appear). Establishing a longitudinal efficacy study using SimCalc MathWorlds®, *Proceedings of CERME 6*, Lyon, France.

Hivon, L., Péan, M., Trouche, L. (2008). D'un réseau de calculatrices à la construction collaborative du savoir dans la classe, *Repères-IREM 72,* 79-102.

Hoyles, C., Lagrange, J.-B. (to appear). *Digital technologies and mathematics teaching and learning: Rethinking the terrain*, ICMI 17 study, Springer.

Hwang, W.-Y., Chen, N.-S., Hsu R.-L. (2006). Development and evaluation of multimedia whiteboard system for improving mathematical problem solving. *Computers & Education*, 46(2) 105-121.

Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education* 9, 187-211.

Kim, M.C., Hannafin, M.J., Ryan, L.A. (2007). Technology-Enhanced Inquiry Tools in Science Education : An Emerging Pedagogical Framework for Classroom Practice, *Science Education,* 91 (6), 1010-1030.

Krainer, K. (2003). Editorial. Teams, communities and networks. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 6, 93-105.

Kuntz, G., Hache, S., Clerc, B. (2009). Sésamath : un modèle pour créer, éditer et apprendre des mathématiques, dans un nouveau cadre économique. *Repères IREM 75*, 46-66.

Kynigos, C., Bardini, C., Barzel, B., Maschietto, M. (2007). Tools and technologies in mathematical didactics, in D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1332-1338). Larnaca, Cyprus.

Laborde, C. (1999). Vers un usage banalisé de Cabri-Géomètre avec le TI-92 en classe de seconde : analyse des facteurs de l'intégration, in D. Guin (ed.) *Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques. Actes du colloque francophone européen* (pp.79-94). Montpellier : IREM, Université de Montpellier 2.

Lachance, A., Confrey, J. (2003). Interconnecting content and community: a qualitative study of secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education* 6, 107-137.

Lagrange, J.-B., Artigue, M., Laborde, C., Trouche, L. (2003). Technology and Mathematics Education : A Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation, in A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and F.K.S. Leung (eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 239-271). Dordrecht : Kluwer.

Lagrange, J.-B., Blanchard, M., Loisy, C., Vandebrouck, F. (dir.) (2009). *Genèses d'usages professionnels des technologies chez les enseignants,* rapport final de l'ACI GUPTEn, http://gupten.free.fr (consulté le 15 octobre 2009).

Lagrange, J.-B., Erdogan, E.O. (2009). Teachers' emergent goals in spreadsheet-based les - sons: analyzing the complexity of technology integration. *Educational Studies in Mathemat - ics* 71(1), 65-84.

Linn, M. C., Clark, D., Slotta, J. D. (2003). WISE design for knowledge integration. *Science education* 87, 517-538.

Lombard, P. (2008). Les méthodes expérimentales en géométrie, *Repère IREM*, 73, 21-47

Mercier, A., Rouchier, A., Lemoyne, G. (2001). Des outils et techniques d'enseignement aux théories didactiques, in A. Mercier, A. Rouchier, G. Lemoyne, *Le génie didactique, Usages et mésusages des théories de l'enseignement*, (pp. 233-250), Bruxelles : De Boeck Université.

Miyakawa, T., Winsløw, C. (2009). Un dispositif japonais pour le travail en équipe d'ensei - gnants : étude collective d'une leçon, *Education et Didactique 3(1)*

National Science Teacher's Association (2004). Position Statement on Scientific Inquiry, http://www.nsta.org/about/positions/inquiry.aspx

Pédauque, R. T. (coll.) (2006). *Le document à la lumière du numérique*. Caen : C & F éditions.

Perrin, D. (2007). L'expérimentation en mathématiques, *Petit x*, 73, 6-34

Pochard, M. (2008). *Livre vert sur l'évolution du métier d'enseignant*. Ministère de l'éducation nationale, en ligne à l'adresse http://lesrapports.ladocumentationfrancaise.fr/BRP/084000061/0000.pdf

Robert A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'uni - versité. *Recherches en Didactique des Mathématiques*,18 (2) pp 139-190.

Robert, A. (2008). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques, in La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants, F. Vandebrouck (Ed) (partie 1, chapitre 3) Toulouse : Octarès

Robert A., Rogalski J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Revue Canadienne de l'Enseignement des Sciences, des Mathématiques et des Technologies*. Vol 2 (4) pp 505-528.

Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H., Hemmo, V. (2007). Science Education Now : a Renewed Pedagogy for the Future of Europe, rapport d'experts pour la commission européenne. http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_en.pdf

Ruthven, K. (2009). Towards a Naturalistic Conceptualisation of Technology Integration in Classroom Practice: the example of school mathematics, *Education et Didactique* 3(1), 131-149.

Samurcay R., Rabardel P. (2004). Modèles pour l'analyse de l'activité et des compétences: propositions. Dans *Recherches en Didactique Professionnelle,* R. Samurcay et P. Pastré (Eds). Toulouse : Octarès.

Sensevy, G., Mercier A. (2007). *Agir ensemble, l'action didactique conjointe du professeur et des élèves*, Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Trgalova, J., Jahn, A.P., Soury-Lavergne, S. (to appear). Quality process for dynamic geometry resources: the Intergeo project. *Proceedings of CERME 6*, Lyon, France.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 9, 281-307.

Trouche L. (2009). Penser la gestion didactique des artefacts pour faire et faire faire des mathématiques : histoire d'un cheminement intellectuel, *L'Educateur* 0309, 35-38.

Van Joolingen W. R., de Jong, T., Dimitrakopoulou A. (2007). Issues in computer supported inquiry learning in science *Journal of Computers Assisted Learning 23(2)***,** 111-119**.**

Vergnaud, G. (2002). La conceptualisation, clef de voûte des rapports entre pratique et théorie, *Analyse de pratiques et professionnalité des enseignants, Actes de la DESCO de l'Université d'Automne,* CRDP de l'académie de Versailles.

Wecker, C C. Kohnlet, C., Fisher, F. (2007). Computer literacy and inquiry learning: when geeks learn less. *Journal of Computer Assisted Learning* 23 (2), 133-144.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice. Learning, meaning, identity*. New York: Cambridge University Press.