Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20ème siècle. Connaissances des élèves actuels.

Christine Chambris

Laboratoire André Revuz (ex DIDIREM)

IUFM de Versailles – Université de Cergy-Pontoise

Résumé :

En 150 ans, des bouleversements profonds ont affecté les relations entre grandeurs et nombres dans les mathématiques savantes et enseignées, et dans la vie courante. Nous voulons comprendre le statut actuel de ces relations à l'école primaire française et envisageons d'autres statuts pour demain. Notre cadre théorique de référence est la théorie anthropologique du didactique.

Nous avons approfondi l'étude de l'enseignement du système métrique, de la numération de position des entiers et de l'articulation entre ces deux enseignements. Nous avons aussi abordé celle des relations entre opérations (sens, techniques de calcul) et grandeurs (notamment la longueur et les représentations utilisant des schémas cotés).

Notre étude s'est développée selon trois axes en étroite interaction :

- les liens entre grandeurs, nombres, opérations et pratiques pour la vie courante : dans cet axe, nous avons analysé ces liens avant la réforme des mathématiques modernes puis les ruptures que cette dernière a provoquées dans ces liens. Notre corpus pour cette partie était constitué de textes du 20e siècle : programmes, manuels scolaires (2e et 3e primaire) ;
- les savoirs savants : dans cet axe, il s'est agi d'une part de repérer les savoirs transposés à différentes époques, d'autre part d'identifier des conditions à satisfaire pour des théories mathématiques (éventuellement à formuler) susceptibles de servir de référence pour l'enseignement des grandeurs, nombres et opérations. Pour cela, nous avons pris en compte des besoins mathématiques et didactiques : notamment tâches, discours justificatifs destinés aux élèves, cohérence des savoirs, continuité des apprentissages ;
- les connaissances des élèves actuels (277 élèves en 5e primaire) : dans cet axe, il s'est s'agi de mieux cerner les ruptures et manques apparus avec l'étude des liens et des savoirs savants.

Mots clefs

Relations entre grandeurs, nombres et opérations, réforme des mathématiques modernes, écologie des savoirs, chaînes et besoins trophiques, numération de position, théorie mathématique pour l'enseignement élémentaire, école primaire

Introduction

Ce texte constitue une présentation de ma thèse intitulée « Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20ème siècle. Connaissances des élèves actuels » (Chambris, 2008). Je l'ai soutenue le 6 novembre 2008. Marie-Jeanne Perrin-Glorian a dirigé mon travail.

Ce texte comprend trois parties. Dans une première partie, introductive, je présente mes questions de départ, le cadre théorique que j'ai retenu et la problématique qui en découle, ensuite mes hypothèses de recherche. Dans une deuxième partie je présente en parallèle ma méthodologie et des résultats. Le plan de cette partie s'appuie sur la méthodologie de la thèse. Cette partie est découpée en trois moments. Le premier moment est consacré à l'étude globale des programmes, des théories mathématiques des grandeurs et des rapports entre programmes et théories. Le deuxième moment présente conjointement des éléments quant aux chaînes trophiques impliquant grandeurs, nombres ou opérations avant la réforme et des éléments relatifs au questionnaire que j'ai proposé aux élèves. Le troisième moment est consacré à l'évolution des organisations mathématiques sur la numération au 20$^{\text{ème}}$ siècle. Pour finir, je tire quelques conclusions et présente des perspectives de recherche en didactique.

Questions de départ et choix du cadre théorique

Au départ de ce travail, il y a la réforme des mathématiques modernes[1]. Elle a séparé l'étude des grandeurs et des nombres. Une manifestation de cette rupture est la création du domaine mesure dans le programme de 1970 de l'école primaire. Ensuite, à partir des années 80 et, de plus en plus, on voit réapparaître localement des grandeurs pour étudier le « numérique », comme si les grandeurs étaient nécessaires pour étudier les nombres.

Je veux donc comprendre ce qu'apportait l'enseignement des grandeurs avant la réforme. S'agissait-il seulement d'enseigner des pratiques de la vie courante pour elles-mêmes ou au contraire l'enseignement des grandeurs contribuait-il à d'autres apprentissages plus conceptuels, notamment sur les nombres ?

Par suite, je veux aussi comprendre ce qu'il en est des relations entre grandeurs et nombres dans l'enseignement d'aujourd'hui et ce qu'il en résulte dans les connaissances des élèves. Sont-ils capables d'utiliser conjointement leurs connaissances sur les grandeurs et les nombres pour étudier des situations ? Leur manque-t-il quelque chose ?

Pour étudier ces questions, j'utilise la théorie anthropologique du didactique. Principalement, j'utilise une facette de cette théorie : l'écologie des savoirs. L'écologie des savoirs permet d'étudier des questions telles que : comment les objets d'enseignement vivent-ils ? Avec qui vivent-ils ? Comment naissent-ils ? Pourquoi meurent-ils ?

Dans une perspective écologique ma problématique consiste alors à étudier l'écologie des grandeurs et des nombres dans les mathématiques de l'école primaire avant la réforme et après pour comprendre la situation actuelle et pour envisager d'autres possibles.

Précisions sur le cadre théorique et hypothèses de recherche

Avant de préciser les questions que j'étudie en explicitant mes hypothèses de recherche, je reviens au cadre théorique. Comme on va le voir, je me réfère abondamment à la notion de praxéologie (Chevallard, 2007). J'ai aussi utilisé les notions de chaînes et besoins trophiques, qui sont des éléments un peu moins connus de la TAD.

Une chaîne trophique (du grec « trophein », nourrir) est une sorte de chaîne alimentaire pour les objets d'enseignement (Artaud, 1997). Cirade (2006) indique que :

> l'organisation des connaissances mathématiques suppose des chaînes trophiques, dans lesquelles une praxéologie « se nourrit d'une autre » et, par cela, paradoxalement, *la fait exister* dans l'institution qui lui sert d'habitat.

1 Dans la suite du texte, je parlerai de « la réforme ».

On peut d'abord énoncer que, pour un objet d'enseignement, le fait d'être utile à d'autres, d'être dans une chaîne, d'être mangé par d'autres, est un bon moyen d'exister. Ensuite, pour vivre, un objet d'enseignement a des besoins, notamment technologiques : par exemple, pour qu'une tâche vive dans une institution donnée il peut être bon que sa technique puisse être justifiée dans cette institution.

Pour fonder ma première hypothèse de recherche, je me réfère d'abord à Yves Chevallard (1992) qui affirme que :

> la Réforme provoque un bouleversement écologique au sein du curriculum, en déréglant nombre d'écosystèmes mathématiques, produits d'une évolution longue et complexe, dont certains, aujourd'hui encore, n'ont pu être revitalisés.

Je me réfère ensuite à Bronner (2008) qui étudie le numérique dans le secondaire. Il montre que, jusqu'en 1945 au moins, une théorie des grandeurs fondait l'étude des nombres.

Ma première hypothèse consiste alors à affirmer qu'il existait des chaînes trophiques en primaire avant la réforme notamment pour ce qui concerne l'étude des nombres, grandeurs et opérations. J'essaie donc d'en repérer.

Pour ma deuxième hypothèse, je m'appuie en outre sur Parouty (2005) qui étudie les connaissances des élèves actuels en numération. Elle observe notamment que lorsqu'on apprend aux élèves à résoudre des problèmes de numération « en contexte », ils progressent globalement dans toute la numération et pas seulement dans la résolution de tels problèmes ce qui n'aurait rien de remarquable. Pourtant l'enseignement de tels problèmes semble n'être pas très répandu.

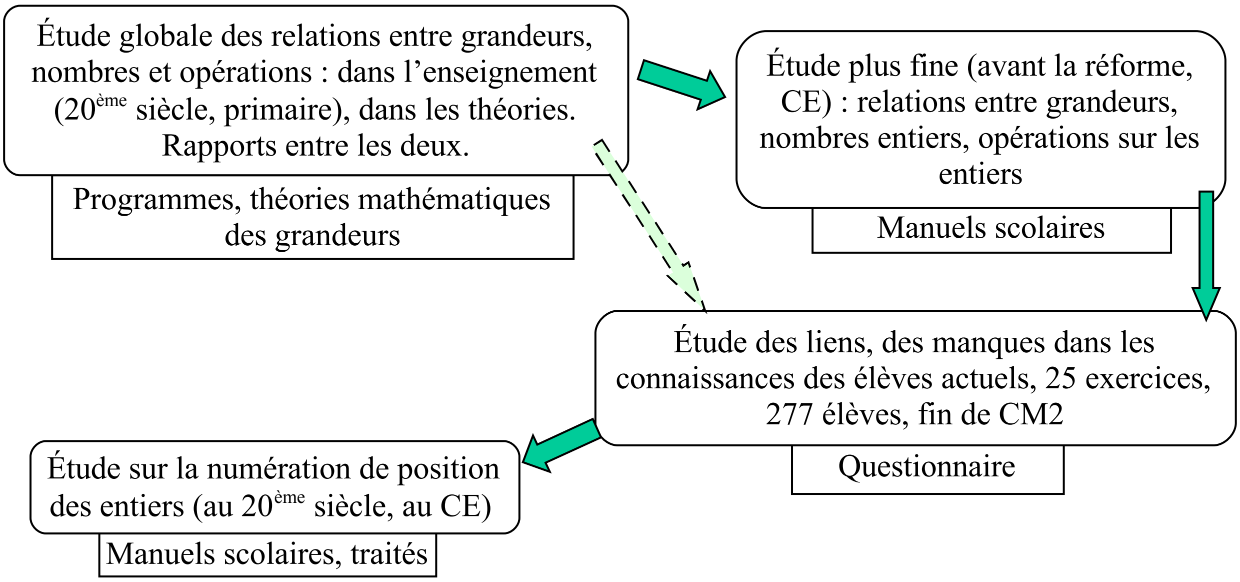
Je fais alors l'hypothèse que la réforme a profondément détérioré certaines chaînes trophiques en primaire et que les remaniements qui l'ont suivie n'ont pas réussi à récréer des liens. Ceci serait vrai en particulier pour l'étude de la numération de position.

Avant de formuler ma troisième hypothèse, je fais référence au travail de Robert Neyret (1995). Il pointe, en 1995, le manque et donc le besoin d'un traité pour la formation des maîtres quant aux fractions et décimaux. Il distingue en fait deux types de savoirs savants : le savoir savant utile à la sphère productrice des savoirs et le savoir savant, mathématiquement correct, mais adapté aux besoins de l'enseignement, qu'il appelle traité. Je les appelle savoirs savants de premier et de second ordre.

Ces éléments m'amènent à formuler une 3^{e} hypothèse de recherche : certains savoirs savants, ceux du 1er ordre, sont plus adaptés que d'autres, ceux du 2nd ordre, pour être transposés.

I Méthodologie et résultats

Pour présenter la méthodologie et les résultats je me réfère au schéma suivant que je décris ensuite :



Dans un premier temps, je cherche à mettre à jour, de façon globale, les relations entre grandeurs, nombres et opérations : d'une part dans les mathématiques de l'école primaire tout au long du 20ème siècle, d'autre part dans les théories mathématiques des grandeurs. J'étudie aussi les rapports entre les deux. Ceci me permet d'envisager d'autres possibles. Pour mener à bien ce projet, je m'appuie sur les programmes, pour tous les niveaux de l'école primaire, et j'étudie des textes mathématiques qui sont des savoirs savants de premier ou de second ordre.

Après mon étude globale des programmes et des théories, je souhaite mieux comprendre la situation antérieure à la réforme pour ce qui concerne les relations entre grandeurs, nombres et opérations dans l'enseignement. Pour ce faire, je restreins mon objet d'étude en me limitant d'une part aux relations qui impliquent les nombres entiers et d'autre part à un seul niveau de l'école primaire, le cours élémentaire.

Je cherche donc à mieux cerner les chaînes trophiques qui ont pu exister avant la réforme : d'une part celles évoquées dans les programmes, c'est-à-dire les relations entre système métrique et numération, et d'autre part, d'autres qui n'y sont pas évoquées mais qui sont susceptibles d'exister du fait d'une théorie sous-jacente des grandeurs pour étudier les nombres, ce sont celles qui impliquent les opérations. À la place des programmes, j'utilise des manuels scolaires du cours élémentaire.

Ensuite, à l'aide d'éléments des deux premières parties de ma recherche : identification de tâches qui correspondent à des axiomes nécessaires à l'élaboration de théories, identification de chaînes trophiques dans l'enseignement ancien, et d'une connaissance empirique de l'école primaire actuelle, je conçois un questionnaire pour les élèves. En fait, je veux savoir si ces chaînes trophiques et ces tâches issues de la théorie constituent ou non des « trous » dans les connaissances des élèves. Je vais proposer des exercices qui mettent en jeu des savoirs supposés acquis. Ils sont supposés acquis en ce sens qu'ils mobilisent des connaissances sur les entiers et des connaissances élémentaires sur les grandeurs. *A priori*, je pense toutefois que, pour certains d'entre eux, ces savoirs sont peu ou pas enseignés. Je prends notamment des exercices de l'enseignement ancien dans lesquels j'actualise les pratiques de la vie courante. Ensuite, je fais passer le questionnaire et j'analyse les réponses.

Dans ce texte, pour présenter les résultats, je rapproche les éléments relatifs aux chaînes trophiques et au questionnaire. Je commence par deux aspects relatifs aux opérations, je poursuis par des éléments qui concernent les relations entre numération et système métrique.

L'analyse des résultats des élèves au questionnaire et l'étude de l'écologie de la numération et du sytème métrique avant la réforme m'amènent à étudier l'enseignement de la numération de position : il s'agit ensuite de comprendre la situation actuelle de cet enseignement. Pour cela, je fais une nouvelle incursion dans le passé, j'essaie de comprendre cet enseignement avant la réforme et les évolutions qui l'ont suivie. J'utilise des manuels scolaires du cours élémentaire et des traités, anciens et récents.

Étude globale des relations entre grandeurs, nombres et opérations

Chaînes trophiques, aspect global : créations et rupture jusqu'en 1970

Tout d'abord du point de vue des liens visibles dans les programmes, je repère que le programme de 1923 prescrit l'articulation du système métrique et de la numération – ce qui n'était pas le cas du programme antérieur de 1882.

Ensuite, l'étude du programme de 1970 me permet de mieux cerner la rupture entre les grandeurs et les nombres lorsqu'elle est introduite. Avant 1970, il y a l'arithmétique. En 1970, en remplacement de l'arithmétique, on crée en fait deux domaines : la mesure et le numérique, qui apparaissent ainsi comme les deux faces d'une même pièce. En 1970, dans le numérique, les nombres, même non entiers, mesurent le discret. Dans le domaine « mesure », ils mesurent le continu[2]. Cette rupture manifeste le changement de théorie de référence car on essaie ainsi de créer une étude des nombres non entiers qui ne s'appuie pas sur le fractionnement des grandeurs, un peu comme dans la théorie savante où les réels sont construits à partir des entiers.

Rapports entre programmes et théories : théorie transposée, théorie reconstituée

Sur le plan des rapports entre les programmes et les théories, j'essaie d'identifier ou de caractériser les théories sous-jacentes dans les programmes à différentes époques. Pour cela j'utilise deux méthodes. Pour la première, il s'agit de repérer les théories effectivement transposées, c'est-à-dire celles qui ont pu servir de référence « officiellement ».

De ce point de vue, le premier chapitre du livre de Lebesgue, « La mesure des grandeurs », paru en 1931, semble avoir très largement inspiré les modifications du programme de 1945 concernant le rabattement des décimaux sur les entiers et les fractions vues comme opérateurs.

2 Plus précisément, le domaine « mesures » de 1970 est constitué par ce qui relevait du continu dans l'« ancienne arithmétique » et des grandeurs géométriques (aire et volume) de l'« ancienne géométrie ».

Il est connu que depuis 1970, le numérique est le savoir savant de référence [3]. Pourtant, dans les programmes, depuis 1980, on prescrit l'étude des fractions par la mesure des grandeurs et, en 2002, des discours justificatifs sur la proportionnalité qui impliquent des opérations sur les grandeurs. Ces éléments sont officiellement réintroduits pour satisfaire les besoins de l'organisation didactique, à savoir la construction des savoirs par les élèves. Ils s'inscrivent mal dans le numérique où il n'y a pas de grandeurs.

Je cherche alors à rapprocher d'une théorie mathématique ces tâches et discours explicatifs impliquant des grandeurs. J'utilise un savoir savant de 2[nd] ordre, la théorie des grandeurs développée par Rouche (1992, 1994) au début des années 1990. Les tâches et discours réintroduits s'inscrivent bien dans cette théorie. Ceci me permet de rapprocher les différentes composantes des praxéologies enseignées : tâches, techniques, technologies et la théorie. Ceci constitue, pour moi, une deuxième méthode pour caractériser une théorie sous-jacente dans les programmes.

Corrélativement, je repère aussi des manques dans les programmes par rapport à la théorie : c'est-à-dire des tâches qui n'apparaissent pas dans le programme mais qui correspondent à des axiomes nécessaires à l'élaboration de la théorie. Et je me demande si ces tâches ne seraient pas nécessaires à l'apprentissage.

Quelle théorie de référence choisir pour l'enseignement actuel des grandeurs, nombres et opérations ?

Enfin, fondamentalement, je cherche à identifier ce que pourrait être une bonne théorie des grandeurs pour l'école primaire. Ce travail n'est pas achevé. Il ne s'agit d'ailleurs pas forcément d'identifier une théorie, mais éventuellement plusieurs qui se complèteraient.

Je cherche donc une (ou des) théories qui permette de « coiffer »[4] les besoins mathématiques et didactiques relatifs aux grandeurs, nombres et opérations : c'est-à-dire, recouvrant notamment les tâches, techniques, technologies prescrites par les programmes ou l'ayant été, et qui pourrait aussi permettre de satisfaire les besoins pour le début du secondaire. L'étude de théories existantes permet de comparer les présupposés des théories et les objets qu'elles permettent de construire. En confrontant cela aux besoins pour l'enseignement, on peut envisager des choix concernant ce qui serait possible ou souhaitable d'enseigner et les théories qui accompagnent ces choix, théories qui sont susceptibles de faire apparaître d'autres tâches.

3 Parce que Lebesgue (1931) semble reléguer les grandeurs au domaine de la « métaphysique », on a parfois interprété l'exclusion des grandeurs en 1970 comme une sorte d'exécution posthume de sa volonté. Cette hypothèse nous semble à exclure pour plusieurs raisons. Tout d'abord, le premier chapitre de « La mesure des grandeurs » est une construction des réels qui s'appuie sur la mesure des segments géométriques et Lebesgue le revendique. Il ne s'agit donc en aucun cas d'exclure le continu ou la géométrie pour construire les nombres. Ensuite, il nous semble nécessaire de recontextualiser les éléments relatifs à la métaphysique. C'est probablement certaines constructions d'objets par classe d'équivalence qu e rejète Lebesgue, il semble en effet qu'on puisse voir là une conséquence très directe de la crise des fondements. Enfin, c'est Lebesgue qui écrit « toute question qui conduit à une multiplication est un problème de changement d'unité, ou d'objet : 5 sacs de 300 pommes ; 2 m. 75 d'étoffe à 28 fr. 45 le mètre ». Plus que le programme de 1970, il nous semble donc probable que le programme de 1945 constitue une transposition du 1[er] chapitre livre de Lebesgue (mort en 1941). Ceci n'empêche pas que, dans la préparation de la réforme, la noosphère a probablement retravaillé la construction des réels du chapitre 1 (qui valorise les développements décimaux) pour en faire une construction des réels qui ne s'appuie pas sur la mesure des grandeurs. Par suite, il est bien possible que Lebesgue a servi de caution « morale » à l'éviction des grandeurs, à son corps défendant.

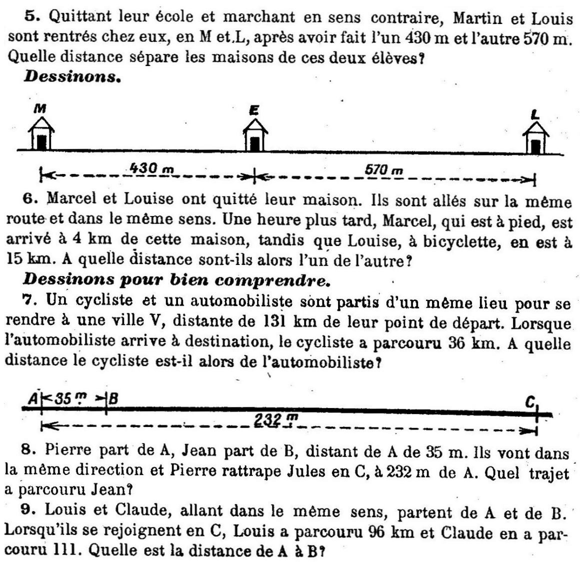
4 Je reprends l'expression de Neyret.

Chaînes trophiques avant la réforme et questionnaire destiné aux élèves

Relations entre grandeurs et opérations

Pour montrer les relations entre grandeurs et opérations, je vais me limiter à l'exemple de la longueur car il en général plus développé que les masses ou les capacités dans les manuels mais aussi parce que c'est probablement une grandeur fondamentale pour l'étude des nombres en général, même pour la sphère mathématique savante.

Je présente un peu en détail la question des schémas cotés. Je prends l'exemple d'un manuel scolaire du CE1.



5. Quittant leur école et marchant en sens contraire, Martin et Louis sont rentrés chez eux, en M et.L, après avoir fait l'un 430 m et l'autre 570 m. Quelle distance sépare les maisons de ces deux élèves?

Dessinons.

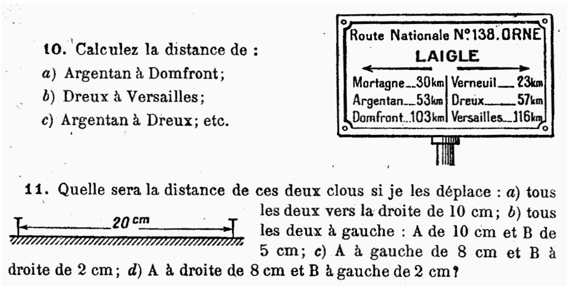
6. Marcel et Louise ont quitté leur maison. Ils sont allés sur la même route et dans le même sens. Une heure plus tard, Marcel, qui est à pied, est arrivé à 4 km de cette maison, tandis que Louise, à bicyclette, en est à 15 km. A quelle distance sont-ils alors l'un de l'autre?

Dessinons pour bien comprendre.

7. Un cycliste et un automobiliste sont partis d'un même lieu pour se rendre à une ville V, distante de 131 km de leur point de départ. Lorsque l'automobiliste arrive à destination, le cycliste a parcouru 36 km. A quelle distance le cycliste est-il alors de l'automobiliste?

8. Pierre part de A, Jean part de B, distant de A de 35 m. Ils vont dans la même direction et Pierre rattrape Jules en C, à 232 m de A. Quel trajet a parcouru Jean?

9. Louis et Claude, allant dans le même sens, partent de A et de B. Lorsqu'ils se rejoignent en C, Louis a parcouru 96 km et Claude en a parcouru 111. Quelle est la distance de A à B?



10. Calculez la distance de :

a) Argentan à Domfront;

b) Dreux à Versailles;

c) Argentan à Dreux; etc.

11. Quelle sera la distance de ces deux clous si je les déplace : *a*) tous les deux vers la droite de 10 cm; *b*) tous les deux à gauche : A de 10 cm et B de 5 cm; *c*) A à gauche de 8 cm et B à droite de 2 cm; *d*) A à droite de 8 cm et B à gauche de 2 cm?

(Marijon et al., 1947, pp.50-51, CE1, 22^e^ leçon : Problèmes sur l'addition et la soustraction)

La leçon est intitulée « Problèmes sur l'addition et la soustraction ». Avant cette leçon, les élèves ont déjà rencontré des schémas cotés, toujours dans des problèmes d'arithmétique qui portent sur la longueur dans des unités de longueur déjà étudiées. Dans ce manuel, c'est sur cette page que les kilomètres interviennent pour la première fois dans les problèmes d'arithmétique, sans doute est-ce parce que cette leçon suit l'étude du kilomètre.

On voit dans cette leçon une progression pour l'apprentissage des schémas cotés pour résoudre des problèmes de positions relatives sur une ligne. Au début, l'énoncé comporte un dessin ; ensuite, on demande à l'élève de « dessiner », à la fin il n'y a plus d'indication relative au dessin. Les problèmes mettent en jeu diverses difficultés qui impliquent des mesures de longueurs et des positions relatives sur une ligne, notamment des pancartes.

Plus tard dans l'année, dans ce manuel, on retrouve de tels problèmes, avec des difficultés supplémentaires : ils impliquent alors des vitesses. On peut penser qu'on est dans une progression qui permet d'arriver aux « problèmes de trains » du certificat d'étude. Plus tard, également, on trouve des leçons qui mobilisent des schémas cotés pour résoudre des problèmes qui portent sur d'autres grandeurs que la longueur.

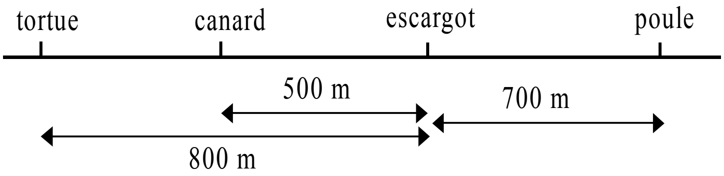
Ainsi, dans le cadre de l'apprentissage de la longueur, on apprend à utiliser des schémas cotés, avant de les utiliser pour résoudre des problèmes relatifs à d'autres grandeurs. Ces apprentissages se réalisent à travers l'étude de certaines pratiques de la vie courante, caractéristiques de la grandeur : problèmes de distances puis de positions relatives sur une ligne pour la longueur ; problèmes de perte et bénéfice pour la monnaie par exemple.

Plus généralement, il me semble qu'on peut dire, que dans les livres anciens, le sens des opé - rations se construit notamment dans l'étude des différentes grandeurs et que l'étude d'une grandeur se construit notamment dans l'étude des opérations où on la rencontre [5].

J'ai proposé à des élèves de CM2 des exercices relatifs à la question des schémas cotés. Je retrouve des erreurs connues sur la lecture des schémas mais je pense que j'arrive à mieux les caractériser. J'ai retenu deux de ces exercices. Je précise que les élèves n'avaient pas accès à la règle graduée lorsqu'ils les ont traités.

Voici le premier :

Sur un chemin, il y a quatre animaux : un escargot, une tortue, une poule et un canard.



Sur le chemin, quelle est la distance entre la tortue et l'escargot ?
Sur le chemin, quelle est la distance entre le canard et la poule ?
Sur le chemin, quelle est la distance entre la tortue et le canard ?
Sur le chemin, quelle est la distance entre la tortue et la poule ?

Les quatre animaux sont représentés sur une ligne droite. Certaines distances sont indiquées à l'aide de flèches cotés. Les proportions sont visiblement fausses sur le dessin. Il y a quatre tâches à effectuer.

Trois de ces tâches sont réussies à plus de 75%. Pour déterminer la distance entre la tortue et l'escargot, il faut lire la distance sur le schéma, 800 (R=85%). Pour la distance entre le canard et la poule, il faut additionner deux longueurs : 500 et 700 (R=75%). Pour la distance entre la tortue et la poule, il faut additionner 800 et 700 (R=75%).

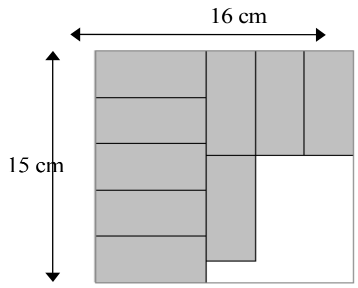
L'autre tâche consiste à déterminer la distance entre la tortue et le canard. Elle mobilise une soustraction : 800-500. Elle est beaucoup moins bien réussie que les autres mais en fait il y a trois réponses majoritaires : 300 (35%), 500 (31%), 400 (20%). Les réponses 400 et 500 sont probablement dues au fait que le canard semble être représenté « au milieu » entre la tortue et l'escargot, 400 est probablement obtenu par le calcul 800:2 et 500 la distance entre la tortue et le canard à la distance entre le canard et l'escargot. Ces deux réponses montrent une interpré - tation du schéma en termes de proportionnalité, plus ou moins grossière.

Pour cette dernière question, j'observe, par ailleurs, qu'environ 5% des élèves rayent une pre - mière réponse : 400 ou 500 puis donnent la bonne réponse 300. Ceci est probablement le signe d'un renoncement à la proportionnalité et la manifestation d'un conflit entre la valeur 800 qui se lie sur le dessin et ce qui s'obtient par un calcul additif très simple impliquant les proportions du dessin (400+500 ou 500+500).

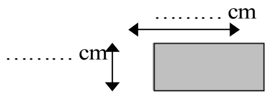
5 Tous les manuels ne présentent pas une progression aussi structurée que (Marijon, CE1) sur les schémas cotés mais dans tous ceux que j'ai consultés, j'ai observé les éléments que je signale en conclusion.

Voici maintenant un autre exercice qui implique des schémas. Il est directement inspiré des évaluations d'entrée en 6ème. J'ai modifié un peu les valeurs numériques.

Sophie veut découper des étiquettes rectangulaires toutes identiques dans une plaque de carton rectangulaire de dimensions 16 cm et 15 cm. Elle en a tracé neuf comme tu peux le voir sur le dessin.



Calcule les dimensions d'une étiquette et indique-les sur le dessin ci-dessous.



Une erreur prégnante consiste à donner, malgré l'absence de règle graduée, les dimensions du dessin (les élèves répondent alors 1cm et 2cm ou 1cm et 3cm). Environ 10% des élèves fournissent une telle réponse. Toutefois, cette erreur est très minorée par rapport à ce qu'on observe dans les évaluations d'entrée en 6ème où la moitié des élèves mesurent avec la règle. Parallèlement, on observe une réussite beaucoup plus forte dans la thèse qu'aux évaluations nationales : dans la thèse 40% des élèves réussissent contre 13% aux évaluations nationales. J'attribue ce progrès à la suppression de la règle graduée. Cette suppression semble provoquer un changement de contrat didactique qui autorise les élèves à chercher autre chose que la simple mesure avec la règle.

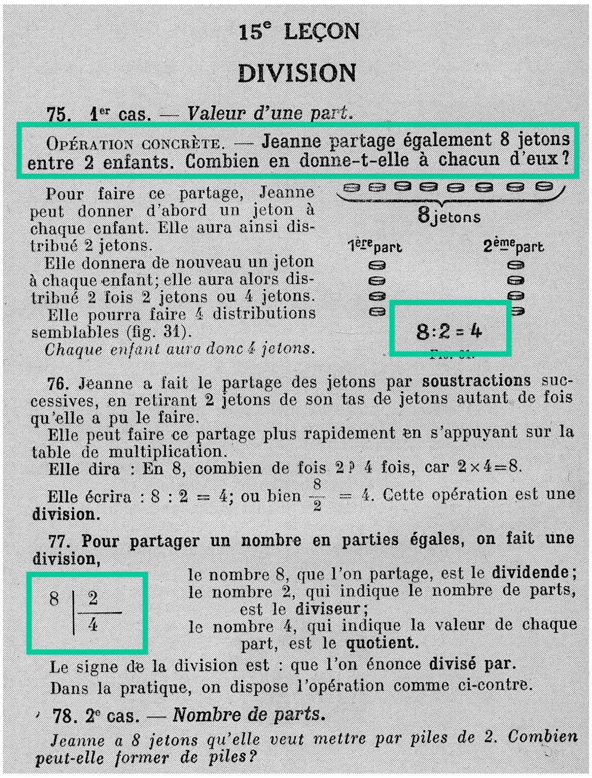
Pour résumer, je retrouve deux types d'erreurs connues sur l'apprentissage des schémas cotés : celle où les élèves considèrent que les dimensions de la réalité sont celles du schéma, une autre où ils utilisent avec raison les dimensions cotées mais à tort les proportions du schéma. Je pense que je mets en évidence des conditions pour les faire apparaître et peut-être disparaître : la suppression de la règle graduée pour modifier le contrat didactique, des proportions fausses et des calculs simples pour favoriser la compréhension des schémas en créant un conflit cognitif. Ces éléments offrent des perspectives pour des ingénieries didactiques.

Pour conclure sur cette question des schémas cotés, je ne pense pas que les difficultés cognitives des élèves d'hier étaient différentes de celles des élèves d'aujourd'hui mais la densité des réseaux trophiques apparaît comme un moyen, utilisé hier, pour les prendre en charge. Ce moyen n'est probablement plus utilisé aujourd'hui. J'ignore évidemment son degré d'efficacité.

Relations entre opérations et nombres

Après les relations entre grandeurs et opérations, je prends le cas de la division pour les relations entre opérations et nombres. Dans les livres à partir des années 30, le symbolisme des deux points pour la division est introduit assez tôt, dans la leçon « division », toujours après la multiplication. On étudie ensuite en parallèle des techniques de calcul et des problèmes de division.

Pour illustrer cela, je prends l'exemple de trois leçons d'un même manuel scolaire du cours élémentaire (Boucheny et al., 1930, CE), publié pour la première fois au début des années 30.



15e LEÇON

DIVISION

75. 1er cas. — *Valeur d'une part.*

OPÉRATION CONCRÈTE. — **Jeanne partage également 8 jetons entre 2 enfants. Combien en donne-t-elle à chacun d'eux ?**

Pour faire ce partage, Jeanne peut donner d'abord un jeton à chaque enfant. Elle aura ainsi distribué 2 jetons.

Elle donnera de nouveau un jeton à chaque enfant; elle aura alors distribué 2 fois 2 jetons ou 4 jetons.

Elle pourra faire 4 distributions semblables (fig. 31).

Chaque enfant aura donc 4 jetons.

76. Jeanne a fait le partage des jetons par **soustractions** successives, en retirant 2 jetons de son tas de jetons autant de fois qu'elle a pu le faire.

Elle peut faire ce partage plus rapidement en s'appuyant sur la table de multiplication.

Elle dira : En 8, combien de fois 2 ? 4 fois, car $2 \times 4 = 8$.

Elle écrira : $8 : 2 = 4$; ou bien $\frac{8}{2} = 4$. Cette opération est une **division.**

77. Pour partager un nombre en parties égales, on fait une division,

$$8 \,\big|\, \underline{2} \atop \quad 4$$

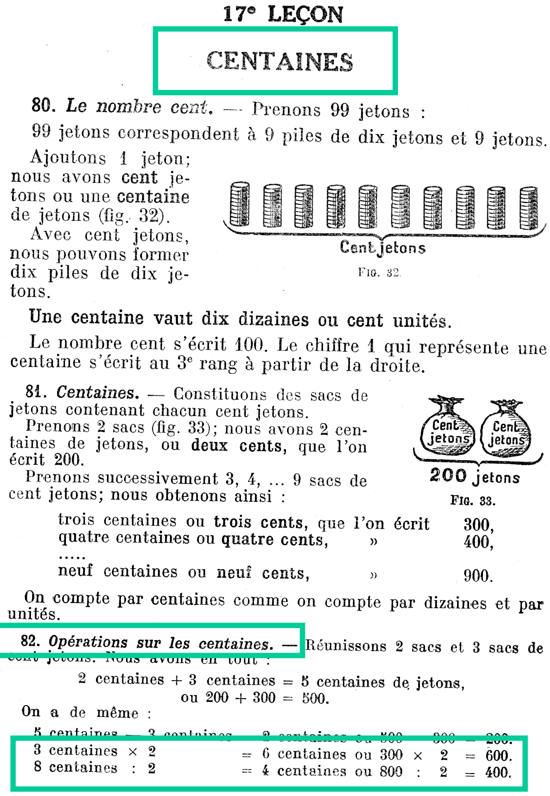
le nombre 8, que l'on partage, est le **dividende**;
le nombre 2, qui indique le nombre de parts, est le **diviseur**;
le nombre 4, qui indique la valeur de chaque part, est le **quotient.**

Le signe de la division est : que l'on énonce **divisé par.**

Dans la pratique, on dispose l'opération comme ci-contre.

78. 2e cas. — *Nombre de parts.*

Jeanne a 8 jetons qu'elle veut mettre par piles de 2. Combien peut-elle former de piles?



17e LEÇON

CENTAINES

80. *Le nombre cent.* — Prenons 99 jetons :

99 jetons correspondent à 9 piles de dix jetons et 9 jetons.

Ajoutons 1 jeton; nous avons **cent** jetons ou une **centaine** de jetons (fig. 32).

Avec cent jetons, nous pouvons former dix piles de dix jetons.

FIG. 32.

Une centaine vaut dix dizaines ou cent unités.

Le nombre cent s'écrit 100. Le chiffre 1 qui représente une centaine s'écrit au 3e rang à partir de la droite.

81. *Centaines.* — Constituons des sacs de jetons contenant chacun cent jetons.

Prenons 2 sacs (fig. 33); nous avons 2 centaines de jetons, ou **deux cents**, que l'on écrit 200.

Prenons successivement 3, 4, ... 9 sacs de cent jetons; nous obtenons ainsi :

FIG. 33.

trois centaines ou **trois cents**, que l'on écrit 300,
quatre centaines ou **quatre cents**, » 400,
.....
neuf centaines ou **neuf cents**, » 900.

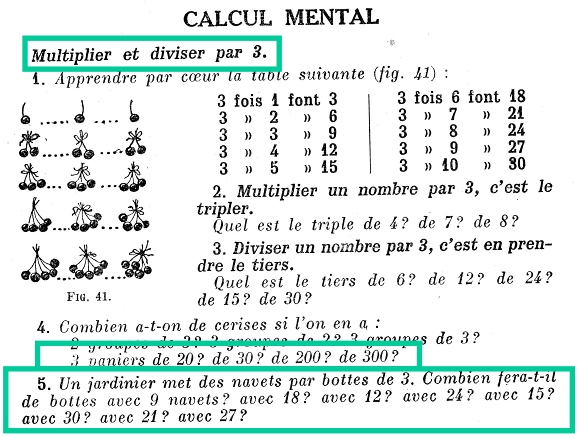
On compte par centaines comme on compte par dizaines et par unités.

82. *Opérations sur les centaines.* — Réunissons 2 sacs et 3 sacs de cent jetons. Nous avons en tout :

2 centaines + 3 centaines = 5 centaines de jetons,
ou 200 + 300 = 500.

On a de même :

5 centaines — 3 centaines = 2 centaines ou 500 — 300 = 200.
3 centaines × 2 = 6 centaines ou 300 × 2 = 600.
8 centaines : 2 = 4 centaines ou 800 : 2 = 400.



CALCUL MENTAL

Multiplier et diviser par 3.

1. *Apprendre par cœur la table suivante (fig. 41) :*

3 fois 1 font 3	3 fois 6 font 18
3 » 2 » 6	3 » 7 » 21
3 » 3 » 9	3 » 8 » 24
3 » 4 » 12	3 » 9 » 27
3 » 5 » 15	3 » 10 » 30

FIG. 41.

2. ***Multiplier un nombre par 3, c'est le tripler.***

Quel est le triple de 4? de 7? de 8?

3. ***Diviser un nombre par 3, c'est en prendre le tiers.***

Quel est le tiers de 6? de 12? de 24? de 15? de 30?

4. *Combien a-t-on de cerises si l'on en a :*

2 groupes de 3? 3 groupes de 2? 3 groupes de 3?

3 paniers de 20? de 30? de 200? de 300?

5. *Un jardinier met des navets par bottes de 3. Combien fera-t-il de bottes avec 9 navets? avec 18? avec 12? avec 24? avec 15? avec 30? avec 21? avec 27?*

(Boucheny et al., 1930, CE, extraits des 15e, 17e et 19e leçons intitulées respectivement : Division, Centaines et Entre deux centaines consécutives[6] pour le « calcul mental »)

Une première technique de calcul de division est ainsi constituée par l'apprentissage des tables de multiplication, qu'on apprend, souvent mais pas toujours, simultanément pour multiplier et diviser. Une autre technique est reliée à la numération. Pour diviser 800 par 2, on divise 8 centaines par 2 et donc 8 par 2, ce qui permet d'ailleurs de consolider les tables de multiplication. D'autres techniques sont encore institutionnalisées lors de l'élaboration de l'algorithme : avec les divisions, par exemple par 10 puis par les nombres d'un chiffre suivi de zéros.

6 On remarque que la « leçon 19 » est déconnectée du calcul mental. Dans ce manuel, l'apprentissage des différentes tables (d'addition et de multiplication) apparaît dans la rubrique « calcul mental » dans les leçons successives pendant plusieurs mois, plus ou moins indépendamment du thème de la leçon.

L'extrait suivant tiré d'un manuel faisant partie d'une collection dirigée par le mathématicien Albert Châtelet publiée au début des années 30 et qui a probablement eu un écho assez grand à l'époque montre non seulement l'exemple de la division par les nombres d'un chiffre suivi de zéros mais illustre aussi la mise en relation de trois composantes d'une praxéologie relative à cette technique.

DIVISION PAR PLUSIEURS DIZAINES

VITESSE MOYENNE. — **Problème.** — *Une voiture automobile parcourt, sur une piste,* **72 km.** *en* **50 minutes.** *Combien a-t-elle parcouru,* **en moyenne,** *par minute ?*

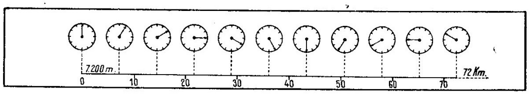
On calcule comme si l'automobile parcourait la même longueur chaque minute.

50 mn., c'est 10 fois 5 mn. En divisant la longueur par 10, on obtient l'espace parcouru en 5 mn. :

72.000 m. : 10 = 7.200 m. ; reste 0.

En divisant ce premier quotient par 5 on obtient l'espace parcouru en 1 mn. :

7.200 m. : 5 = **1.440 m. par mn. ;** *reste* **0.**



Solution. — L'automobile parcourt en moyenne :
72.000 m. : 50. = **1.440 m. par mn.,** *reste* **0.**

AVRIL-MAI **179**

RÈGLE ET DISPOSITION PRATIQUE.

```
72.00|0 | 5|0          22.8|3 | 7|0
 22     |1440           18    | 32
  20                     43
   00
   00
```

On sépare un zéro à droite du diviseur et un chiffre à droite du dividende. On fait ensuite la division du nouveau dividende par le nouveau diviseur qui n'a qu'un chiffre. A la droite du reste, on place le chiffre séparé du dividende.

Exemples : 72.000 à diviser par 50 ; on divise 7.200 par 5, quotient **1.440**, reste 0 ; reste définitif **0.**

2.283 à diviser par 70. On divise 228 par 7, quotient **32**, reste 4 ; reste définitif **43.**

PROBLÈMES

1046. *Calculer mentalement les divisions :*
210 : 30 **200 : 50** **630 : 70** **180 : 20.**

(Châtelet, 1932[7], pp.178-179, CE, extrait de la 72e leçon : Division par plusieurs centaines)

Sur cet exemple, caractéristique de ce que j'ai trouvé dans les manuels à partir des années 30, on a une tâche :

> Une voiture automobile parcourt, sur une piste, 72 km en 50 minutes. Combien a-t-elle parcouru, en moyenne, par minute ?

On a ensuite une technique justifiée par une technologie :

> On calcule comme si l'automobile parcourait la même longueur chaque minute. 50 minutes, c'est 10 fois 5 minutes. En divisant la longueur par 10, on obtient l'espace parcouru en 5 min : 72000 m : 10 = 7200 m ; reste 0. En divisant ce premier quotient par 5 on obtient l'espace parcouru en 1 minute : 7200m : 5 = 1440 m par minute ; reste 0.

On a enfin une règle et la disposition pratique dans la potence :

> On sépare un zéro à droite du diviseur et un chiffre à droite du dividende. On fait ensuite la division du nouveau dividende par le nouveau diviseur qui n'a qu'un chiffre. À la droite du reste, on place le chiffre séparé du dividende.[8]

Dans les livres anciens, les différentes techniques de calcul de division constituent donc à la fois des étapes dans l'apprentissage de la technique opératoire définitive mais aussi des méthodes de calcul définitives lorsque les nombres sont du type donné : pour calculer 12 : 3 on utilisera toujours les tables et pour diviser par 30 on divisera toujours par 10 puis par 3.

Dans le curriculum actuel, l'accent est mis sur le sens du problème qu'on ne distingue pas toujours du sens de l'opération. Dans mon questionnaire, j'observe qu'un même élève peut d'une part connaître la division, c'est-à-dire qu'il est capable de l'utiliser pour résoudre un problème de division et utiliser une multiplication à trou pour en résoudre un autre. Dans les deux cas, l'élève identifie le sens du problème mais il n'identifie le sens de la division que dans le premier cas. Ceci m'amène à formuler la nécessité, pour l'enseignement actuel, de distinguer entre sens du problème et sens de l'opération. Toutefois, cette distinction ne peut probablement se faire qu'en introduisant de façon plus précoce un symbolisme pour la division :

7 Si ce manuel est pour le « cours élémentaire », il comporte une suggestion pour son utilisation qui consiste à étudier les leçons d'octobre à janvier au CE1, celles de février à juin au CE2.

8 On remarque que dans l'exemple de la division par 50, on étend la règle, sans commentaire, au cas du reste non nul qui est plus délicat à justifier.

le mot division et un signe spécifique pour l'opération. Ceci doit permettre de commencer à apprendre le sens de l'opération et d'institutionnaliser des techniques de calcul, avant de disposer de la technique classique complète.

Écologie du système métrique et de la numération

Dans l'étude des programmes, j'ai déjà indiqué qu'en 1923, on prescrit une articulation entre système métrique et numération qui n'apparaissait pas avant. Je cherche à comprendre comment cela se manifeste dans ce qui est enseigné aux élèves.

À partir des années 30, l'étude du système métrique se greffe sur celle de la numération. Pour présenter cette greffe, j'évoque seulement une tâche, tout à fait banale. Elle n'est pas présente au début du 20ème siècle, elle apparaît dans les années 30. Il s'agit de « trouver des objets plus ou moins lourds qu'un kilogramme et vérifier ».

J'ai reconstitué les chaînes ou plutôt le réseau trophique dans lequel elle se trouve. En fait je vais montrer que cette tâche est utile dans quatre domaines de savoirs, c'est-à-dire quatre habitats. Cette tâche peut d'abord être interprétée comme une tâche de comparaison de grandeurs, de la masse en l'occurrence. Elle contribue ainsi à la connaissance de la grandeur masse. Le fait qu'on compare à « un kilogramme », et non deux objets entre eux, permet de l'inscrire dans la connaissance du système métrique : on apprend ainsi ce qu'est « un kilogramme ». Le fait qu'on vérifie, probablement en utilisant une balance et une masse marquée, permet de l'inscrire dans une connaissance des pratiques de la vie courante : utiliser une balance (ici en l'occurrence, connaître le déséquilibre) et connaître (reconnaître) la masse marquée du kilogramme. Enfin, cette tâche ne se situe pas n'importe où dans les manuels antérieurs à la réforme : elle apparaît juste après l'étude du millier. Le kilogramme est ainsi vu comme le millier de grammes, on a ainsi une « idée de mille », mille grammes alors qu'on avait donné avant, avec l'étude du gramme, une idée de « un », avec celle du décagramme, une idée de « dix », enfin avec l'étude de l'hectogramme, une idée de « cent ». Les grandeurs et leur mesure apparaissent ainsi comme un matériel de numération.

Je cherche maintenant des liens dans les connaissances des élèves actuels : au sein de la numération, au sein du système métrique, dans les relations entre les deux. Je reprends les résultats de Parouty. Elle demande à des élèves de CE2 de trouver le nombre de paquets de 100 carrelages qu'il faut acheter pour avoir 8564 carrelages. Elle observe 10% de réussite. On est au CE2, c'est-à-dire l'année pendant laquelle ce type de problème devrait être travaillé. Elle relève une progression au CM2 car les élèves posent la division (ils ont appris à le faire). Elle montre ensuite que, quand on apprend aux élèves à résoudre ce genre de problèmes, ils progressent, globalement, dans toute la numération. C'est pour moi le signe de liens qui se font avec l'ingénierie mais qui ne sont pas généralisés actuellement.

Dans le questionnaire, j'ai notamment proposé aux élèves des exercices de « conversions ». « Compléter 8kg=… hg » (R=71%). C'est une conversion « hors contexte », formelle. J'ai aussi proposé : « Combien de paquets de 100 g de farine peut-on remplir avec 4 kg de farine ? » (R=32%). Le nombre de paquets de 100 g dans 4 kg peut être interprété comme une conversion d'hectogrammes en kilogrammes. Cet exercice était dans l'enseignement ancien un exercice de conversion, étudié avec le kilogramme, après le nombre mille.

Pour identifier les liens que font les élèves entre les exercices, j'ai réalisé une analyse factorielle des réussites. J'observe notamment que les réussites aux deux exercices en contexte et hors contexte sont statistiquement indépendantes. J'en déduis que les élèves ne voient pas qu'une conversion qu'ils savent faire, formellement, peut leur être utile pour résoudre un problème, en contexte.

Évolution des organisations mathématiques sur la numération au 20^{e} siècle

Pour mieux comprendre les résultats des élèves actuels quant aux liens entre numération et système métrique et aux liens internes à chaque domaine. J'ai effectué une étude rapide de manuels récents. Cette étude me laisse penser que numération et système métrique sont désarticulés de plusieurs points de vue, notamment celui des tâches. Par exemple, entre les deux domaines, les décompositions ne se ressemblent pas (324 = 300 + 20 + 4 et 324 m = 3 hm 2 dam 4 m) ; les conversions existent en système métrique mais pas en numération. En fait, l'enseignement de la numération a apparemment beaucoup plus bougé que l'enseignement du système métrique par rapport à la situation antérieure à la réforme. Par ailleurs, dans les manuels actuels du CE1 et du CE2, on n'indique pas de façon systématique que 10 dizaines = 1 centaine.

Ces éléments vont être le moteur de la dernière partie de ma thèse (chapitre 6) sur l'évolution des organisations mathématiques sur la numération au 20^{e} siècle.

Une certaine permanence dans les tâches

Fondamentalement, la numération de position est un objet pérenne de l'enseignement primaire. Ceci se manifeste par la permanence d'un certain nombre de tâches emblématiques et « immuables » qu'on retrouve tout au long du 20ème siècle. Si ces tâches n'ont pas fondamentalement changé pendant un siècle, les types de tâches qui se développent autour de ces tâches sont en revanche beaucoup moins stables. On observe notamment des réorganisations dans les agencements des différentes tâches entre elles qui modifient les types de tâches plutôt que les tâches de référence. En outre, la réforme qui est l'occasion d'un bouleversement général de l'étude de la numération de position minore le rôle de certaines tâches et en fait apparaître d'autres.

J'ai ainsi identifié sept tâches de référence pour la numération de position des entiers au cours élémentaire. Ces tâches sont déclinées de multiples façons, éventuellement variables selon les époques. Mêmes si elles se nourrissent plus ou moins les unes les autres, les cinq premières sont relativement distinctes et constituent des pratiques sociales de référence. Elles sont « utiles » pour la vie courante.

« Dénombrer une grande collection » : avant la réforme cette tâche est décrite sans être explicitement prescrite pour le discret mais le mesurage, présent avec l'étude des unités métriques, relève de cette tâche pour le continu ; au moment de la réforme elle est le plus souvent prescrite « en bases » dans le discret. Le dénombrement à partir d'une collection partiellement groupée en unités, dizaines, etc. fait partie de ces tâches ; de même la détermination du cardinal d'une collection évoquée, partiellement groupée, comme « 3 paquets de 100, 7 paquets de 1000 ». « Lire un nombre écrit en chiffres », « Compter de 1 en 1, de 10 en 10… en montant, en descendant » sont des tâches permanentes. « Combien de paquets de 100 dans 8643 ? » correspond à une propriété de la numération de position (la troncature), je parlerai du « nombre de ». L'ordre n'est pas explicitement enseigné au début du siècle mais il l'est implicitement, je considère que « comparer des nombres » est une tâche emblématique.

Je repère une tâche technologique, « décomposer, recomposer un nombre en ses unités ». Cette tâche est permanente mais instable. Elle disparaît toutefois plus ou moins pendant le temps de la réforme. Elle ne me semble pas être emblématique dans la mesure où elle ne correspond pas à une pratique de référence. Ceci ne l'empêche pas d'être une tâche essentielle dans l'organisation de la numération de position.

Au moment de la réforme, des changements de base apparaissent. Cette tâche n'est pas prescrite dans le programme de 1970, néanmoins un type de tâches se développe autour d'elle dans les manuels du cours élémentaire. C'est une tâche emblématique de la numération de position : elle ne peut pas ne pas exister dès lors qu'on travaille « en bases ».

Théories et technologies

Les traités (Bezout & Raynaud, 1821), à partir du milieu du 18ème siècle, présentent une théorie de la numération de position formulée dans des termes élémentaires et qui ne fait pas appel à la division euclidienne. Je l'évoquerai sans la présenter complètement. On retrouve dans les manuels du début du 20^{e} siècle et jusqu'aux années 40, un texte du savoir qui reprend presque mot pour mot les éléments de la théorie. On a, à partir de 1945, des variations que je n'ai pas précisément étudiées.

Le texte du savoir est construit à partir d'un ostensif, c'est-à-dire, ici, un moyen de désigner les nombres, banal mais essentiel, que j'ai appelé la numération en unités et de quatre discours explicatifs, des technologies. Deux technologies seront ajoutées, uniquement dans les manuels, et non dans le traité qui ne bouge pas, un peu avant les années 30 pour articuler numération et système métrique. Je n'en présenterai qu'une.

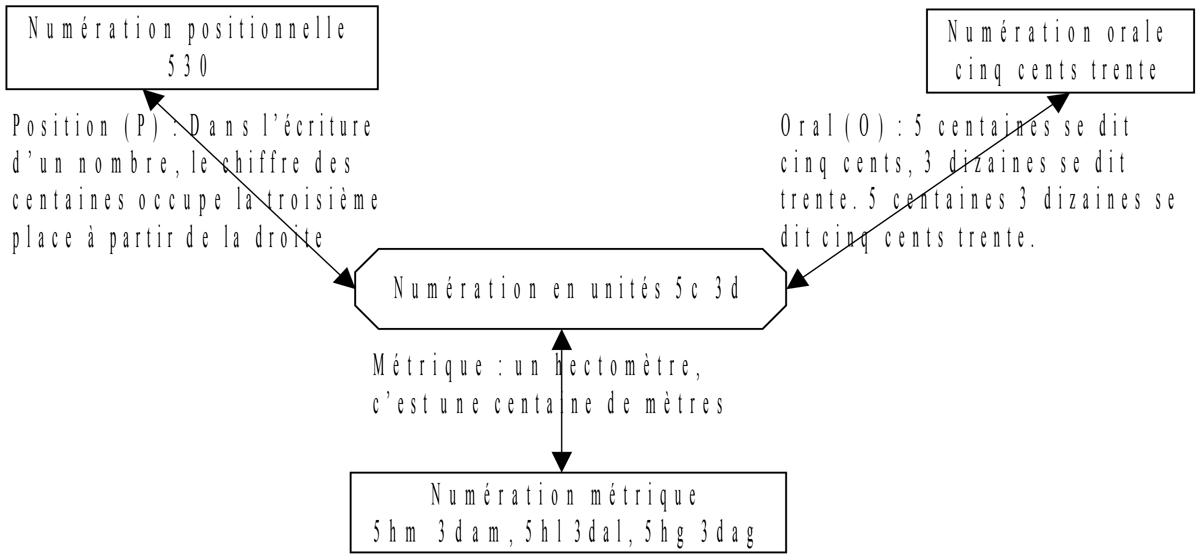
J'appelle donc « unités de la numération » les mots : unités, dizaines, centaines, milliers… La « numération en unités » consiste à utiliser, ces mots, les unités de la numération, pour désigner les nombres : ainsi 580 (cinq huit zéro) c'est 5 centaines 8 dizaines.

Je prends maintenant l'exemple du rang des centaines pour présenter, les quatre technologies autour desquelles se construit la théorie, mais on trouve la même chose aux différents ordres. Outre le fait que les technologies permettent formuler la théorie, elles se déclinent aussi en techniques pour traiter les tâches. J'y reviendrai.

Les deux premiers discours permettent de construire les nombres. Cela se fait en utilisant la numération en unités. Il s'agit :

- du discours de comptage (C) : « On compte par centaines comme on a compté par dizaines et par unités » ;
- du discours de relations entre les unités de la numération (R) : « Une centaine c'est dix dizaines ».

J'en viens aux autres discours que je présente à l'aide d'un graphique. J'ai représenté la numération en unités au centre et les autres systèmes de désignation des nombres (et des grandeurs mesurées) autour. On peut lire ces discours comme une médiation entre la numération en unités et les autres numérations : positionnelle, orale et métrique.



En utilisant le discours de position (P), pour 5c3d, on obtient que 5 est en 3ème position et 3 est en 2ème position. Le nombre 5c 3d s'écrit donc 530 (cinq trois zéro). Le discours pour l'oral (O) consiste en une traduction entre les deux numérations : 5 centaines se dit 5 cents, on a aussi 3 dizaines se dit trente au rang des dizaines. Donc 5 centaines 3 dizaines se dit cinq cents trente.

Vers le moment de la réforme, les unités de la numération sont péjorées et une théorie savante de la numération de position qui utilise la décomposition polynomiale vient concurrencer la théorie classique : $N = r_k a^k + r_{k-1} a^{k-1} + \ldots + r_1 a^1 + r_0 a^0$, $N = (r_k r_{k-1} \ldots r_1 r_0)_{\text{base } a}$. Cette théorie, savante, prend *peu* en charge les types de tâches « scolaires » classiques. Elle est en revanche nécessaire pour traiter les changements de base qui apparaissent, en primaire, au moment de la réforme.

On observe de façon très nette, au moment de la contre-réforme, un processus de transposition didactique de la théorie savante. Il fait émerger des technologies pour la numération de position se formulant avec des écritures chiffrées des puissances de dix (1, 10, 100… que j'appellerai ECPD). Ces technologies permettent de traiter *plus ou moins* les types de tâches classiques. Elles concurrencent et viennent en grande partie se substituer aux technologies classiques qui disparaissent *plus ou moins*.

Je donne un exemple et j'en profite pour évoquer l'hétérogénéité des manuels actuels. Comment sait-on que le nombre de cubes dans 2 plaques de cent s'écrit 200 (deux zéro zéro) ?

Dans la théorie classique, la technique consiste à enchaîner deux technologies : le comptage, on compte des centaines comme on a compté des unités (1 centaine, 2 centaines) ; puis la position, 2 centaines s'écrit avec un 2 en troisième position (200 - deux zéro zéro).

Souvent, dans les manuels actuels, il est écrit 2×100 ou 100+100 puis 200. Pour obtenir ces éléments, on observe des variations :

- on pose une addition en colonne,
- on fait un tableau de numération et on complète avec des zéros,
- on compte « à l'oral » de cent en cent puis on traduit en écriture positionnelle ou on compte à l'écrit de cent en cent avec l'algorithme de la suite écrite,
- on ne dit rien…

Je cherche maintenant à interpréter les nouvelles technologies en ECPD dans une théorie mathématique. En fait, j'ai substitué dans la théorie classique les ECPD aux unités de la numération. C'est-à-dire que je prends comme objets premiers les signes : 1, 10, 100, 1000… à la place des mots unités, dizaines, centaines, milliers et que j'utilise les opérations d'addition et de multiplication pour relier les signes. Ce faisant, on obtient une « nouvelle » théorie mathématique. Elle peut être considérée comme un savoir savant (de second ordre). Cette substitution laisse néanmoins le choix pour un certain nombre de variations qui peuvent correspondre à autant de théories.

Dans la théorie classique, on compte par centaines comme on compte par unités, c'est un axiome. Dans la théorie en ECPD, ce sont des axiomes qui disent que 200 est le résultat de 2×100 ou de 100+100 (il y a des variations possibles dans le choix de l'opération : multiplication ou addition, dans la formulation de l'axiome qui donne le « résultat »). Je distinguerai dans la suite deux versions de la théorie : la version « multiplicative » qui utilise la multiplication et l'addition, la version « additive » qui utilise seulement l'addition.

Cette nouvelle théorie de la numération formulée en ECPD intègre *grosso modo* l'ensemble technologique créé depuis la contre réforme. *Grosso modo*, les technologies enseignées correspondent aux axiomes de la théorie. Les variations des manuels correspondent souvent à des variations dans les choix des axiomes ou de leur formulation.

Je crois que ces théories ne sont pas publiées (en tout cas, je ne les ai pas trouvées). Selon moi, on peut interpréter les variations dans les manuels comme la manifestation de cette absence.

J'ai dit que les unités de la numération sont péjorées à partir de la réforme. Je vais m'attacher à présenter des conséquences de cette péjoration sur la technologie qui concerne les relations entre unités de la numération (R). Cette relation est essentielle dans l'étude de la numération, j'évoquerai plus tard quelques exemples. Ma question est : comment faire pour exprimer la relation 10 centaines = 1 millier quand on n'a pas les unités de la numération mais les ECPD ?

Dans la théorie classique, avec les unités de la numération, on dit que 10 centaines = 1 millier. J'ai dit qu'on pouvait reconstruire une théorie de la numération en ECPD : la relation 10 centaines = 1 millier se traduit alors diversement. Dans une version « multiplicative » de la théorie, elle se traduit par $10 \times 100 = 1 \times 1000$, cette égalité provient des deux « axiomes » : $10 \times 100 = 1000$ (définition de 1000) et $1 \times 1000 = 1000$ (1 élément neutre). Ce faisant, on a élevé les besoins trophiques puisqu'on a besoin d'une multiplication et de ses propriétés pour exprimer la relation. Dans une version « additive » de la théorie, on a 900+100=1000 (définition de 1000). L'avantage est qu'on abaisse ainsi les besoins trophiques puisqu'on n'a plus de multiplication. L'inconvénient est qu'on a une écriture unique, 1 suivi de 3 zéros, pour désigner deux choses : 1 paquet de 1000 et 10 paquets de 100.

Tâches et types de tâches

La marginalisation des unités de la numération a aussi des effets sur les types de tâches. J'ai dit que les tâches emblématiques étaient stables. En revanche, le type de tâches « conversions » a disparu de l'étude de la numération sans doute parce qu'il ne peut pas exister sans la numération en unités. Il correspond à la technologie (R) de relation entre unités. Il est essentiel pour l'étude de la numération, cela est particulièrement visible dans les technologies, pour justifier la retenue dans les techniques opératoires par exemple.

Avant, il était très structuré (par la progression des manuels qui s'appuie sur la théorie). Avec la leçon « le millier », on explicite la relation 1 millier = 10 centaines et on peut travailler des tâches telles que : « combien faut-il ajouter de centaines à 600 pour faire 1 millier ? ». Dans la leçon « les milliers », on va travailler des relations telles que 30 centaines = 3 milliers. Dans la leçon « entre deux milliers », on pouvoir travailler des relations telles que 35 centaines = 3 milliers 5 centaines ou encore des tâches telles que : combien de paquets de 100 enveloppes faut-il pour avoir 3500 enveloppes ?

Au moment de la réforme, il est doublement affaibli. Outre la péjoration des unités de la numération, il ne se formule pas en base autre que dix. Au moment de la contre-réforme, il survit avec la tâche emblématique : « nombre de ». Par exemple, dans plusieurs manuels de l'époque, il n'apparaît que dans un mot croisé.

problème

Reproduis et complète la grille des « nombres croisés ».

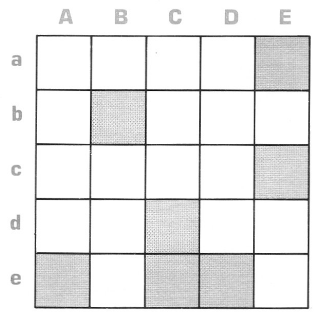
HORIZONTALEMENT

a. Le nombre qui précède 1 100.

b. (100 + 1) × 7.

c. 89 centaines.

d. 9 dizaines. 8 × 12.



VERTICALEMENT

A. Le nombre qui précède 1 090.

B. (60 × 15) + 3.

C. 97 dizaines.

D. Le nombre qui précède 9 010.

E. (9 × 8) − 9.

(Eiller et al., 1987, p.113, CE2, extrait de la leçon : Ordre sur les nombres de 0 à 10000 (2))

On observe, par ailleurs, l'émergence récente d'un type de tâches autour de la tâche « nombre de » : calculer 3 c 21 d par exemple. Ce développement d'un type de tâches autour de la tâche « nombre de » semble plutôt assurer l'existence du « nombre de » que satisfaire les besoins technologiques pour les techniques opératoires par exemple.

9 Calcule.

24 dizaines et 3 unités = ……………………

3 c + 21 d = ……………………………………

(Peltier et al., 2003, p.25, CE2, extrait de la leçon : Numération : échanger et calculer (1))

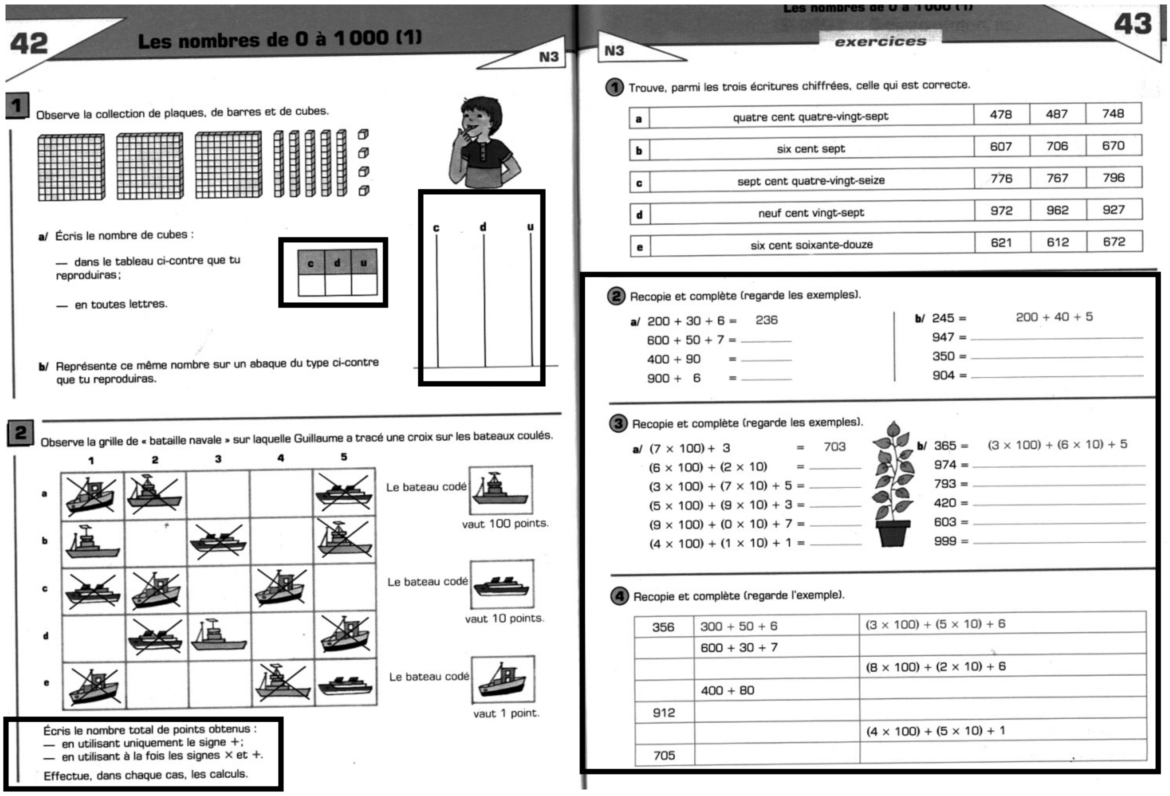
Dans les manuels, à partir de la réforme et après, on voit apparaître de nombreux matériels pour étudier la numération. Bien sûr, ils permettent de « manipuler » ce qui était le credo de la réforme mais on peut aussi les voir comme des substituts au discours technologique, et donc une façon de prendre en charge, dans un registre non symbolique, les besoins trophiques accrus avec les ECPD, notamment l’impossibilité, avec des discours élémentaires d’évoquer la relation entre unités : le multibase pour faire les paquets successifs, pour la retenue ; le compteur (et boulier) notamment pour la suite écrite et l’ordre.

Exemples de matériels qui apparaissent dans les manuels au moment de la réforme.

J’en viens au type de tâches que j’ai qualifié de « technologique ». Autrefois, la tâche « chiffre des » appartient au type de tâches décomposer recomposer. À la question « quel est le chiffre des dizaines de 654 ? », la réponse est « le chiffre des dizaines est 5 ». Lorsqu’il s’agit de « décomposer 654 en ses unités », la réponse est 6 centaines 5 dizaines 4 unités. C’est sensiblement la même technique dans les deux cas, c’est une adaptation de la technologie de position (P) : dans l’écriture d’un nombre, le chiffre des centaines occupe la troisième position.

En fait, les décompositions-recompositions disparaissent quasiment au moment de la réforme : on écrit directement les nombres dans le tableau de numération. J'illustre ce qui semble se passer au moment de la contre-réforme avec le manuel Math et Calcul (Eiller, 1987, CE2) souvent considéré comme emblématique des années 80.

À partir de la contre-réforme, pour recréer un travail dans le registre symbolique, des décompositions-recompositions reviennent mais elles sont prescrites dans les ECPD. La technique pour traiter la somme est souvent implicite, il faut « effectuer les calculs ». Un type de tâches avec des unités de la numération survit dans le tableau. On voit ainsi qu'on ne peut se passer des unités de la numération pour étudier la numération. On peut penser que ce n’est pas la même technique pour les deux types. Le type de tâches s’est fragmenté. D’une praxéologie locale, on passe à deux praxéologies ponctuelles.



42 Les nombres de 0 à 1000 (1) N3

1 Observe la collection de plaques, de barres et de cubes.

a/ Écris le nombre de cubes :
— dans le tableau ci-contre que tu reproduiras ;
— en toutes lettres.

c	d	u

b/ Représente ce même nombre sur un abaque du type ci-contre que tu reproduiras.

c d u

2 Observe la grille de « bataille navale » sur laquelle Guillaume a tracé une croix sur les bateaux coulés.

1 2 3 4 5
a b c d e

Le bateau codé vaut 100 points.
Le bateau codé vaut 10 points.
Le bateau codé vaut 1 point.

Écris le nombre total de points obtenus :
— en utilisant uniquement le signe + ;
— en utilisant à la fois les signes × et +.
Effectue, dans chaque cas, les calculs.

Les nombres de 0 à 1000 (1) 43 N3 exercices

1 Trouve, parmi les trois écritures chiffrées, celle qui est correcte.

a	quatre cent quatre-vingt-sept	478	487	748
b	six cent sept	607	706	670
c	sept cent quatre-vingt-seize	776	767	796
d	neuf cent vingt-sept	972	962	927
e	six cent soixante-douze	621	612	672

2 Recopie et complète (regarde les exemples).

a/ 200 + 30 + 6 = 236
600 + 50 + 7 = ……
400 + 90 = ……
900 + 6 = ……

b/ 245 = 200 + 40 + 5
947 = ……
350 = ……
904 = ……

3 Recopie et complète (regarde les exemples).

a/ (7 × 100) + 3 = 703
(6 × 100) + (2 × 10) = ……
(3 × 100) + (7 × 10) + 5 = ……
(5 × 100) + (9 × 10) + 3 = ……
(9 × 100) + (0 × 10) + 7 = ……
(4 × 100) + (1 × 10) + 1 = ……

b/ 365 = (3 × 100) + (6 × 10) + 5
974 = ……
793 = ……
420 = ……
603 = ……
999 = ……

4 Recopie et complète (regarde l'exemple).

356	300 + 50 + 6	(3 × 100) + (5 × 10) + 6
	600 + 30 + 7	
		(8 × 100) + (2 × 10) + 6
	400 + 80	
912		
		(4 × 100) + (5 × 10) + 1
705		

(Eiller et al., 1987, pp.42-43, CE2, leçon : les nombres de 0 à 1000 (1))

Depuis peu, des décompositions en unités de la numération reviennent, en complément de celles en ECPD, comme on peut le voir dans un manuel plus récent ci-dessous. La technique pour recomposer 6 c 5 d 4 u en 654 semble être en ce moment : 6 c = 600, 5 d = 50, 4 u = 4 puis 600 + 50 + 4 = 654. En termes technologiques, les unités de la numération apparaissent assujetties aux ECPD.

1 Observe l'exemple, puis décompose les nombres.
648 = 600 + 40 + 8
472 586 908 759 390

2 Décompose les nombres en centaines, dizaines et unités selon l'exemple.
543 c'est 5 centaines 4 dizaines 3 unités
856 450 624 302 718

(Blanc et al., CE2, 2002, p.17, extrait de la leçon : Les nombres jusqu'à 999)

Le type de tâches classique semble être en train de se recomposer mais la technologie a changé, elle repose sur les ECPD. Ceci redonne un peu de légitimité aux unités de la numération mais elles sont assujetties aux ECPD.

Conclusions et perspectives

En reprenant les trois aspects, théories, chaînes trophiques et numération de position, je présente des conclusions et des perspectives de recherche en didactique dont certaines ont une dimension historique ou épistémologique.

À propos des théories, je crois avoir montré à deux reprises comment on peut interpréter les praxéologies aujourd'hui prescrites dans des savoirs savants de second ordre. D'une certaine façon, après le grand bouleversement de la réforme, le savoir qui apparaît dans les documents pour le maître se reconstitue, lentement, en un savoir savant de second ordre, qui n'est pas le savoir savant de référence.

Je n'ai que peu pris en compte la question du formalisme et de la langue naturelle dans la formulation des théories, cette question émerge avec l'étude du rôle des unités de la numération. Il me semble que c'est un point important pour penser des théories pour le primaire.

Sur le plan de l'épistémologie des mathématiques, le début des années 30 correspond à la fin de la crise des fondements. A cette époque, paraissent le livre de Lebesgue, la mesure des grandeurs, et une collection de livres pour l'école primaire dirigée par le mathématicien Châtelet. Que sait-on du rôle de ces mathématiciens dans la conception et la mise en œuvre du programme de 1945 ? On sait qu'un peu plus tard des mathématiciens ont été particulièrement actifs au moment de la réforme pour l'enseignement secondaire. Qu'en est-il pour l'enseignement primaire ? Qui sont les inspirateurs des changements mathématiques ?

Pour ce qui concerne les chaînes trophiques, l'enseignement ancien me paraît être extrêmement dense du point de vue des réseaux trophiques. Et beaucoup des chaînes que j'ai identifiées me semblent être aujourd'hui perdues. Mon travail permet peut-être de mieux comprendre des effets souterrains de la rupture de la réforme.

Que peut-on faire de ces chaînes trophiques que j'ai mises à jour pour l'enseignement d'aujourd'hui ? Et comment le faire ? Quelles pratiques de la vie courante qui impliquent des grandeurs est-il souhaitable d'enseigner ? Par ailleurs, l'enseignement ancien a la réputation d'être peu générateur de prise d'initiative chez les élèves. S'agit-il de trouver un équilibre entre ce qui relève d'institutionnalisations systématiques et de ce qui n'est pas institutionnalisé mais travaillé quand même ou s'agit-il d'autre chose ?

L'étude des chaînes trophiques dans l'enseignement ancien pourrait être affinée sur des thèmes proches : la numération des grands nombres, des nombres de deux chiffres. L'étude des opérations au cours élémentaire mériterait d'être approfondie. Par ailleurs, le livre de Liping Ma (1999) laisse penser que des chaînes trophiques, riches et complexes, existent aujourd'hui dans certains pays, notamment en Chine, et pas dans d'autres, aux États-Unis par exemple. C'est un aspect à développer dans des études internationales.

Enfin, dans les manuels scolaires, les années 30 apparaissent comme un moment particulièrement fécond du point de vue du développement des chaînes trophiques. Pourquoi et comment cela se passe-t-il ?

Je termine par la numération. Dans la thèse, l'étude de la numération n'est pas aboutie, ce texte propose des avancées sur ce point. J'ai montré que la marginalisation de l'ostensif numération en unités et son « remplacement » par les écritures chiffrées des puissances de dix a des conséquences sur toutes les composantes de la praxéologie : des types de tâches à la théorie. D'autre part, l'absence de numération en unités crée un vide dans les tâches prescrites et dans les technologies accessibles aux élèves. J'ai aussi noté une grande hétérogénéité des discours technologiques des manuels. Elle est peut-être imputable à l'absence de théorie explicite, admise comme référence commune.

J'ai fait une étude de manuels dans laquelle j'observe des variations nombreuses pour les quarante dernières années. Dans la mesure où on peut penser que la « première fois » qu'un enseignant investit un thème (c'est souvent au cours sa formation initiale ou dans les années qui la suivent immédiatement) est particulièrement déterminante pour ses pratiques ultérieures, une question qui se pose est alors de savoir ce qui se passe effectivement dans les classes pour l'enseignement de la numération de position. Enfin, à la lumière de ce travail, on peut envisager de repenser des ingénieries d'apprentissage de la numération de position pour des élèves.

Pour finir, la théorie classique de la numération m'apparaît remarquable du point de vue de la simplicité de sa formulation et de son efficacité pour traiter les tâches. Elle est déjà présente au 18ème siècle, quand et comment s'est-elle élaborée ?

Bibliographie

Artaud M. ; 1997 ; Introduction à l'approche écologique du didactique - l'écologie des organisations mathématiques et didactiques ; *Actes de la 9ème école d'été de didactique des mathématiques ;* 100-139

Bezout, Reynaud ; 1821 *; Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie, par Bezout ; avec des notes et des tables de logarithmes, par A. A. L. Reynaud.* 9e édition. consulté sur Internet le 21 décembre 2007, http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201342q/f2.table

Bronner A. ; 2008 ; La question du numérique dans l'enseignement du secondaire ; *Actes de la 13e école d'été de didactique des mathématiques ;* 17-45

Chambris C. ; 2008 ; *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels.* ; Thèse ; Université Paris-Diderot (Paris 7)

Chevallard Y. ; 1992 ; Une réforme inaccomplie ; *La gazette des mathématiciens ;* 54 ; 17-21

Chevallard Y. ; 2007 ; Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique ; *Actes du 1er congrès international sur la Théorie Anthropologique du Didactique, Baeza. ;* consulté sur Internet le 26 juin 2009, http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passe_et_present_de_la_TAD-2.pdf

Cirade G. ; 2006 ; *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel ;* Thèse de Doctorat ; Université d'Aix-Marseille I.

Lebesgue H. ; 1931 ; *La mesure des grandeurs.* Rééd. (1975) Paris : Albert Blanchard

Ma Liping ; 1999 ; *Knowing and teaching elementary mathematics ;* Lawrence Erlbaum associates, publishers. Mahwah, New Jersey. London

Neyret R. ; 1995 ; *Contraintes et détermination des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres ;* Thèse ; Université Joseph Fourier Grenoble

Parouty V. ; 2005 ; Compter sur les erreurs pour compter sans erreurs : état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3 ; *Actes du XXXIème colloque sur la formation des maîtres*. Commission Inter-IREM COPIRELEM ; IREM de Toulouse, Toulouse

Rouche N. ; 1992 ; *Le sens de la mesure.* Bruxelles : Didier Hatier

Rouche N. ; 1994 ; Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique *Repères-IREM* 15 25–36

Références des manuels scolaires

Blanc J.-P., Bramand P., Debû P., Gély J., Peynichou D., Vargas A. (2002) *Pour comprendre les mathématiques CE2.* Paris : Hachette éducation

Boucheny G., Guérinet A. (1930) *L'arithmétique au cours élémentaire (1re et 2e année).* Paris : Librairie Larousse

Châtelet A., Condevaux G. Blanquet L. (1932) *Arithmétique. Cours élémentaire (1re et 2e année).* Paris : Bourrelier-Chimènes

Eiller R., Brini R., Martineu M., Ravenel R., Ravenel S. (1987) *Math et calcul CE2.* Paris : Classiques Hachette

Marijon A., Masseron R., Delaunay E. (1947) *Cours d'arithmétique. Le calcul à l'école primaire. Cours élémentaire.* Coulommiers-Paris : Brodard et Taupin

Peltier M.-L., Vergnes D., Clavié C. (2003) *Euro Maths CE2.* Paris : Hatier