

Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes

Denise GRENIER,

Équipe *Combinatoire et Didactique* de l'Institut Fourier,

ERTé « Maths-à-modeler » et I.R.E.M.

Université Joseph Fourier, Grenoble

Résumé

Ce texte est une présentation partielle de travaux réalisés dans l'ERTé « Maths-à-modeler », accessibles dans des articles publiés, tels Grenier & Payan (1998, 2003, 2006), Grenier (2006, 2008), Grenier & Tanguay (2008), et dans les thèses que j'ai co-encadrées de Julien Rolland (1999), Cécile Ouvrier-Buffet (2003), Virginie Deloustal-Jorrand (2004), Karine Godot (2005), Léa Cartier (2008) et Michèle Gandit (2008).

Nous proposons au débat la question suivante : quelle place pour une activité scientifique dans les classes de mathématiques, permettant de développer chez les élèves des capacités à expérimenter, argumenter, conjecturer, modéliser, définir, prouver ? Et comment enseigner ces savoir-faire ? L'ERTé maths-à-modeler construit, expérimente et analyse depuis de nombreuses années des « Situations de Recherche pour la Classe » (SiRC). Nous montrerons quelques exemples de situations construites sur le modèle SiRC, pour lesquelles nous disposons d'analyses a priori fiables, de propositions pour la formation d'enseignants et d'éléments pour leur gestion. Enfin, nous développerons des arguments didactiques pour défendre leur intérêt et leur viabilité en classe à côté des activités classiques d'enseignement.

Mots clefs

Situation de recherche, démarche scientifique, expérimentation, modélisation, preuve

I Constats, hypothèses et objectifs

L'activité d'un chercheur, c'est, pour une grande part, choisir une question, expérimenter, étudier de cas particuliers, choisir un cadre de résolution, modéliser, énoncer de conjectures, prouver, définir, changer éventuellement la question initiale ... Les *savoir-faire* associés, que nous qualifierons de *transversaux* (pour les distinguer des savoirs notionnels), sont constitutifs de la démarche scientifique, ils sont nécessaires pour faire des mathématiques et ne peuvent être réduits à des techniques ou à des méthodes. Ils ne peuvent non plus être contraints par le temps (aucun chercheur n'est capable de dire comment et quand il aura résolu le problème sur lequel il travaille).

Il est largement admis dans notre communauté que l'enseignement en France ne prend pas réellement en charge ces savoir-faire. Depuis de nombreuses années, en tant qu'enseignante et didacticienne, j'ai pu vérifier que la plupart des étudiants en sciences (L1, L2, master2 de didactique) et beaucoup d'étudiants en mathématiques (L3, PLC, master1) ne possèdent pas ces savoirs et savoir-faire de base. *Leur rapport aux mathématiques est très éloigné de celui du chercheur*, comme l'atteste des expressions fréquentes à tous les niveaux d'étude, face à un problème qui leur semble « ouvert », telles celles-ci :

Je ne sais pas résoudre ce problème, je l'ai jamais rencontré

Je ne sais pas faire, je ne connais pas la technique

Le problème est mal posé, on n'a pas toutes les hypothèses

A quel chapitre il se rattache, ce problème ?

Les attitudes correspondantes vont de l'incapacité à initier la résolution ou à tenter de se faire une idée du problème (par exemple, en expérimentant, ou en étudiant des cas particuliers), jusqu'au refus de s'investir dans le problème (« si je n'y arrive pas en 5 minutes, je n'y arriverais jamais » déclare un enseignant de mathématique !).

On peut donner une explication plausible à ces affirmations et attitudes, qui interpelle le contrat didactique usuel dans tout l'enseignement : la quasi totalité des problèmes que les élèves et étudiants ont à résoudre en classe – et donc que les enseignants font résoudre à leurs élèves - sont rattachés à un chapitre, avec pour objectif essentiel l'application d'un théorème, d'un algorithme ou d'une technique. Et lorsqu'il est demandé de « démontrer que », toutes les hypothèses et seulement celles-ci sont données.

Ces constats nous conduisent à nous interroger sur la capacité des étudiants à résoudre un problème « nouveau », pour lequel on ne dispose pas d'une technique connue et immédiatement disponible et qu'on ne peut « rattacher » à aucun théorème ou cadre théorique connus : autrement dit, sur leur capacité à « faire vraiment des mathématiques ».

Les programmes scolaires en mathématiques à tous les niveaux insistent sur l'importance de l'*expérimentation*, la *découverte* et la *qualité* de l'activité scientifique en classe. Comment cela se traduit-il en classe ? Peut-on vraiment croire que l'élève va jouer naturellement au chercheur, que cette compétence lui est innée ? Et quelles connaissances peut-il construire ainsi ? Cet objectif des programmes est ambitieux, mais il nécessite à notre avis de mettre en place des organisations mathématiques et didactiques spécifiques.

Nos analyses des **manuels scolaires et des pratiques de classe** révèlent qu'en fait, le temps accordé à l'activité de recherche et à la démarche expérimentale y est très réduit ; dans les manuels, les « problèmes pour chercher » sont peu présents et n'occupent jamais une place centrale dans les chapitres (ils sont soit au début - introductifs, mais de quoi ? - soit à la fin, pour approfondir - si on a le temps. De plus, l'activité expérimentale est de plus en plus souvent confondue avec l'utilisation de tableurs, logiciels (de géométrie dynamique ou de calcul formel), ou l'utilisation de l'ordinateur. Cette conception de l'expérimental en mathématique est particulièrement visible au lycée, dans la description de l'épreuve pratique de maths au bac (tentative des deux dernières années) et dans les discours actuels sur la mise en place d'un enseignement d'algorithmique en Seconde.

Les réserves ou les craintes exprimées par les enseignants à propos de l'intégration des « problèmes de recherche » en classe sont de différents ordres. Voici trois causes d'inquiétudes ou de refus qui sont quasi unanimement exprimées¹ :

- Les contraintes institutionnelles : il n'y a pas ni le temps ni la « place » pour laisser les élèves chercher vraiment. C'est bien la question d'une organisation mathématique et didactique spécifique qui se pose ici.
- La conviction que les problèmes de ce type ne sont pas accessibles aux élèves (quel que soit le niveau !), et ce serait donc du temps perdu pour l'apprentissage. Mais cela dépend de quels apprentissages il s'agit. Là, ce sont les conceptions des enseignants sur ce qu'il est prioritaire d'enseigner et sur les capacités des élèves qui sont en question.
- L'absence de formation à la gestion de ces situations. Comment contrôler, valider ou invalider, les stratégies et les conjectures différentes qui vont probablement émerger ? Comment aider l'élève pour faire avancer la résolution ? Quel est le critère de fin de la recherche ? Ici, c'est un changement de position de l'enseignant qu'il faut accepter.

Ces craintes s'appuient de plus sur des pratiques didactiques usuelles très éloignées de celles qui permettraient de faire vivre ces situations en classe, en voici deux exemples remarquables :

- L'interdiction, pour l'élève, de modifier une question, de changer les hypothèses, de choisir le cadre de résolution.
- La donnée, par certains manuels et enseignants, de « règles de contrat » censées aider l'élève à écrire et contrôler sa démonstration, telles que :
 - « Pour démontrer, on utilisera **seulement** les données du problème et les propriétés du chapitre »
 - « Quand vous faites une démonstration, vérifiez que vous utilisez **toutes** les hypothèses ».

Ces règles du contrat usuel ont bien sûr leur légitimité dans des moments spécifiques, en particulier celui de l'apprentissage ou du travail d'une technique, ou de l'utilisation spécifique d'un théorème. Cependant, elles vont à notre avis à l'encontre de l'apprentissage de la démarche scientifique et de ce qu'est l'activité mathématique.

1. Hypothèses et objectifs de nos travaux

Nous faisons l'hypothèse qu'il est possible d'enseigner ces savoir-faire transversaux, à tous les niveaux, aux moyens de situations fiables qui nécessitent des organisations didactiques appropriées réalisables dans les classes.

Nos travaux dans l'ERTé « maths à modeler », depuis de nombreuses années, nous ont permis de mettre au point – construire, expérimenter, analyser – des « situations de recherche pour la classe »² (SiRC) – c'est-à-dire des problèmes et leur mise en scène – susceptibles de remplir ces objectifs, accessibles dans des contextes institutionnels variés et à différents niveaux scolaires.

Ces SiRC s'inspirent des problèmes de la recherche mathématique. Certaines d'entre elles présentent la caractéristique originale de pouvoir être *dévolues à l'identique, à des niveaux différents de connaissance*.

1 A partir de réponses à des questionnaires soumis systématiquement pendant plusieurs années.

2 Une caractérisation, qui a un peu évolué, a été donnée au séminaire national de didactique à Paris en octobre 2002.

2. Caractérisation du modèle SiRC

Dans Grenier et Payan (2003), nous donnions une caractérisation du modèle SiRC, pour les situer par rapport aux « situations-problèmes » et « problèmes ouverts » que l'on rencontre dans les travaux de didactique. Nous la reprenons ici en la commentant.

- **Une SiRC est proche d'une question vive de la recherche mathématique**

Cette condition, assez contraignante, a pour but d'éviter que la question ou la réponse semblent évidentes ou familières. L'objectif est de donner une pertinence à l'activité de recherche à tous les niveaux. Cette condition peut être artificiellement recrée par la mise en scène du problème, dans le cas où la question posée est résolue dans le recherche.

- **La question initiale est facile d'accès et pertinente à des niveaux différents**

Notre intention est de rompre avec la pratique didactique usuelle qui tend à attribuer tout problème à un niveau scolaire précis. Les savoir-faire transversaux doivent en effet être pris en charge tout au long de la scolarité, du primaire à l'université. Pour remplir cette condition, les énoncés des SiRC sont forcément peu mathématisés, mais nous cherchons à éviter les « bruits » non mathématiques courants dans les problèmes dits de « modélisation », qui complexifient la tâche pour l'élève et l'empêchent parfois de rentrer dans les mathématiques.

- **Des stratégies initiales existent, mais elles ne résolvent pas complètement la question**

En d'autres termes, il faut assurer la dévolution du problème, tout en laissant une incertitude qui engage dans l'activité de résolution, et ne peut être réduite par la seule application de techniques ou propriétés usuelles connues (c'est ainsi que Brousseau décrit, dans sa théorie, une « bonne » situation). Le cadre théorique de résolution n'est ni donné, ni évident, mais il est possible de s'emparer du problème sans cela.

- **Plusieurs avancées dans la résolution sont possibles, par essais-erreurs, étude de cas particuliers, production d'exemples, etc.**

Il s'agit de permettre la résolution de cas particuliers et de favoriser la construction par les élèves de conjectures — issues de l'exploration de la question — qui ne seront pas évidemment vraies, mais pourront être examinées au moyen d'exemples et de contre-exemples construits par les élèves eux-mêmes.

- **On peut changer les hypothèses, ou la question initiale, et s'emparer d'un nouveau problème**

La question initiale peut déboucher sur des questions annexes : fermeture du problème par choix de valeurs de certains paramètres, ou question nouvelle issue de l'activité de recherche.

Ces caractéristiques ne sont pas faciles à réaliser. On s'accordera aisément sur le fait que très peu de problèmes de la recherche actuelle en mathématiques peuvent être transposés ainsi. Le choix des « bonnes » questions de recherche et de leur transposition pertinente en SiRC est une tâche difficile. D'autre part, les savoir-faire transversaux mis en jeu diffèrent et ne sont pas tous présents dans chacune des situations : certaines mettent en jeu plutôt la modélisation, d'autres le processus conjecture-exemples-contre-exemples-preuve, d'autres encore la définition d'objets mathématiques.

3. Analyse didactique d'une SiRC

Au cours des dix dernières années, notre équipe a construit, expérimenté, analysé et mis à l'épreuve un certain nombre de SiRC plus ou moins proches du modèle décrit ci-dessus, mais qui toutes apportent des apprentissages de ces savoir-faire, à des niveaux très variés. Certaines

sont maintenant intégrées dans des cursus institutionnels (en seconde, L1-L2 sciences, L3 de maths, cours doctoral maths-info), ce qui nous a obligés à mettre en place une évaluation de ces apprentissages.

L'analyse a priori d'une « situation de recherche pour la classe » consiste, comme pour toute situation (didactique ou a-didactique), à décrire le milieu - ses objets, les actions possibles, les connaissances de base, celles qui sont en jeu, et des éléments de gestion. Dans nos SiRC, il s'agit de décrire les stratégies initiales, expérimentations et modélisations locales possibles, les conjectures qui en découlent (vraies ou fausses), les preuves susceptibles d'être produites.

Les spécificités de cette analyse tiennent d'une part au fait que ce sont les savoirs transversaux qui sont enjeu d'apprentissage, et non un concept mathématiques strict - même si bien sûr il y en a forcément en jeu dans la situation – et, d'autre part, que la résolution complète du problème n'est pas toujours réalisable.

Une SiRC est caractérisée par des variables (didactiques ou adidactiques), et au moins une **variable de recherche**, paramètre du problème qui pourrait être une variable didactique (c'est-à-dire à la disposition de l'enseignant), mais qui est laissé à la disposition de l'élève. Les variables de recherche sont constitutives des SiRC, autrement dit une situation pour laquelle on ne peut mettre une variable à la disposition de l'élève n'est pas une SiRC. Cette variable de recherche détermine ce qui, dans la situation, conduit à une activité mathématique, parce que :

- il y a, à la charge de l'élève, une question et un enjeu de vérité, dont il peut s'emparer mais qui ne sont pas résolubles rapidement,
- il n'y a pas de « boîte à outils » (théorèmes, propriétés, algorithmes) disponible de manière évidente pour la résolution.

Bien sûr, toute variable du problème ou de la situation ne peut être variable de recherche. Un des objectifs de nos expérimentations est de déterminer les paramètres qui peuvent être laissés à la charge de l'élève.

L'organisation didactique est constitutive d'une SiRC, dans le sens qu'elle joue un rôle primordial dans la réussite de la situation³. Cependant, elle est tout à fait réalisable. Le travail en petits groupes est un moyen d'assurer la dévolution du problème et de favoriser les échanges sur les stratégies et les solutions. Le temps est un élément important. La situation ne sera porteuse d'apprentissages que si elle peut se poursuivre sur plusieurs séances si cela s'avère nécessaire. Il est donc important que chaque groupe tienne un « cahier de recherche », pour faire mémoire de l'état de la résolution d'une séance à l'autre : cas étudiés, conclusions, questions non résolues, nouvelles questions, mais aussi difficultés, pistes abandonnées, etc. La mise en scène du problème (contexte de l'énoncé, matériel pour expérimenter, outils de résolution) est tout aussi importante. Certains de nos SiRC s'appuient entièrement sur des objets manipulables.

La gestion d'une SiRC doit comporter, outre une alternance de phases collectives de débat et de phases de travail en groupes, un moment d'institutionnalisation des connaissances en jeu. Cette organisation vaut aussi bien en formation d'enseignants qu'avec des élèves en classe.

Plus que l'organisation didactique, c'est plutôt **les objets des phases collectives de débat et d'institutionnalisation** qui peuvent être ressenties comme sources de difficultés pour l'enseignant, puisque ce sont avant tout les savoirs transversaux. Il s'agit donc de porter l'attention sur les reformulations des déclarations des élèves (hypotheses, propriétés, conjectures), sur les

3 La situation de l'agrandissement du puzzle de Brouseau est de ce point de vue très éclairante : l'organisation du travail (en groupe, puis en individuel, puis de nouveau en groupe) est constitutive de la situation.

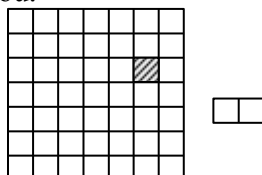
codages ou les modélisations utilisées, sur les exemples et contre-exemples et leur rôle, sur la distinction entre condition nécessaire et condition suffisante, sur la mise au point et l'écriture des preuves.

II Un exemple prototypique. Pavage de polyminos

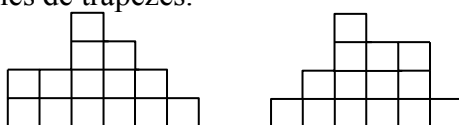
1. La situation

Les trois problèmes de la situation ci-dessous constituent une situation fondamentale pour le raisonnement et la preuve. Elle est mise à l'épreuve et utilisée dans différents cursus depuis une dizaine d'années. On en trouve des analyses détaillées dans Grenier et Payan (1998) et Grenier (2006). Chacun des problèmes correspond à des choix de variables et contient un paramètre laissé à la charge de l'élève (variable de recherche).

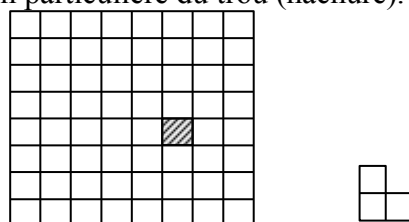
Problème P1. Etant donné un carré de taille quelconque avec un « trou » d'une case, pour quelles positions du trou est-il pavable par des dominos ? Le trou peut se situer n'importe où, y compris sur un bord ou un coin du polymino. Voici le dessin pour le polymino de taille 7 et un cas particulier de la position du trou.



Problème P2. A quelles conditions un trapèze de taille quelconque est-il pavable par des dominos ? Voici deux exemples de trapèzes.



Problème P3. Etant donné un carré de taille 2^n , n quelconque avec un « trou » d'une case, pour quelles positions du trou est-il pavable par des triminos coudés ? Ci-dessous, un cas particulier avec $n=8$ et une position particulière du trou (hachuré).



Ces problèmes sont décrits et étudiés en détail dans Grenier et Payan (1998) et Grenier (2006), nous reprenons seulement quelques éléments de cette étude ici. Nous situerons ensuite les trois problèmes en ce qu'ils ont de complémentaires et de spécifiques.

2. Eléments d'analyse didactique

L'analyse est basée sur de nombreuses données expérimentales, qui nous permettent d'avoir une analyse *a priori* fiable de ces problèmes.

Le problème P1

Le problème P1 remplit un rôle de mise en place d'un « milieu » (au sens de la théorie des situations didactiques), ce type de questions étant peu connu de la grande majorité des élèves et des enseignants. La résolution de P1 permet d'introduire des définitions de base (pavage, pavé, aire), des outils spécifiques (partition, coloration) et d'établir des propriétés de base sur le pavage des polyminos qui serviront ensuite pour les problèmes P2 et P3. L'étude des carrés de petites dimensions (taille $n \leq 7$) conduit à faire des constats, puis établir des propriétés ou des conjectures, qui doivent être exprimées en terme de condition nécessaire ou suffisante et pour lesquelles on peut établir des preuves, plus ou moins complexes (preuve par exhaustivité des cas, preuve par l'absurde et « forçage », preuve d'existence en exhibant un exemple).

On aboutit la plus part du temps à la ***conjecture pour n quelconque*** suivante :

Repérons les cases par deux coordonnées entières, à partir d'un coin du polymino (par exemple le coin en bas à gauche), et en commençant par (1,1)). Pour n quelconque, une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir paver avec des dominos est que le trou soit placé sur une case ayant une position paire-paire ou impaire-impair dans le polymino.

La preuve de la condition suffisante peut se faire par induction ou partition du polymino. La preuve de la condition nécessaire nécessite un autre outil (la coloration en damier) qui en général n'émerge pas des travaux de groupes.

Il est étonnant de constater, à chaque fois, la profondeur du travail mathématique que l'on peut faire avec P1. Citons-en ici quelques aspects.

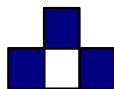
- Dans la preuve de la conjecture pour les premières valeurs de n , puis n quelconque, les outils (coloration et notion de « polymino équilibré ») pour établir la CN ne sont pas les mêmes que ceux qui servent à établir la CS (décomposition ou récurrence). Pour cela, P1 est un bon problème pour discuter de la différence entre une CS et une CN, alors qu'il s'agit d'une CNS.
- La recherche des implications entre les trois propriétés relatives à des polyminos « aire paire », « équilibré⁴ » et « pavable par des dominos » conduit dans le cas général à des implications strictes. Pour les carrés ou rectangles sans trou, tout est équivalent. Pour les carrés ou rectangles tronqués d'une case, une équivalence et une implication stricte.
- La notion topologique d'adjacence joue ici un rôle fondamental pour résoudre P1. Elle permet de transformer la coloration en un outil de preuve efficace. Dans nos expérimentations, nous avons constaté que la résolution de P1 permet de la faire émerger lors des essais successifs de pavage. En effet, pour un polymino non pavable, on peut observer qu'à chaque fois, les tentatives avortées de pavage s'arrêtent sur deux cases isolées de même couleur.
- Plusieurs prolongements du problème P1 émergent chez les élèves, ce qui est un de nos critères pour une SiRC : la résolution de la question de départ amène d'autres questions (par exemple, la question du pavage des rectangles sans trou par des dominos).

Pavage d'un trapèze par des dominos (problème P2)

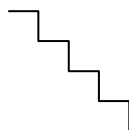
L'analyse de ce problème est détaillée dans Grenier (2006). Nous rappelons ici les résultats essentiels.

4 C'est-à-dire ayant le même nombre de case blanches que de cases noires dans une coloration en damier (Grenier 2006)

En réutilisant des propriétés et des outils établis lors de la résolution du problème P1, en particulier la propriété 4, on peut affirmer que « Une condition nécessaire pour qu'un trapèze soit pavable par des dominos est qu'il soit équilibré (il est donc d'aire paire) ». Mais existe-t-il des trapèzes d'aire paire et non équilibrés ? La réponse est oui, il y a des exemples simples, dont celui-ci :



En étudiant des cas particuliers de trapèzes, d'aires petites, on peut établir facilement la propriété suivante : « Si un trapèze a tous ses paliers ou toutes ses colonnes paires, alors il est pavable ». La preuve est évidente. En conséquence, tout trapèze ayant uniquement des marches de 1 sur 1 de chaque côté est non pavable car non équilibré.



On peut donc conclure, après un temps de recherche, sur la **conjecture** suivante :
Tout trapèze équilibré est pavable par des dominos.

La preuve de cette conjecture est difficile. Souvent, des preuves fausses sont données, plus ou moins induites par un raisonnement inductif incomplet. Cependant, l'étude expérimentale induit la recherche d'un algorithme de pavage, seul moyen de se convaincre de la possibilité ou non de paver un trapèze donné. En fait, la preuve est basée sur un algorithme qui consiste à « déconstruire » le trapèze d'une manière précise qui conduit à une preuve par induction. Nos expérimentations montrent que l'intervention de l'enseignant ou de celui qui gère la situation est en général nécessaire dans cette dernière phase. Cette preuve est très intéressante pour comprendre ce qu'est un algorithme et aussi ce qu'est le raisonnement inductif. Il est détaillé dans Grenier 2006.

Problème P3. Pavage d'un carré de taille 2^n avec des triminos en L

Ce problème a été décrit dans Grenier et Payan (1998). Nous n'en donnerons ici que quelques éléments. On peut établir très facilement que la condition « pour un polymino quelconque, l'aire est un multiple de 3 » est nécessaire. La preuve est évidente. En revanche, il est difficile de savoir si cette condition est suffisante ici (elle ne l'est pas sur le carré 3×3 , mais 3 n'est pas une puissance de 2). L'étude de petits cas (2^2 , 2^3) conduit à la **conjecture** suivante :
 Tout polymino carré de taille 2^n est pavable, quelle que soit la position du trou.

L'étude des cas où $n=2$, puis 3, puis 4, conduit souvent à une preuve par induction, plus ou moins formelle selon les niveaux. Mais elle conduit aussi à une preuve accessible sans la récurrence, basée sur une partition du polymino en polyminos plus petits pavables.

Ce problème met en jeu des aspects de la récurrence non usuels dans l'enseignement et qui se révèlent souvent déstabilisant, même au niveau L3. En particulier :

- $P(n)$ est une propriété d'une « classe d'objets de taille n » et non une fonction analytique de n
- La valeur initiale de la récurrence se déduit naturellement de l'étude de l'hérédité (elle ne sort pas d'un chapeau !)
- La preuve fournit un algorithme de pavage (comme dans le problème P2), qui se révèle nécessaire, car si on pave au hasard, on a très peu de chance d'arriver au bout.

Les apprentissages « transversaux » en jeu dans la situation

La séquence des trois problèmes permet de travailler progressivement les aspects suivants.

Existence ou non de solutions. En classe, tout problème a une solution, souvent unique. Ici, dans P1, l'existence de solutions dépend de la position de la case manquante (qui est une des variables de recherche), tandis que dans P2, des solutions existent dès que le polymino vérifie une condition (trapèze équilibré) et que P3, lui, admet des solutions dans tous les cas (quelle que soit la position de la case manquante).

Distinction entre « condition nécessaire » et « condition suffisante ». Dans ces problèmes, les CN ne sont pas toujours suffisantes et vice-versa. De plus, si une condition est une CNS, alors la preuve de sa nécessité peut être très différente de celle de sa suffisance (exemple typique dans le problème 1).

Types et outils de preuve non usuels. Cette situation permet d'aborder des types de preuve non classiques, telles que la preuve « par exhaustivité des cas », ou la preuve par « exhibition d'un exemple » (en réponse à une question d'existence). Ce type de preuve n'est pas si fréquent, puisqu'elle ne peut s'appliquer que si le nombre des objets sur lesquels on vérifie la propriété est fini (ce qui n'est le cas ni en algèbre, ni en géométrie).

Des outils nouveaux sont utilisés, tels la décomposition et structuration d'une figure, ou la coloration. Au delà de leur intérêt pour eux-mêmes, ils obligent à changer de conception sur ce qu'est une preuve en mathématique (et son formalisme).

Les notions mathématiques. Elles concernent essentiellement les propriétés de $\mathbb{N}$, l'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls, avec des niveaux d'approche différents selon les problèmes : calcul d'aires, divisibilité de deux nombres, preuve par récurrence.

Une situation fondamentale pour les savoirs transversaux

La situation composée des trois problèmes P1, P2 et P3 est pertinente à différents niveaux scolaires, mais aussi pour la formation d'enseignants. Les résultats obtenus seront bien sûr différents selon ces niveaux, c'est-à-dire que l'on pourra aller plus ou moins loin dans les conjectures et les preuves. Cependant, le problème P1 peut être résolu et prouvé de manière non formelle même avec des enfants de l'école primaire.

Deux contraintes sont quasi incontournables pour que la situation « marche » :

- celle du temps, nécessaire (même pour un chercheur !) pour s'emparer des problèmes et commencer à mettre en place des solutions ;
- celle de l'« ouverture » qui consiste à autoriser le développement de stratégies différentes, sans en imposer une particulière, voire la résolution d'une question nouvelle liée à celle de départ.

Nos nombreuses expérimentations de cette situation nous amène à la déclarer situation fondamentale (au sens de Brousseau) pour l'ensemble des savoir-faire transversaux. En effet, elle permet de manière fiable :

- la dévolution de la question, P1 jouant le rôle de mise en place d'un milieu pour reconnaître la tâche mathématique à faire,
- la résolution, en situation addidactique, de cas particuliers, et la construction par la manipulation de conjectures non évidentes et qui restent à prouver,
- la construction, par les élèves eux-mêmes, d'exemples et de contre-exemples,
- la mise en oeuvre de différents types d'argumentations et de preuves : exhaustivité des cas, absurde, exemple (cas des propriétés d'existence), contre-exemple, partition, coloration, récurrence.

III Un autre type de SiRC. Polyèdres réguliers

Nos situations sont plus ou moins proches du modèle SiRC. Ainsi, les questions qui suivent sont résolues depuis longtemps en mathématiques. Cependant, la situation que nous décrivons ci-dessous est étonnante du point de vue de l'activité mathématique qu'elle provoque, à tous les niveaux et même chez les étudiants en mathématiques, parce qu'elle oblige à une (re)découverte expérimentale des polyèdres réguliers de l'espace et, lorsque ceux-ci sont connus (polyèdres de Platon), elle provoque une confrontation entre les résultats expérimentaux et les connaissances théoriques.

La situation a été proposée à différents niveaux, mais étudiée plus précisément avec des élèves de 2^{nde} en France, de 3^e secondaire (14-15 ans) au Québec, et des étudiants de 3^{ème} année de formation des maîtres de l'UQAM, et de L3 de maths de l'UJF. Des résultats didactiques ont été publiés (Grenier & Tanguay, 2008).

1. Énoncé du problème

Question 1. Caractériser et définir les polyèdres réguliers.

Question 2. Les réaliser matériellement.

Question 3. Prouver que la liste établie précédemment est valide et complète.

La question 1 a pour objectif l'exploration des types d'objets de l'espace et une discussion sur la propriété de « régularité ».

Le matériel fourni pour la question 2 – boules et barres magnétisées ou pâte-à-fixe et cure-dents – joue un rôle essentiel, c'est une des variables de la situation. Il est choisi pour aborder la construction par les sommets et arêtes et non par les faces (qui ne sont pas données). La seule caractéristique de régularité imposée par ce matériel est que « toutes les arêtes sont de même longueur ». Le choix du nombre d'arêtes en un sommet, du type de faces et de leurs rapports avec la possibilité de construire un polyèdre et sa régularité sont à la charge des élèves.

La question 3 a pour objectif de discuter l'insuffisance de la construction matérielle et la nécessité d'une preuve pour attester qu'il n'y a que 5 polyèdres réguliers et les repérer parmi ceux qui ont été construits.

2. Éléments d'analyse didactique de la situation

Nous donnons brièvement ci-après l'essentiel des connaissances qui ont été régulièrement mises en jeu dans chacune des phases de la situation. Nous disposons, nous semble-t-il, d'une analyse a priori fiable. La propriété ci-dessous résume les caractéristiques qui sont en question pour la « régularité » d'un polyèdre, la régularité des faces et la convexité étant supposées.

Propriété. Pour un polyèdre convexe dont les faces sont congrues à un même polygone régulier, les quatre énoncés ci-dessous sont équivalents :

- *Les sommets sont de même degré*
- *Les angles dièdres sont tous congrus*
- *Le polyèdre est inscriptible dans une sphère*
- *Le groupe des symétries directes du polyèdre agit transitivement sur ses sommets.*

Phase de définition (question 1)

La recherche de la définition semble reliée à la possibilité de construire. Assez vite, à tous les niveaux, il y a un consensus pour affirmer que le solide est fermé et admet des symétries, et que ses faces sont des polygones réguliers identiques. Cependant, la définition de la régularité d'un polygone est parfois débattue, les types de symétrie sont imprécises, souvent exprimées « relativement à une base ». Le critère du « même nombre de faces en chaque sommet » n'est pas très présent, et souvent long à sortir. Le critère de « convexité » du polyèdre est absent des débats (et rien ne dit que c'est parce qu'il va de soi), même chez les étudiants de maths. Et, lorsqu'ils sont évoqués, ce qui est rare, les angles dièdres sont confondus avec les angles digones. Dans la gestion de la situation, il est donc nécessaire de prévoir un débat collectif sur les critères qui seront choisis pour la *régularité* et dont on a besoin pour les phases suivantes. Celle choisie par les mathématiciens remportent finalement une quasi unanimité.

Nous avons constaté que cette phase de définition conduit à une véritable exploration des polyèdres et plus généralement des solides et aussi à un retour sur la définition de régularité pour les polygones réguliers.

Phase de construction (question 2)

Le matériel (pâte-à-fixeur et cure-dents ou boules et tiges magnétiques) a été choisi pour laisser à la charge des élèves le choix des faces et du nombre d'arêtes en un sommet. Dans un premier temps, beaucoup de tentatives de construction se font au hasard. Elles aboutissent à des solides très divers qui parfois conduisent à re-questionner la définition sur laquelle on s'est mis d'accord (en particulier, pourquoi certains polyèdres étoilés sont-ils rejetés ?). Cependant, assez vite, apparaît la nécessité d'anticiper à la fois le type de faces et leur nombre en chaque sommet. Plus surprenant, parce que les faces ne sont pas désignées par le matériel, la question de la régularité pour les polygones est à nouveau posée. Le nombre de sommets du polyèdre en construction se décide par la fermeture du solide.

Nous donnons ci-après des conjectures — toutes fausses — qui surgissent régulièrement lors de cette phase de construction. Nous leur donnons le statut de conjectures parce qu'elles sont résistantes dans de nombreux groupes, où elles servent d'appui ou de contrôle.

C1. Les seules faces qui « marchent » sont celles qui pavent le plan

C2. Il existe un polyèdre régulier pour chacun des polygones réguliers

C3. Plus on met de triangles en un sommet, plus on se rapproche de la sphère

C4. On ne peut mettre plus de trois faces en un sommet car on est en dimension 3

C5. L'angle entre les faces est déterminé par les angles du polygone-face

Les conjectures C1 et C2 sont incompatibles, elles sont donc présentes dans des groupes différents, mais l'une comme l'autre ont conduit beaucoup d'élèves, et pour certains pendant un temps assez long, sur des pistes erronées — par exemple, à la recherche d'un polyèdre avec des faces hexagonales. Comme ce polyèdre est difficile à construire (difficulté attribuée à l'inadaptation du matériel !), on assiste parfois à un arrêt de la construction et une tentative de calcul, pour anticiper le nombre de faces de ce polyèdre (le critère du calcul étant d'assurer la fermeture du solide). De plus, C2 conduit à affirmer qu'il y a une infinité de polyèdres réguliers, alors que C1 au contraire conduit à refuser de chercher un polyèdre régulier avec des faces pentagonales.

La conjecture C3 est très présente, peut-être due à ces faux polyèdres réguliers, géodes et dômes quasi sphériques, réalisés en architecture avec un grand nombre de polyèdres réguliers de plusieurs types. C4 est bien sûr incompatible avec C3 et réduit considérablement les possibilités. Un coup d'oeil aux réalisations des groupes voisins la remet assez vite en question.

Enfin, C5 très présente et exprimée parfois avec force, lorsque le gestionnaire de la situation demande avec insistance de considérer l'angle entre deux faces (« Il n'y a qu'un angle dans un polyèdre régulier, c'est celui des faces polygonales ». C5 est révélatrice de la difficulté générale à repérer l'angle dièdre, d'ailleurs inconnu de la majorité des étudiants.

A la fin du travail en groupes, même si, finalement, les polyèdres retenus globalement sont ceux que l'on attend, il reste des doutes et des questions qui justifient d'accorder une grande place à la synthèse et à l'institutionnalisation des objets construits. Il est important de mettre alors en évidence qu'il reste à prouver que :

- les polyèdres construits sont réguliers, ce qui ne va pas de soi puisque certains critères ne sont pas matériellement vérifiables (certains ne sont pas rigides)
- il n'en existe pas d'autres vérifiant la définition que l'on a choisie.

Phase de preuve

La preuve qu'il y a *au plus* cinq polyèdres réguliers est accessible dès la fin de collège par des arguments simples de géométrie (on la trouve dans certains manuels de seconde, sauf qu'on en dit pas que c'est « au plus » que l'on démontre). Dès la fin du lycée, on peut faire une preuve originale par les diagrammes de Schlegel, qui s'appuie sur la représentation plane des polyèdres convexes quelconques par des graphes planaires, par projection stéréographique. Ce « nouveau problème » a un réel intérêt pour explorer les relations entre les objets de l'espace et leurs représentations planes. De plus, dans la preuve par les diagrammes de Schlegel, certaines des propriétés géométriques des polyèdres réguliers (arêtes et angles égaux) ne comptent plus : la représentation par des graphes ne respecte ni les angles ni les longueurs, ce qui induit un regard différent sur ces objets de l'espace.

La preuve que les cinq polyèdres construits sont valides (et qu'il y en a donc *exactement cinq*) est plus complexe, elle nécessite de s'appuyer sur la propriété donnée au début de ce paragraphe. Elle pose la question de la constructibilité des cinq polyèdres, question qui n'est jamais abordée dans l'enseignement. Dans cette phase de validation des polyèdres construits, nous avons repéré à plusieurs reprises une remise en cause de la régularité de l'octaèdre.

IV D'autres situations remarquables

Certaines de nos SiRC sont plus fondamentales que d'autres, au sens où elles sont susceptibles de remplir de manière fiable les objectifs d'apprentissage qui leur sont attribuées.

Deux d'entre elles peuvent être expérimentées à tous les niveaux et permettent à chacun de ces niveaux de faire un travail sur le raisonnement et la preuve. En voici quelques éléments.

1. Déplacements sur la grille

Le problème général est l'exploration de déplacements dans le plan discret (ensemble des points du plan à coordonnées entières). Il peut se décomposer en les questions suivantes :

- « Étant donné un point A sur le plan discret, et un ensemble de déplacements élémentaires (un déplacement élémentaire est un couple du type (1D, 2B), qui se lit « un à droite et deux en bas »)
- quels sont les points du plan que l'on peut atteindre par des combinaisons entières positives de ces déplacements élémentaires,
- l'un de ces déplacements est-il « redondant » (si on l'enlève de l'ensemble, on atteint les mêmes points)
- quel déplacement faudrait-il rajouter à l'ensemble pour aller partout dans le plan discret ?

La situation s'appuie sur un matériel simple : des feuilles de papier pointé (les points du plan discret sont donnés), on précise la lecture du couple donnant le déplacement élémentaire et ce qu'est leur combinaison (n'utilisant que des additions et multiplications dans $\mathbb{N}$).

Cette situation a été étudiée de manière approfondie par Cécile Ouvrier-Bufferet dans sa thèse (Ouvrier Bufferet 2003). Elle permet de rendre accessible *dès le primaire* les notions de vecteur, combinaison entière de vecteurs, ensemble générateur, ensemble minimal, vecteur redondant dans un ensemble, par des combinaisons de déplacements élémentaires et des recherches de points dans le plan discret. Elle permet aussi de re-questionner, *aux niveaux lycée et université*, et *en formation d'enseignants*, les notions de base de l'algèbre linéaire, en relation avec les notions introduites dans le plan discret : dans le plan discret, les ensembles générateurs minimaux n'ont pas tous le même nombre d'éléments (il y a un très beau théorème à la clé), on peut distinguer les trois propriétés libre, générateur et minimal, pour un ensemble de vecteurs.

Cette situation permet également d'explorer le plan discret et le repérage dans un plan.

2. La chasse à la bête

Cette situation a été inventée et étudiée dans le cadre d'une thèse en mathématiques discrètes (Duchêne 2006). Elle a été expérimentée cette année dans le cadre d'un mémoire de master2 (Chassan 2009), dans des classes de primaire (CE2, CM1 et CM2) et dans un groupe de PE2.

Le problème général est le suivant :

« On se donne une grille rectangulaire (un polymino) qui représente un champ, un ensemble de polyminos plus petits (dominos, ou triminos longs, ou triminos coudés) qui seront des types de bêtes et un ensemble d'uniminos qui seront des pièges. Les ensembles de bêtes et de pièges sont aussi grands que l'on veut. Sachant que les bêtes se posent le long des cases de la grille (et non en travers), pour chaque type de bêtes, quel est le plus petit nombre de pièges qui assure la protection du champ ? »

Le matériel fourni est le même que pour la situation des pavages, et le champ choisi dans cette situation est un carré 5×5 .

L'objectif de la situation est d'introduire la notion d'optimisation dans le domaine des entiers, ce qui la sort des cadres habituels⁵ de l'enseignement et simplifie son approche. Les trois problèmes de la situation sont accessibles dès le primaire et restent pertinents jusqu'à la fin de l'université. La situation est intégrée avec un grand succès (aussi bien du point de vue de la dévolution que du travail mathématique qu'elle provoque) chaque année dans un module optionnel en L1-L2 sciences de l'UJF et dans un module optionnel d'un cours doctoral à l'UCBL. À tous les niveaux, la manipulation matérielle s'avère nécessaire pour faire des conjectures. L'optimum (minimum) cherché est un entier que l'on obtient par des encadrements successifs de plus en plus serrés. Comme on travaille dans les entiers, le nombre d'étapes est fini.

G. Chassan a observé, enregistré et analysé la résolution du problème avec les trois types de bêtes, par des PE2. Il a noté en particulier les raisonnements faux débusqués lors des travaux de groupes, puis les apprentissages entre le début et la fin de la situation.

⁵ Essentiellement, pour les étudiants, minimiser revient avant tout à annuler la dérivée d'une fonction.

V Constats ou résultats généraux sur nos SiRC

1. Dévolution

Dans nos SiRC, l'intérêt pour la question posée et sa dévolution sont en général immédiats, d'autant plus si les connaissances mathématiques de base sont accessibles à tous. Nous avons pu vérifier le rôle quasi incontournable du matériel et de la phase expérimentale pour la dévolution d'une activité mathématique. Celle-ci est issue de la dialectique entre la manipulation et une réflexion théorique rendue nécessaire du fait que aucune solution n'est évidente et que plusieurs solutions non compatibles peuvent être soutenues.

2. Gestion

La gestion d'une SiRC est spécifique, en ce sens que l'enseignant n'est pas toujours dans des positions ou des rôles usuels. Cependant, il convient de moduler cette affirmation et de la préciser.

Dans un premier temps, l'enseignant doit pour l'essentiel être observateur, position qui ne lui est pas étrangère dans sa pratique de classe, lors des moments de travail en groupes de type « adidactique » : il doit alors vérifier la dévolution du problème, repérer les stratégies initiales, essais, erreurs des élèves, leurs questions, les pistes abandonnées, les raisonnements divers, les résultats partiels obtenus, qu'ils soient reconnus ou non comme tels etc. Bref, il s'agit de relever les éléments essentiels du débat collectif. Durant cette phase, il doit s'autoriser à répondre à des questions de compréhension du problème, ou intervenir en cas de blocage.

L'alternance de moments d'intervention et de moments « a-didactiques » est sous sa responsabilité.

Les phases collectives doivent porter non seulement sur la résolution du problème mais aussi sur les conjectures, exemples, contre-exemples, démarches, raisonnements qui ont été produits par les élèves. Et mener la discussion jusqu'au bout, ce qui peut prendre un temps assez long. Le sentiment de certains enseignants de ne pouvoir assurer cela tient peut-être à un manque d'habitude.

L'institutionnalisation n'a pas pour objectif de donner les solutions du problème, si celles-ci n'ont pas été produites, mais de mettre au clair le statut des raisonnements qui ont été faits (vrai, faux, CN, CS, CNS, etc), de préciser les stratégies menées, de différencier ce qui a été prouvé de ce qui reste à prouver, de préciser les types de preuve utilisés (absurde, exemple, contre-exemple, exhaustivité des cas, partition, coloration, récurrence, etc..).

3. Évaluation des apprentissages

A notre avis, l'évaluation de l'apprentissage des savoirs transversaux n'est pas plus difficile que celle des notions mathématiques strictes. Mais il est peut-être moins aisé de se leurrer ! Il n'est pas toujours évident de repérer une erreur dans un raisonnement ou une preuve complexes.

Comme pour toutes les situations expérimentales, on peut raisonnablement évaluer les effets des SiRC que si celles-ci font partie d'une organisation didactique non ponctuelle. C'est le cas depuis des années de certaines d'entre elles, intégrées dans différents cursus universitaires dans lesquels nous enseignons : en particulier, une UE d'ouverture en L1-L2 sciences (sur deux niveaux et toutes filières scientifiques)⁶, une UE de didactique en L3 de mathématiques à

6 Cette année, nous avons 25 étudiants de 8 parcours différents sur les deux niveaux L1 et L2

l'UJF et un module optionnel d'un cours doctoral à l'UCBL⁷. L'évaluation en L1-L2 comprend l'écriture d'un rapport de recherche sur un problème de type SiRC, non traité en classe. Le contrat pour l'étudiant est celui qui donné en début de cet enseignement : c'est la qualité de l'activité mathématique qui est évaluée : statut clair des affirmations, exemples ou cas particuliers traités, conjectures différenciées des hypothèses ou des résultats prouvés, etc.

4. SiRC et concepts mathématiques

Nos situations ne sont pas conçues pour enseigner un concept mathématique précis, puisque leur objectif premier est l'apprentissage des savoirs constitutifs de l'activité mathématique, la tâche de l'élève étant de résoudre le problème posé.

Chacune de nos situations met en jeu et questionne des notions mathématiques. Mais il est important de ne jamais privilégier a priori un objectif notionnel, le risque étant de tuer l'activité de recherche. D'autre part, il nous semble que les notions ou concepts mathématiques en jeu ne doivent pas être complexes, en tout cas, ils doivent être stables pour les élèves.

En conséquence, nos situations de recherche ne peuvent remplacer une organisation mathématique notionnelle. Cependant, nous pensons que ces SiRC sont nécessaires pour l'apprentissage des savoirs transversaux, elles devraient être intégrées de manière rationnelle à l'enseignement usuel.

Bibliographie

1. Bibliographie générale

Grenier D. (2008), *Expérimentation et preuves en mathématiques*, in Didactique, épistémologie et histoire des Sciences, PUF, collection « Sciences, homme et société » (L. Viennot ed).

Grenier D. & Tanguay D. (2008), L'angle dièdre, notion incontournable dans les constructions pratique et théorique des polyèdres réguliers, *petit x* n°78, ed IREM de Grenoble.

Grenier D. (2007), Des « situations recherche » pour la transition secondaire/université, actes du colloque EMF 2006 Sherbrooke.

Grenier D. (2006), Des problèmes de recherche pour l'apprentissage de la modélisation et de la preuve en mathématique. *Actes du colloque de l'Association Mathématique du Québec (AMQ)*, Sherbrooke, juin 2006.

Grenier D. & Payan, Ch. (2003), Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation, *cahiers du séminaire national de l'ARDM, Paris, 19 Octobre 2002*.

Grenier D. & Payan, Ch. (1998), Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en didactiques des mathématiques*, Vol. 18, n°1, pp. 59-99.

Tanguay, D. & Grenier, D. (2009), A classroom situation confronting experimentation and proof in Solid geometry. *Proceedings of the ICMI Study 19 conference*, vol. 2, pp.232-238, ISBN 978-986-01-8210-1.

⁷ Module optionnel « Situations de recherche » de l'Ecole doctorale EDIIS de l'université Claude Bernard à Lyon)

2. Thèses de « maths-à-modeler » intégrant l'étude de SiRC (ordre chronologique)⁸

Julien Rolland (1999), *Pertinence des mathématiques discrètes pour l'apprentissage de la modélisation et de l'implication*. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

Cécile Ouvrier-Buffet (2003), *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définition en mathématiques*. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

Virginie Deloustal-Jorrand (2004), *Etude épistémologique et didactique de l'implication en mathématique*. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

Karine Godot (2005), *Situations de recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation*. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

Caroline Poisard (2005), *Ateliers de fabrication et d'étude d'objets mathématiques, le cas des instruments à calculer*. Thèse de l'université d'Aix-Marseille 1.

Léa Cartier (2008), *Le graphe comme outil de preuve et de modélisation. Étude de l'introduction de la théorie des graphes dans l'enseignement de spécialité de Terminale ES (programmes 2003)*. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

Michèle Gandit (2008), *Étude épistémologique et didactique des relations entre argumentation et preuve en mathématiques*. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

Nicolas Giroud (en cours), *Le rôle de la démarche expérimentale dans les SiRC*. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

3. Mémoire de master2

Gérard Chassan (2009), *Apport des situations de recherche à l'apprentissage des « savoirs transversaux »*, mémoire de master2 didactique des sciences, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Annexe : exemples de SiRC étudiées dans l'ERTé « maths-à-modeler »

Nous donnons ci-dessous quelques-unes des situations de recherche étudiées dans le cadre de thèses, mémoires ou travaux plus personnels et pour lesquels nous avons une analyse a priori « fiable ». A la suite de l'intitulé, nous donnons la liste des apprentissages transversaux plus spécifiquement concernés par la situation, puis les notions mathématiques en jeu, enfin des références d'analyses didactiques.

Pavages de polyminos / distinction CN/CS, contre-exemple, théorèmes d'existence / aire, arithmétique de base, récurrence, algorithmes, coloration de graphes de grille / Grenier & Payan 1998, 2006, Deloustal-Jorrand 2004, Gandit 2008.

La chasse à la bête / optimisation dans N , raisonnements duaux / théorie des nombres, borne sup/borne inf, $\leq$, $\geq$, au plus/au moins / Chassan 2009.

Objets géométriques discrets / représentation, définition / géométrie euclidienne, géométrie non-euclidienne / Ouvrier-Buffet 2003.

⁸ Toutes les thèses de l'UJF ont été co-dirigées par Charles Payan ou Sylvain Gravier (tous les deux DR CNRS en maths discrètes) et par moi-même. La thèse de Caroline Poisard a été dirigée par Alain Mercier, PR en didactique des mathématiques.

Déplacements dans le plan discret / *définition* / systèmes générateurs, minimaux, algèbre linéaire / Ouvrier-Buffer 2003.

Les gardiens de musée / *optimisation* / triangulation d'un polygone, coloration / Grenier et al.

Polyèdres réguliers de l'espace / *définition, construction, modélisation et preuve* / géométrie du plan et de l'espace, graphes, graphes planaires / Grenier & Tanguay 2008, 2009.

Polygones réguliers à sommets entiers / *réurrence, absurde* / géométrie combinatoire, transformations géométriques / Grenier & Payan 1998.

Disques dans triangles ou carrés / *modélisation, optimisation* / géométrie combinatoire, graphe / Grenier & Payan 1998, Semri 2007.

Dénombrements de mots, chemins, pavages / *modélisation, bijection* / arithmétique, analyse combinatoire / Rolland 1999, Ouvrier-Buffer 2003.

Quadrilatères spécifiques / *construction, constructibilité, implication, preuve, définition* / figure générique, convexité / Deloustal-Jorrand 2004, Gandit 2008.

La roue aux couleurs / *heuristique, contre-exemple, modélisation (codage)* / dénombrement, décalage, relations dans N / Godot 2005.

Graphes, arbres / *définition, modélisation, optimisation, preuve* / Cartier 2008.