Présentation de thèse[1] : Le graphe comme outil pour enseigner la preuve et la modélisation

Léa Cartier

ERTé Maths à modeler

Institut Fourier, Université Joseph Fourier, Grenoble

Résumé

La raison initiale du sujet de cette thèse est l'introduction, pour la première fois en France, d'éléments de théorie des graphes dans le curriculum de l'enseignement secondaire, à savoir celui de la spécialité mathématique de la Terminale économique et sociale (ES) en 2002. Nous montrons dans cet exposé quelques aspects de notre travail de thèse articulés autour de trois problèmes de graphes, celui de la recherche de parcours eulériens dans un graphe, celui de la coloration des sommets d'un graphe et celui dit de Ramsey(3, 3).

En se basant sur des résultats d'expérimentations, nous montrons en quoi le problème eulérien est susceptible de permettre l'introduction de la notion de graphe auprès d'élèves et la manipulation de l'objet graphe, comment il suscite un travail de la modélisation avec l'apparition de deux graphes pour un même énoncé et, enfin, l'accès qu'il permet à un travail sur la preuve et le raisonnement. Dans un deuxième temps, nous décrivons la transposition du problème de coloration des sommets d'un graphe pour la Terminale ES en se basant sur un énoncé prototypique issu du baccalauréat de 2003. Enfin, nous présentons un problème de Ramsey dans le cas particulier (3, 3) qui nous permet de présenter une autre transposition permettant un réel travail mathématique aux élèves.

Ces différents problèmes nous permettent de présenter un ensemble de résultats issus de notre thèse incluant ceux mentionnés ci-dessus. Nous évoquons aussi rapidement le reste du travail effectué durant cette thèse.

Mots clefs

Théorie des graphes, modélisation, modèles eulérien et hamiltonien, situation recherche pour la classe (SiRC), parcours eulériens, théorème d'Euler, coloration des sommets d'un graphe, problème de Ramsey(3, 3)

I Introduction

Les graphes sont apparus dans les programmes français de l'enseignement secondaire en 2002, dans l'option de spécialité mathématique de la Terminale Économique et Sociale (ES). Cela constitue l'introduction d'un nouvel objet mathématique, le graphe, mais aussi, celle d'un nouveau domaine des mathématiques. En effet, même si l'on en trouve quelques traces dans des chapitres consacré au dénombrement, par exemple, les mathématiques discrètes sont un champ des mathématiques que l'on trouve peu dans l'enseignement secondaire français. Or ce champ est particulièrement intéressant pour l'enseignement et l'apprentissage dans la mesure où l'on peut y faire des mathématiques sans rencontrer d'obstacles notionnels (voir Rolland (1999) et Grenier Payan (1998)).

1 Thèse soutenue en octobre 2008, dirigée par Charles Payan et Denise Grenier à l'Institut Fourier et dans l'ERTé *Maths à modeler*, Grenoble

De premières questions naissent de cette brève introduction. Comment les graphes sont-ils apparus au programme ? Dans quel but ? Avec quelle transposition ? Les programmes stipulent que les éléments de théorie des graphes à enseigner doivent l'être uniquement par la résolution de problèmes. Quels problèmes sont donc proposés aux élèves ? Du point de vue pratique, quelle formation a été proposée aux enseignants ? On s'attend en effet à ce que la formation des enseignants prenne en compte la dimension mathématique (la plupart n'ont pas eu de formation initiale en théorie des graphes) et la dimension pédagogique liée à un enseignement « axé sur la seule résolution de problèmes »[2].

Notre recherche est une étude didactique ancrée dans la théorie des situations (Brousseau 2004). Voulant être accessible au plus grand nombre, nous chercherons à éviter les termes dont l'acception est spécifique à la didactique des mathématiques. Notre étude comprendra des éléments historiques et épistémologiques pour lesquelles nous nous baserons en particulier sur l'ouvrage *Graph theory 1736—1936 (*Biggs et al 1976)[3]. Pour mener cette recherche, nous avons émis quelques hypothèses :

- Le modèle de situation-recherche pour la classe (SiRC) (Grenier et Payan 2002) est particulièrement adapté à l'enseignement de la théorie des graphes en Terminale ES, de par la spécificité des mathématiques discrètes, et de par la mise en œuvre sous forme de résolution de problèmes qui dans son sens le plus large est compatible avec le modèle de SiRC.
- Les élèves sont capables de chercher en mathématiques et ainsi de « se retrouver dans la peau d'un chercheur en mathématiques et [tels que lui] s'interroger, essayer, tâtonner, observer, raisonner, émettre des conjectures, généraliser, prouver, s'accrocher, imaginer, trouver du plaisir, échanger avec autrui, partager ses découvertes, critiquer, argumenter » (Godot 2006).
- L'expérimentation va permettre de faire apparaître les connaissances qui sont accessibles aux élèves, les obstacles qu'ils rencontrent et les différentes stratégies qu'ils utilisent.
- Les manuels scolaires sont un reflet des pratiques enseignantes. Même si ce reflet est « déformé », on peut supposer que les manuels seront un support pour les enseignants, le graphe étant un nouvel objet mathématique pour la plupart d'entre eux.

- Pour donner un aperçu de notre travail de thèse, nous présenterons ici trois problèmes qui peuvent permettre de modéliser, de raisonner et de prouver :
- le problème des parcours eulériens que nous utiliserons pour illustrer la démarche utilisée dans cette thèse ;
- le problème de la coloration des sommets pour lequel nous regarderons la transposition[4] ;
- le problème de Ramsey pour lequel nous proposerons une transposition.

II Résultats autour du problème de parcours eulériens

Un graphe est un ensemble de points (appelés sommets) qui peuvent être reliés entre eux par des traits (appelés arêtes).

Un parcours eulérien dans un graphe est un parcours partant d'un sommet du graphe et passant une fois et une seule par chacune des arêtes du graphe. Si ce parcours est fermé (c'est-à-dire que le sommet de départ et le sommet d'arrivée sont confondus) on parlera d'un circuit eulérien.

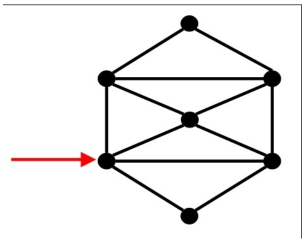
---

2 « Le travail proposé est axé sur la seule résolution de problèmes et aucunement sur un exposé magistral », Accompagnement de la mise en œuvre des programmes - Mathématiques - Classe terminale de la série ES.

3 Cet ouvrage regroupe les traductions anglaises des articles qui sont à l'origine de la théorie des graphes.

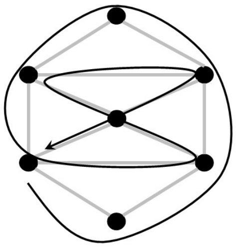
4 La transposition est la transformation du savoir « savant » ou savoir de référence en savoir à enseigner.

Pour illustrer ces définitions, prenons un graphe, et choisissons un sommet, qui sera le sommet de départ d'un parcours :



Partant de ce sommet, on choisit une arête non parcourue qui nous mène en un sommet et ainsi de suite jusqu'au moment où du sommet où l'on se trouve ne partent que des arêtes qui ont déjà été parcourues.

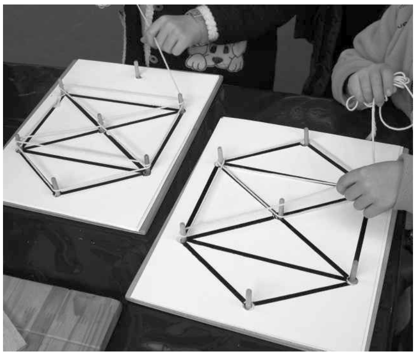
On pourra vérifier sur le graphe ci-contre que des parcours eulériens existent dans ce graphe, par exemple celui-ci :



Le problème de recherche de parcours eulériens dans un graphe, que nous qualifierons de problème eulérien, a été proposé sous différentes formes et à différents niveaux de classe pour étudier trois questions :

- Ce problème peut-il être utilisé pour introduire les graphes et qu'ils soient manipulés par les élèves ?
- Ce problème peut-il permettre de questionner la modélisation par un graphe ?
- Ce problème est-il une bonne entrée dans la preuve et le raisonnement ?

1. Introduction et manipulation des graphes

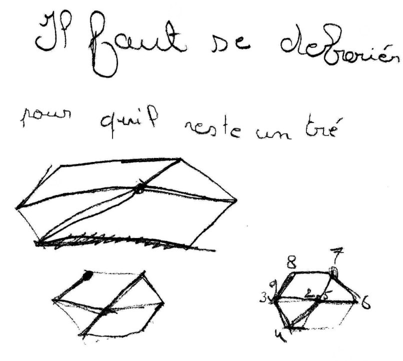


On entend souvent que le graphe est un objet simple et que les énoncés de problèmes en théorie des graphes, tel celui du problème eulérien, sont accessibles. Pour s'en assurer, nous avons proposé un problème eulérien en primaire. Nous avons créé du matériel manipulable, constitué de planches dans lesquelles sont fixées des chevilles. Sur ces supports se placent des feuilles sur lesquelles sont dessinés des graphes, les chevilles en constituant les sommets.

La question posée aux élèves est la suivante : « pouvez-vous refaire le dessin qui est sur vos feuilles avec une ficelle en repassant par chacun des traits, mais sans passer deux fois sur le même trait ? ».

L'expérimentation a eu lieu sur une durée courte (environ trois quarts d'heure pour chacun des groupes) avec une quinzaine d'élèves de CE1 à CM1 répartis en groupes de trois ou quatre. Chaque groupe avait une planche à sa disposition ainsi que des reproductions sur papier des graphes qui leur été proposés.

Voici une production d'élève de CE1 de cette classe :



On voit sur cette feuille que l'élève, ne trouvant pas de solution avec le matériel, a fait des tentatives sur papier pour expliciter la façon dont elle a cherché[5]. On remarque aussi des dessins de graphes qui attestent de la manipulation de l'objet au moins au niveau de sa représentation. Sur le dernier graphe dessiné sur le bas droite de sa feuille, l'élève a utilisé une numérotation des sommets en vue de pouvoir reproduire le parcours qu'elle avait établi.

De façon plus générale, cette expérimentation nous a permis d'établir que :

- les élèves sont capables de manipuler les graphes dès le primaire, ce qu'attestent les nombreuses représentations de graphes qu'ils ont faites ;
- l'énoncé du problème est accessible, la dévolution a été particulièrement efficace et rapide ;

Cette expérimentation a été plus loin que ce que nous avions prévu et a permis de constater en outre que les élèves sont aussi capables de :

- trouver des circuits eulériens dans un graphe très rapidement. Lorsque de tels circuits existaient les élèves mettaient moins d'une minute pour les établir ;
- reproduire des graphes. Même si pour un graphe particulier avec « beaucoup » d'arêtes ce travail était difficile (du fait de la nécessité d'un contrôle), les élèves ont reproduit les graphes sur leur feuille ;
- inventer des codages. Pour pouvoir montrer les chemins qu'ils avaient établis aux autres, les élèves ont inventé des codages en numérotant les sommets ou les arêtes des graphes dans l'ordre dans lequel ils les parcouraient.
- proposer des pistes de résolution. L'élève qui écrivait « il faut se débrouiller pour qu'il reste un trait » est d'ores et déjà dans une démarche de résolution, et son idée est, de fait, très proche de l'idée générale d'une preuve qui permet de résoudre le problème eulérien.

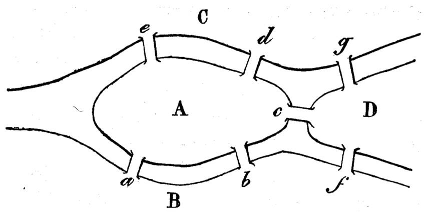
Le problème eulérien est donc un bon problème pour introduire et manipuler des graphes et il est accessible dès le deuxième cycle du primaire.

2. Travail sur la modélisation

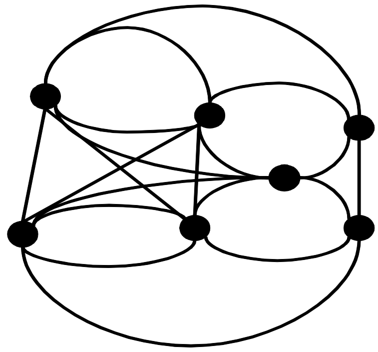
Deux énoncés du problème eulérien ont été popularisés par Lucas dans les *récréations mathématiques* (Lucas 1883) à la fin du dix-neuvième siècle. Ces deux énoncés ont été repris dans le document d'accompagnement des programmes concernant les graphes. Il s'agit du problème des *ponts de Königsberg* et de celui des *dominos*. La question que nous nous poserons autour de ces deux énoncés sera celle de la modélisation par un graphe *a priori*.

5 « Il faut se débrouiller pour qu'il reste un trait ». L'élève expliquait à l'oral qu'elle vérifiait à chaque étape ne pas laisser d'arête isolée.

Les ponts de Königsberg



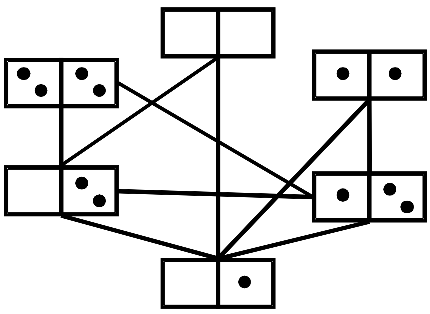
L'énoncé des ponts de Königsberg a été formulé par Euler en 1736 dans un article souvent considéré comme à l'origine de la théorie des graphes. Voici le plan de la ville de Königsberg traversé par une rivière formant une île et une presqu'île. La question d'Euler est la suivante : « une personne peut-elle s'arranger de manière à passer une fois sur chaque pont, mais une fois seulement ? »



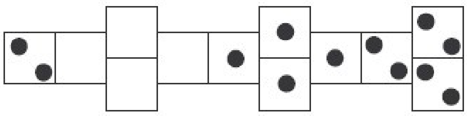
Lors d'une séance traitant explicitement de théorie des graphes, des élèves de Terminale ES traceront de fait un graphe pour représenter cette situation. Le graphe étant un ensemble de points reliés par des traits, on peut se demander quels objets tiendront le rôle des points et lesquels ceux des traits. On a ici 7 ponts et 4 berges, ce qui nous donne deux graphes possibles a priori. L'énoncé mettant en avant les ponts, choisissons-les pour sommets du graphe. Nous avons ici un modèle du problème dans lequel la question se transforme en : « peut-on passer une et une seule fois par chacun des sommets de ce graphe ? » Ce problème est connu en théorie des graphes sous le nom de problème hamiltonien, et nous qualifierons par extension le graphe obtenu par « graphe hamiltonien » .

Les dominos

« Peut-on aligner tous les dominos comportant les chiffres de 0 à n en respectant les règles du jeu ? » De la même façon que précédemment, par un effet de contrat, les élèves vont tracer un graphe pour représenter cette situation, les sommets seront les dominos et une arête joindra deux dominos quand ceux-ci peuvent être alignés. Par exemple pour $n = 2$ on obtient le graphe suivant :



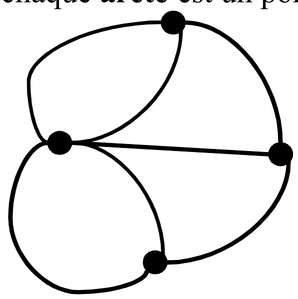
On cherche alors un chemin passant par chacun des sommets du graphe et on vérifie que ce chemin correspond à un alignement valide de dominos par exemple celui-ci :

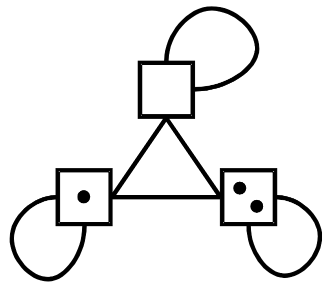


Le graphe que nous avons obtenu est lui aussi un « graphe hamiltonien ».

Modèles hamiltonien et eulérien pour ces deux énoncés

Plusieurs difficultés apparaissent avec ces modélisations. Les graphes obtenus sont vite illisibles à cause de leur grand nombre d'arêtes. Avec les dominos, tracer le graphe hamiltonien pour $n = 5$, par exemple, est déjà complexe. Une autre difficulté est liée au problème hamiltonien auquel on aboutit. En effet, ce problème est un problème « que l'on ne sait pas bien résoudre », c'est un problème difficile au sens de la complexité[6]. Mais ce qui reste vraiment problématique avec ces modélisations c'est que les chemins hamiltoniens que l'on peut trouver ne garantissent ni un chemin dans la ville de Königsberg[7], ni un alignement valide de dominos. Ce modèle n'est pas attendu en classe, le seul graphe attendu est le « graphe eulérien » pour lequel chaque **arête** est un pont ou un domino :





Un problème pour travailler la modélisation

Cette rapide étude montre que le problème eulérien est un « bon problème » pour travailler la modélisation. En effet, nous avons deux modélisations possibles *a priori* par un graphe et la modélisation qui est attendue n'est pas la modélisation généralement effectuée par les élèves. Pour illustrer ce qu'il se passe dans les classes, l'énoncé des ponts de Königsberg, proposé à environ 70 étudiants de PLC1[8] censés connaître le problème eulérien, a été traduit par plus de la moitié d'entre eux par un graphe hamiltonien.

D'autre part, l'adéquation entre le problème et le modèle peut ici être questionnée, avec un modèle « naturel » qui ne « fonctionne pas bien ».

Dans les manuels de Terminale ES

Les programmes de Terminale ES parlent de « la puissance de la théorie des graphes pour la modélisation ». Comment ce problème a-t-il été transposé dans les manuels ? Nous n'en donnerons qu'un exemple ici, mais il est symptomatique de ce que l'on retrouve dans les manuels dans leur ensemble. Nous sommes dans le chapitre consacré aux graphes, dans la partie des exercices dont le titre est « chaînes eulériennes ». Le problème d'alignement de dominos a été présenté, suit la première question : « *Représenter cette situation à l'aide d'un graphe G dans lequel chaque arête est un domino et les extrémités sont les chiffres figurant sur ce domino* » (Voir Transmath 2002).

6 Complexité des problèmes définie par Cook (problèmes NP-complets ou NP-difficiles). Voir par exemple **M. R. Garey, D. S. Johnson**, *Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completness*, San Francisco,W. H. Freeman, 1979.

7 Il existe un grand nombre de chemins hamiltoniens avec le premier graphe représentant la ville de Königsberg. Aucun ne correspond à un chemin possible dans la ville.

8 Étudiants possédant une licence de mathématiques et préparant le concours de recrutement de professeurs en lycée et collège.

Le modèle est donné. De façon générale, la modélisation dans les manuels n'est jamais à la charge des élèves, et elle n'est pas non plus questionnée. On a là une occasion manquée de proposer aux élèves un questionnement sur la modélisation, questionnement qui n'est pas si simple à introduire dans un enseignement de mathématiques.

3. Raisonnement et preuve

Dans l'article sur les ponts de Königsberg susmentionné, Euler énonce un théorème que nous donnons ici dans une version adaptée pour les graphes, après avoir donné quelques définitions.

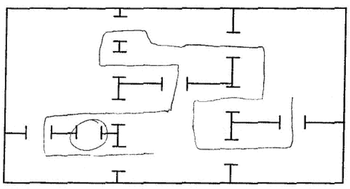
Un graphe est **connexe** s'il est en un seul « morceau », ou plus mathématiquement, s'il est tel qu'entre deux sommets quelconques il existe un chemin. Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes dont il est une extrémité.

Théorème d'Euler : dans un graphe connexe un circuit eulérien existe, si, et seulement si, tous ses sommets sont de degré pair. Dans un graphe connexe, un chemin eulérien ouvert existe si, et seulement si, exactement deux de ses sommets sont de degré impair.

Pour montrer que la condition de parité des degrés des sommets est nécessaire on peut utiliser un argument d'entrée/sortie, pour montrer qu'elle est suffisante, on peut montrer qu'un chemin maximal dans le graphe sera nécessairement un chemin eulérien. Pour se donner une idée des difficultés qui peuvent être rencontrées par les élèves rencontrant le problème eulérien, revenons sur l'article d'Euler. Dans cet article, il énonce le théorème sans mentionner la connexité (implicite dans la situation), il montre que la condition de parité est nécessaire, mais, pour la condition suffisante, il ne donne pas de preuve et ne cherche pas à construire de solution générale considérant que la construction de tels chemins est « aisé[e] avec un peu de réflexion ». On s'attend donc en présentant le problème à des élèves de lycée que la preuve de la condition suffisante (CS) du théorème sera difficile.

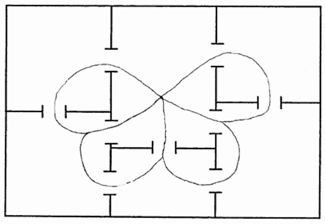
Étude expérimentale au lycée

Nous avons proposé le problème eulérien à 20 élèves de seconde, sur deux séances d'une heure trente, l'objectif principal étant l'étude des raisonnements et des preuves que les élèves sont capables de construire. Nous avons aussi cherché à problématiser la question de la CS.

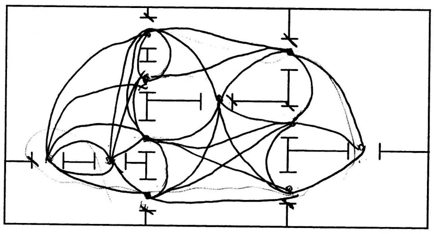


L'énoncé du problème de la première séance était composé de plans de musées et de la question « peut-on se promener dans le musée en passant une et une seule fois par chaque porte ». De même que pour les élèves de primaire, les chemins ou circuits eulériens quand ils existent sont trouvés rapidement. Nous nous intéresserons donc plutôt aux musées sans chemin eulérien, c'est-à-dire aux musées qui ont plus de deux salles ayant un nombre impair de portes, tels celui ci-contre où un essai infructueux a été entrepris.

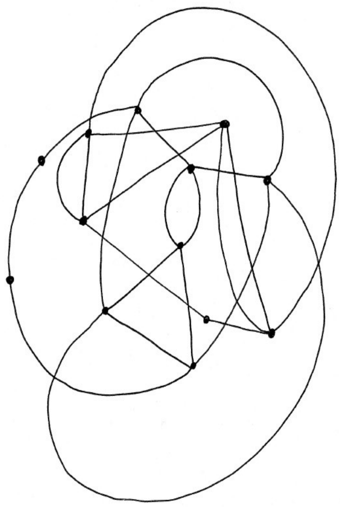
Après de tels essais, les élèves ont commencé à organiser leur recherche de chemin, et on a vu apparaître des représentations des chemins proches de celles d'un graphe. En voici un pour lequel, en ajoutant un sommet en chacune des pièces on aurait un graphe « eulérien » :



Une seule représentation qui est celle d'un graphe est apparue. L'idée des élèves du groupe était de tracer tous les chemins possibles allant d'une porte à une autre en chacune des pièces, le problème se transformant en la recherche d'un chemin passant une et une seule fois par chacun des sommets du graphe. Ce travail aboutit à la modélisation du problème par un modèle hamiltonien :



Pour résumer les résultats obtenus lors de cette séance, on voit l'apparition d'un graphe, de conjectures autour du théorème d'Euler avec l'argument d'entrée/sortie pour montrer la CN. Par contre, la question de la CS n'est pas posée par les élèves. Nous avons donc cherché dans une seconde séance à proposer un énoncé similaire mais basé sur les graphes pour tenter d'amener les élèves à s'interroger sur cette CS. Nous avons entre autres proposé ce « grand » graphe dont tous les sommets sont de degré pair mais qui n'est pas connexe. La réaction des élèves devant la contradiction entre leur conjecture et l'absence de circuit eulérien dans le graphe a été de modifier leur conjecture en ajoutant que le graphe doit être « en un seul morceau ».



Résumons les résultats obtenus lors de cette séance avec les graphes. Les élèves ont tous dessiné un grand nombre de graphes pour confirmer ou chercher à infirmer leurs conjectures, ce qui montre que le graphe est un objet appropriable par les élèves. Les conjectures établies pour les musées ainsi que les raisonnements en justifiant certaines ont été réinvestis et « traduits » pour les graphes. La question de la CS quant à elle est restée absente après plusieurs heures de recherche.

Nous en concluons que ce problème est pertinent pour questionner condition nécessaire et condition suffisante et qu'il serait particulièrement approprié à être proposé après un travail préalable sur ces notions.

Les parcours eulériens en Terminale ES

Le théorème d'Euler est un théorème admis dans les programmes de Terminale ES. Dans les manuels le problème est transformé en une série d'exercices résolus grâce à l'application de techniques. Le travail des élèves se résume à éventuellement tracer un graphe dont les sommets et arêtes sont décrits, puis compter le nombre d'arêtes en chaque sommet puis de trouver le chemin lorsqu'il existe ou de citer le théorème lorsque ce n'est pas le cas. Toute la richesse du problème permettant un travail de la modélisation, de la manipulation de l'objet graphe et de son exploration, de l'argumentation et de la construction de preuves et finalement de la construction même du concept de graphe est perdue pour les élèves à qui le modèle est fourni ainsi que le théorème. Leur travail se résume en l'application de techniques et il se fait jour une pauvreté conceptuelle autour de l'objet mathématique qui leur est présenté.

III Exemple d'une transposition : la coloration d'un graphe

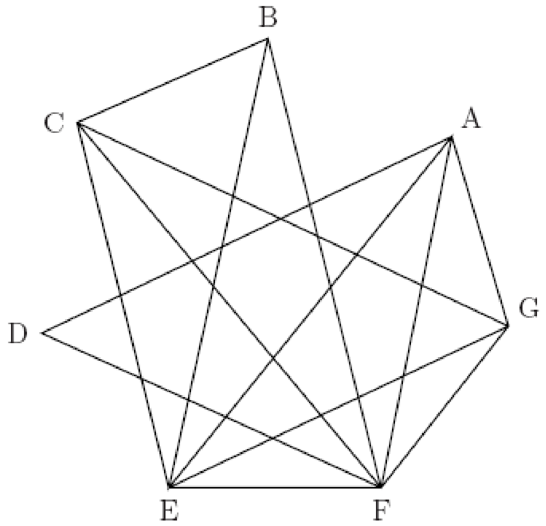
La **coloration** d'un graphe est le choix d'une couleur pour chacun de ses sommets de telle façon que deux sommets voisins soient de couleurs différentes. Il est toujours possible de colorer un graphe, il suffit pour cela de choisir autant de couleurs que le graphe comporte de sommets. L'enjeu du problème va donc être de minimiser le nombre de couleurs employées, ce nombre minimum de couleurs pour un graphe étant nommé **nombre chromatique du graphe** et noté χ. Prenons un graphe, une liste ordonnée de ses sommets L et un ensemble de couleurs numérotées. Un **algorithme glouton de coloration** consiste à colorer chacun des sommets dans l'ordre de la liste L en attribuant la plus petite couleur disponible. Cet algorithme donne une borne supérieure au nombre chromatique égale au plus haut degré des sommets (noté Δ) auquel on ajoute 1. En effet, en une étape quelconque de l'algorithme, le sommet à colorer est au plus de degré Δ et ses voisins sont au pire colorés avec Δ couleurs différentes. Cette borne, $\boldsymbol{\chi \leq \Delta + 1}$, est admise dans le programme de Terminale ES.

Si l'on choisit comme ordre des sommets l'ordre basé sur les degrés décroissants des sommets, on obtient un algorithme glouton de coloration nommé algorithme de Welsh et Powell. Cet algorithme ne fait pas vraiment partie des programmes de la Terminale ES[9], mais le document d'accompagnement des programmes propose cet algorithme qui, de fait, a été repris par l'ensemble des manuels de Terminale ES. Nous vous présentons ici un exemple prototypique des problèmes de coloration tels qu'ils sont proposés aux élèves de Terminale. Il s'agit ici du sujet du problème de spécialité du baccalauréat de 2003, première année où les graphes sont apparus au programme.

Exercice 2 (5 points) Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité
Un concert de solidarité est organisé dans une grande salle de spectacle. À ce concert sont conviés sept artistes de renommée internationale Luther Allunison (A), John Biaise (B), Phil Colline (C), Bob Ditlâne (D), Jimi Endisque (E), Robert Fripe (F) et Rory Garaguerre (G). Les différents musiciens invités refusant de jouer avec certains autres, l'organisateur du concert doit prévoir plusieurs parties de spectacle. Les arêtes du graphe Γ ci-dessous indiquent quels sont les musiciens qui refusent de jouer entre eux.

9 Le programme mentionne : « on présentera un algorithme simple de coloriage des graphes ».

1) Déterminer la matrice associée au graphe Γ (les sommets de Γ étant classés dans l'ordre alphabétique).



Graphe Γ

Cette question est de l'ordre des questions de cours. Il s'agit ici de donner une matrice 7 par 7 dont les coefficients sont nuls à l'intersection $i\ j$ s'il n'y a pas d'arêtes entre i et j et égaux à 1 sinon.

***2)** Quelle est la nature du sous-graphe de Γ constitué des sommets A, E, F et G ? Que peut-on en déduire pour le nombre chromatique χ(Γ) du graphe Γ?*

Le sous-graphe demandé est un sous-graphe complet ou **clique**, c'est-à-dire un graphe tels que chacun de ses sommets est voisin de tous les autres. Cette propriété nous donne une borne inférieure au nombre chromatique : chaque sommet d'un graphe complet étant voisin de tous les autres, sa coloration nécessitera au moins autant de couleurs qu'il n'a de sommets.

***3)** Quel est le sommet de plus haut degré de Γ ? En déduire un encadrement de χ(Γ).*

Le sommet de plus haut degré est le sommet F de degré 6. Le nombre chromatique est donc compris entre 4 et 7. Notons tout de même que la borne supérieure est évidente dans la mesure où le graphe est composé de 7 sommets.

***4)** Après avoir classé l'ensemble des sommets de Γ par ordre de degré décroissant, colorier le graphe Γ figurant en annexe.*

Cette question demande implicitement l'application de l'algorithme de Welsh et Powell. L'appliquer permet de trouver une coloration en 4 couleurs. La question n'est pas posée, mais on peut en déduire que le nombre chromatique de ce graphe est 4.

***5)** Combien de parties l'organisateur du concert doit-il prévoir ? Proposer une répartition des musiciens pour chacune de ces parties.*

On doit donc prévoir une répartition en au moins 4 parties. Mais il est à remarquer ici que tout enjeu de minimalité a disparu de la question.

On constate ici de façon manifeste comment un problème est transformé en exercice : les questions sont guidées, l'application de techniques élémentaires suffit à les résoudre. Le baccalauréat visant à l'évaluation, on pourrait penser que cette transformation est anecdotique. Le « problème de coloration » présenté est prototypique dans la mesure où, comme l'ensemble des exercices du manuel Déclic (Déclic 2002), et ce n'est qu'un exemple, il mène aussi à deux conceptions erronées de la coloration :

- *Le nombre chromatique χ est égal à la taille de la plus grande clique du graphe.* Ceci est erroné. La famille des graphes de Mycielski par exemple est une famille de graphes sans triangle (ou clique à 3 sommets) dont les nombres chromatiques peuvent être arbitrairement grands.
- *L'algorithme de Welsh et Powell donne une coloration en χ couleurs.* Cet algorithme peut donner des *colorations en n couleurs* pour des graphes dont le nombre chromatique est égal à 2.

Pourtant la coloration des graphes est un problème riche. La détermination du nombre chromatique dans le cas général, de la taille de la plus grande clique, ou de la famille des graphes dont le nombre chromatique est 3 sont des problèmes ouverts dans la recherche actuelle. Ce sont tous des problèmes difficiles (au sens de la complexité). De nombreuses questions pourraient à ce sujet être posées aux élèves, certaines simples d'autres demandant plus de réflexion :

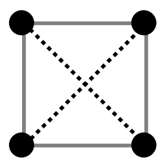
- Quels sont les graphes dont le nombre chromatique est 1 ? Et 2 ?
- Combien de couleurs sont nécessaires pour colorer les chaînes ? Les cycles ? Les arbres ?...
- Quel ordre sur les sommets choisir pour ces graphes pour que l'algorithme glouton soit optimal ?...

IV Une transposition possible : le problème de Ramsey - Vers une situation recherche en classe (SiRC)

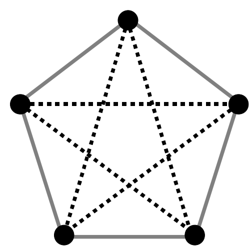
Comment transposer un problème de recherche actuel en classe ? Nous vous proposons ici un tel problème et l'argumentation permettant d'y répondre.

Un enfant colore toutes les arêtes d'un graphe complet K_n avec deux couleurs. Peut-il éviter d'obtenir un triangle monochrome ?

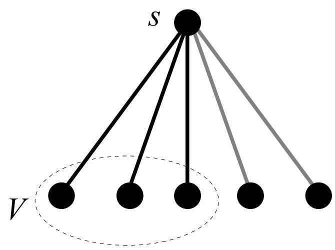
- Pour $n = 3$, la réponse est évidente.
- Pour $n = 4$, on trouve rapidement une telle coloration :



- La valeur $n = 5$ est plus difficile mais on peut trouver une coloration qui convient :



- Pour $n = 6$ on ne trouve pas réponse par tâtonnement, il y a alors nécessité de s'engager dans une démarche de preuve. Plaçons-nous en une sommet du graphe complet à 6 sommets. De ce sommet partent 5 arêtes colorés de deux couleurs. Quelle que soit la disposition de ces couleurs, on a nécessairement 3 arêtes colorés de la même couleur, disons noir. On s'intéresse à la couleur des arêtes entre les trois sommets de l'ensemble *V*. Si l'une de ces arêtes est noire, alors avec les deux arêtes partant de *s* elles forment un triangle noir. Sinon les trois arêtes sont grises et forment un triangle gris. Pour $n = 6$ on ne peut donc pas éviter d'obtenir un triangle monochrome.



Ce problème est généralisable (en augmentant le nombre de couleurs ou la taille des graphes que l'on cherche à exclure), c'est un problème ouvert dans la recherche actuelle. Son domaine conceptuel est facile d'accès. Les méthodes de résolution ne sont pas désignées. Les connaissances scolaires nécessaires sont restreintes. La question est facilement compréhensible. Toutes ces caractéristiques sont celles d'une SiRC.

V Conclusion et perspectives

Un partie du travail de thèse n'a pas été abordée ici. Nous avons effectué une analyse des énoncés des manuels de Terminale ES et analysé les techniques de résolution proposées aux élèves. Pour résumer rapidement les résultats de cette analyse, il ressort que la transformation des problèmes en exercices ne se cantonne pas aux problèmes eulérien et de coloration mais qu'elle est générale à toute cette partie du programme. Les techniques proposées sont de deux ordres, des techniques élémentaires de comptage ou de détermination de parité d'une part, des techniques à appliquer sans contrôle d'autre part[10]. Au niveau expérimental, outre les expérimentations évoquées ici, nous avons proposé une étude argumentée de l'article d'Euler à des élèves ingénieurs, pour questionner leurs représentations de la preuve et du raisonnement. Nous avons aussi participé à deux sessions de formation continue d'enseignants du secondaire en théorie des graphes. La troisième grande partie de notre travail est la proposition d'un corpus organisé de problèmes résolus à destination des enseignants de Terminale ES qui comprend, outre les problème cités précédemment, un problème de poignées de mains, la recherche de plus courts chemins dans un graphe, la construction de graphes planaires réguliers mise en parallèle avec la recherche des polyèdres de Platon, etc. Cet ensemble couvre largement le programme de la spécialité de Terminale ES.

Pour conclure la présentation de cette thèse, nous en résumerons les principaux résultats. La théorie des graphes a une richesse potentielle pour l'enseignement des mathématiques dans la mesure où il est possible d'y travailler la modélisation, la preuve, le raisonnement et l'argumentation mais aussi 'algorithmique. Pourtant à la lecture des programmes et plus encore des manuels, la pauvreté de la construction du concept de graphe est telle que l'occasion semble avoir été manquée. Nous nuancerons tout de même cela en n'oubliant pas tous les professeurs qui dans leurs classes ne se satisfont pas nécessairement des manuels.

Les perspectives de ce travail sont nombreuses. Nous pensons que la caractérisation de la gestion des SiRC reste à développer, en particulier autour de la phase d'institutionnalisation cruciale avec ce type de gestion. L'ensemble des problèmes du corpus a été expérimenté lors des sessions de formation d'enseignants, mais il reste à en adapter certains pour la classe. Il nous semble aussi que des situations pourraient être développées pour le primaire, des expériences ont eu lieu en 1968 (voir Papy et Incolle 1968) et il pourrait être intéressant de poursuivre ce travail.

VI Bibliographie

Biggs N. L., Lloyd E. K., Wilson R. J. (1976), *Graph theory 1736-1936*, Oxford University Press.

Brousseau Guy (2004), *Théorie des situations didactiques*, Deuxième édition (première édition en 1998), Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

Déclic Maths Terminale ES obligatoire et spécialité (2002), Édition Hachette Education.

Euler Leonhard (1736) Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 8*, pp 128-140. Traduction en français par Coupy E. (1851) Solution d'un problème appartenant à la géométrie de situation par Euler, *Nouvelles annales de mathématiques*, tome 10, 1851, pp 106-119.

Godot Karine (2006) La roue aux couleurs : une situation-recherche pour apprendre à chercher dès le cycle 3, *Grand N n°78*, IREM de Grenoble.

10 En particulier autour de l'algorithme de Dijkstra.

Grenier Denise, Payan Charles (1998) Spécificités de la preuve et de la modélisation en Mathématiques Discrètes, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 18.2, pp. 59–100, Éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Grenier Denise, Payan Charles (2002) Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation en mathématiques discrètes, *Cahiers du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques*, Édité par l'ARDM, Paris.

Lucas Édouard (1883) *Récréations mathématiques - Tome 2 -* Qui perd gagne. Les dominos. Les marelles. Le parquet. Le casse-tête. Le jeu des demoiselles. Le jeu icosien d'Hamilton, Gauthier-Villars, Paris.

Papy et Frédérique avec la participation de Incolle D. (1968) *L'enfant et les graphes*, Marcel Bruxelles-Montréal-Paris, Didier, 189p.

Rolland Julien (1999) *Pertinence des mathématiques discrètes pour l'apprentis-sage de la modélisation et de l'implication*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Transmath Term ES obligatoire et spécialité (2002), Édition Nathan.